

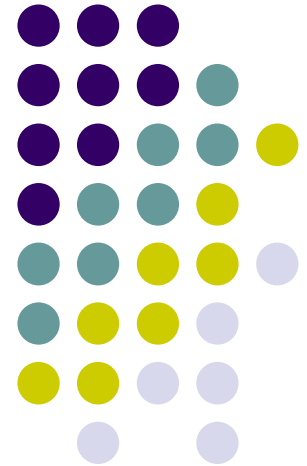


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

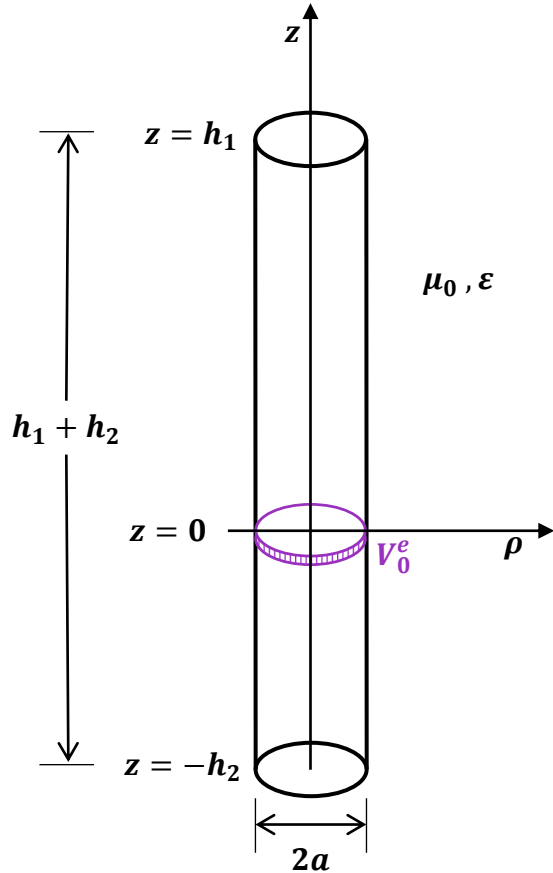
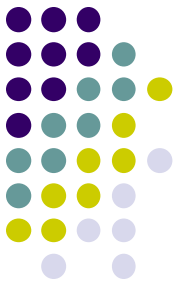
# ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Μοντελοποίηση κυλινδρικής κεραίας  
Μέθοδος Ροττών - Αριθμητική ολοκλήρωση  
Τεχνικές επίλυσης γραμμικών συστημάτων



Web Site: <https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=973>  
<http://mfol.ece.ntua.gr/computational-techniques-for-information-transmission-systems/>

# Μοντελοποίηση Κυλινδρικής Κεραίας<sup>(1)</sup>



## Θεώρημα Ισοδυναμίας Schelkunoff

αντικατάσταση αγωγίμου κυλίνδρου και περιβάλλοντος μέσου από ηλεκτρικά και μαγνητικά ρεύματα στην επιφάνειά του  $S$

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_s \quad \vec{M}_s = \vec{E}_s \times \hat{n}$$

- ✓ μηδενικά μαγνητικά ρεύματα πάνω σε τέλειο αγωγό
- ✓ μηδενικό συνολικό πεδίο στο εσωτερικό της κεραίας

