

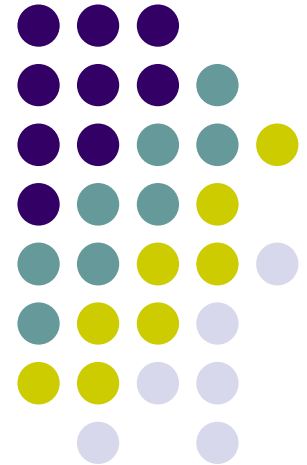


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