## Αντίδραση (Reaction)

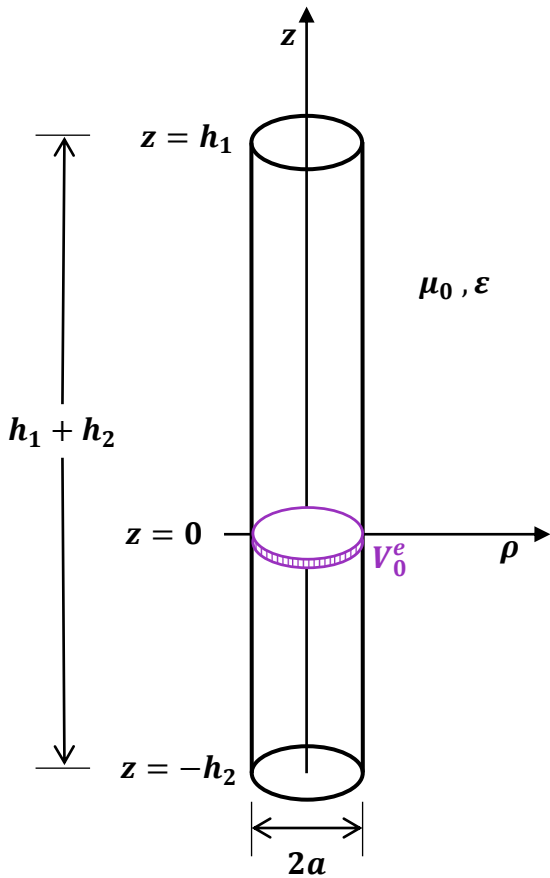
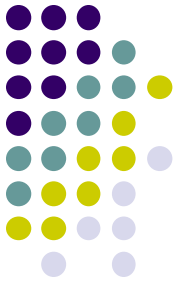
$$\langle a, b \rangle = \iiint_{V_b} (\vec{E}_a \cdot \vec{J}_b - \vec{H}_a \cdot \vec{M}_b) dV$$

προσεγγίσεις των **άγνωστων** κατανομών  $\vec{J}_s$  και  $\vec{M}_s$  τέτοιες ώστε οι αντιδράσεις τους σε καθορισμένες πηγές **δοκιμής**  $\vec{J}_t$  να είναι οι «σωστές»

## Θεώρημα Αμοιβαιότητας

$$\langle t, s \rangle = \langle s, t \rangle \quad \xrightarrow{\vec{M}_t=0} \quad \iint_S (\vec{E}_t \cdot \vec{J}_s - \vec{H}_t \cdot \vec{M}_s) dS = \iint_S \vec{E}_s \cdot \vec{J}_t dS$$

# Μοντελοποίηση Κυλινδρικής Κεραίας<sup>(2)</sup>



$$\iint_S (\vec{E}_t \cdot \vec{J}_s - \vec{H}_t \cdot \vec{M}_s) dS = \underbrace{\iint_S \vec{E}_s \cdot \vec{J}_t dS}_{\text{μη μηδενικό μόνον για } z = 0 \text{ (απειροστό διάκενο διέγερσης)}}$$

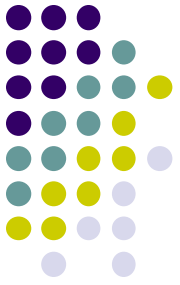
μη μηδενικό μόνον για  $z = 0$   
(απειροστό διάκενο διέγερσης)

- **τέλεια αγωγή κεραία**  $\Leftrightarrow$  μηδενικό εφαπτομενικό  $\vec{E}_s$  στην  $S$ 
  - ✓ μηδενικά μαγνητικά ρεύματα  $\vec{M}_s$
  - ✓ αναλυτικός υπολογισμός του δεξιού σκέλους
- προσεγγίσεις λεπτού σύρματος (**thin wire approximations**)  
 $\alpha \ll (h_1 + h_2)$  και  $\alpha \ll \lambda$ 
  - ✓ αμελητέα ολοκληρώματα στις βάσεις του κυλίνδρου
  - $\vec{J}_s = J_z(z, \varphi) \hat{z} + J_\varphi(z, \varphi) \hat{\varphi} \Leftrightarrow \vec{J}_s = J_z(z) \hat{z} \Leftrightarrow I(z)$
  - ✓ αμελητέα περιφερειακή συνιστώσα  $J_\varphi$
  - ✓ αμελητέα εξάρτηση της αξονικής συνιστώσας  $J_z$  από την  $\varphi$

$$\frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} I_t(z') d\varphi' dz' \right) I_s(z) d\varphi dz = V_0^e I_t(0)$$

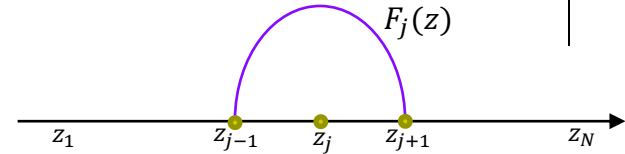
$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2 \left( \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)}$$

# Επίλυση με τη Μέθοδο Ροπών<sup>(1)</sup>

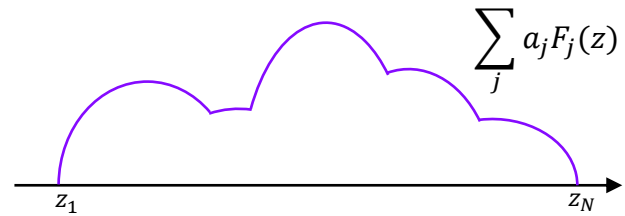
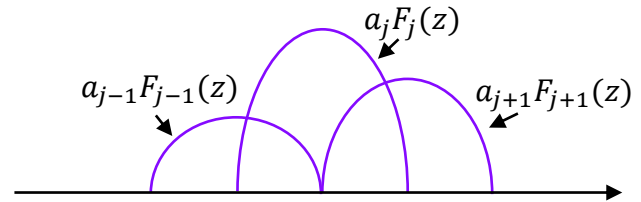


$$\frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} I_t(z') d\varphi' dz' \right) I_s(z) d\varphi dz = V_0^e I_t(0)$$

$$I_s(z) = \sum_{n=1}^N A_n F_n(z)$$



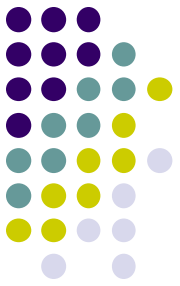
$$F_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin(k(z - z_{n-1}))}{\sin(k\Delta z)}, & z_{n-1} \leq z \leq z_n \\ \frac{\sin(k(z_{n+1} - z))}{\sin(k\Delta z)}, & z_n \leq z \leq z_{n+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} A_n = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad V_m = \begin{cases} V_0^e F_m(0), & z_{m-1} \leq z \leq z_{m+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} F_m(z') d\varphi' dz' \right) F_n(z) d\varphi dz$$

# Επίλυση με τη Μέθοδο Ροπών<sup>(2)</sup>



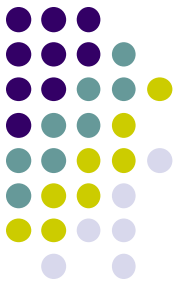
- πίνακας Toeplitz (μέθοδος Levinson  $O(N^2)$  πολυπλοκότητα)
- $F_m, F_n$  μη μηδενικές στα  $[z_{m-1}, z_{m+1}], [z_{n-1}, z_{n+1}]$
- κυλινδρική συμμετρία του πεδίου
- παραγοντικές ολοκληρώσεις

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k \sin^2(k\Delta z)} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}} + \frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} - 2\cos(k\Delta z) \frac{e^{-jkR_n}}{R_n} \right) \sin(k(\Delta z - |z' - z_m|)) d\varphi' dz'$$

➤ αριθμητική ολοκλήρωση

➤ ιδιομορφίες της ολοκληρωτέας για  $\varphi' = \varphi, z' = z_{n+1}, z_{n-1}, z_n$

# Αριθμητική Ολοκλήρωση



$$I = \int_a^b f(x) dx \longrightarrow \sum_{i=1}^N a_i f(x_i)$$

χρήση πολυωνύμων παρεμβολής

$$f(x) \longrightarrow P_n(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x)$$

$$I = \int_a^b \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=1}^N a_i f(x_i)$$

όπου  $a_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$

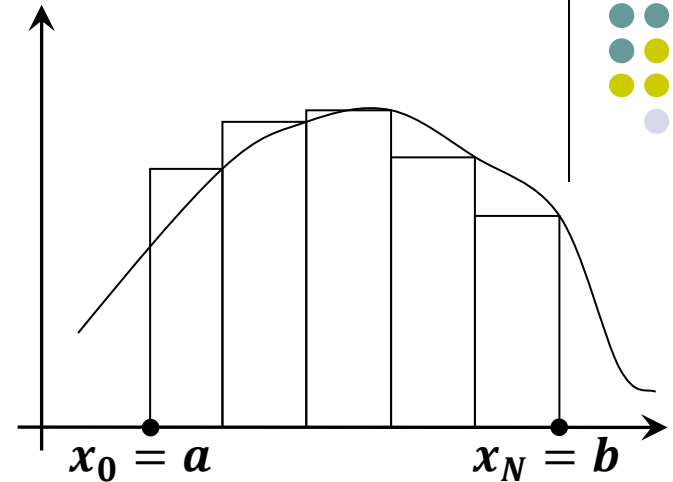
➤ **ομοιόμορφη**  
υποδιαίρεση του  
διαστήματος  
ολοκλήρωσης

$$h = \frac{b - a}{N}$$

# Κανόνας του Euler ή Ορθογωνικός Κανόνας

πολυώνυμο μηδενικής τάξης  $L_i = 1$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$



## Κανόνας του τραπεζίου

πολυώνυμο πρώτης τάξης

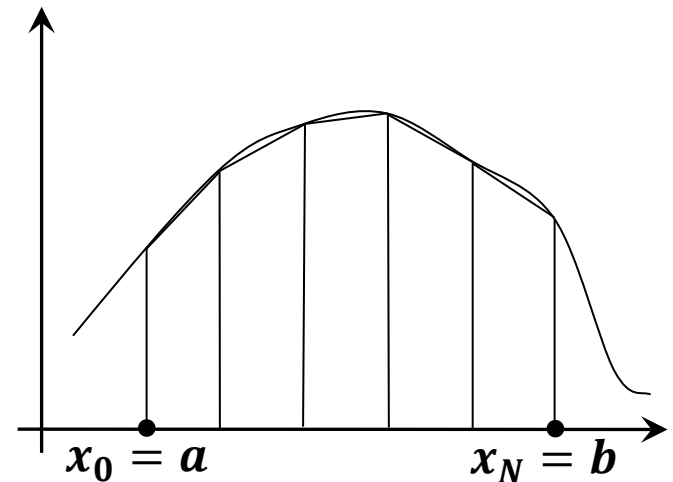
$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

απλός κανόνας

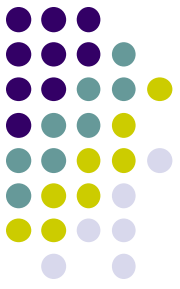
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \cong \frac{x_1 - x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

σύνθετος κανόνας

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih) + \frac{h}{2} [f(a) + f(b)]$$



# Κανόνας του Simpson



πολυώνυμο **δεύτερης** τάξης

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

τρία σημεία → τμήμα παραβολής

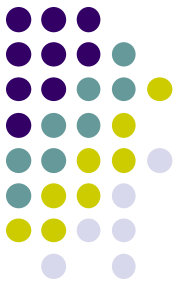
απλός κανόνας  $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \cong \frac{x_2 - x_0}{3} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)]$

σύνθετος κανόνας για  $2m$  υποδιαίρεσεις

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b - a}{6m} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(b) \right]$$



# Ολοκλήρωση Romberg



✓ δυνατότητα επαναχρησιμοποίησης

• αρχική εκτίμηση με σύνθετο κανόνα τραπεζίου

$$I_{n,1} \cong h \sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih) + \frac{h}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$h = \frac{b - a}{N}$$

ομοιόμορφο  
μήκος διαμέρισης

$$N = 2^{n-1}$$

πλήθος  
ισοκαταναμημένων  
σημείων

• βελτίωση με επέκταση (extrapolation) Richardson

$$I_{n+1,1} \cong \frac{1}{2} I_{n,1} + h' \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + [2i - 1]h')$$

$$h' = \frac{b - a}{2^n}$$

νέο μήκος  
διαμέρισης

# Γκαουσιανή Ολοκλήρωση



$$I \cong \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

➤ *ανομοιόμορφη υποδιαίρεση του διαστήματος ολοκλήρωσης*

- **κοινή πρακτική:** βάρη  $w_i$  και σημεία  $x_i$  ώστε οι λαμβανόμενες προσεγγίσεις να είναι ακριβείς για **πολυώνυμα μέχρι βαθμού p**

Παράδειγμα:  $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$   $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma$

**δύο** δείγματα  $x_{-1}, x_1$ :  $\int_{-1}^1 f(x) dx = w_{-1}f(x_{-1}) + w_1f(x_1)$

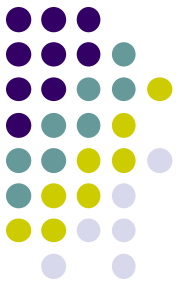
**συμμετρία** στα βάρη και τα σημεία:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_{-1}f(-x_1) + w_1f(x_1) = 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \begin{cases} \rightarrow w_{-1} = w_1 = 1 \\ \rightarrow x_{-1} = -x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

❖ **Κανόνες Gauss – Kronrod**  
( $n \rightarrow 2n+1$ )

❖ **Γκαουσιανή Ολοκλήρωση για Τρίγωνα**  
(πολυδιάστατα ολοκληρώματα)

# Τεχνικές Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων<sup>(1)</sup>



## ➤ απευθείας (direct)

(Απαλοιφή Gauss, Αποσύνθεση LU, Choleski)

## ➤ επαναληπτικές (iterative)

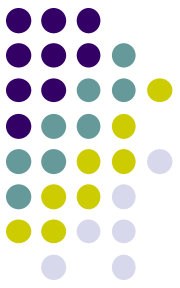
### • στάσιμες

(Jacobi, Gauss – Seidel, Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης, Συμμετρικής Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης )

### • μη στάσιμες

(Conjugate Gradient, Minimal Residual, Conjugate Gradient on the Normal Equations, Generalized Minimal Residual, BiConjugate Gradient, Quasi-Minimal Residual, Conjugate Gradient Squared, BiConjugate Gradient Stabilized)

# Τεχνικές Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων<sup>(2)</sup>



## ➤ πυκνά συστήματα

- **MoM, MAS**
- συνήθως μικρότερης τάξης έναντι των αραιών
- δαπανηρός ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα και όχι τόσο η επίλυση του συστήματος
- ✓ προτιμητέες οι **απευθείας** τεχνικές επίλυσης έναντι των επαναληπτικών

γιατί;

## ➤ αραιά συστήματα

- **FEM**
- συνήθως πολύ μεγαλύτερης τάξης έναντι των πυκνών
- δαπανηρή η επίλυση του συστήματος και όχι τόσο ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα
- ✓ προτιμητέες οι **επαναληπτικές** τεχνικές επίλυσης

γιατί;

# Η Τεχνική Αποσύνθεσης LU



$$[A] \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

κάτω τριγωνικός

παραγοντοποίηση

$$[L] \cdot [U] = [A]$$

άνω τριγωνικός

$$[A] \cdot \vec{x} = ([L] \cdot [U]) \cdot \vec{x} = [L] \cdot \underbrace{([U] \cdot \vec{x})}_{\vec{y}} = \vec{b}$$

επίλυση του  $[L] \cdot \vec{y} = \vec{b}$  με εμπρόσθια αντικατάσταση

επίλυση του  $[U] \cdot \vec{x} = \vec{y}$  με οπίσθια αντικατάσταση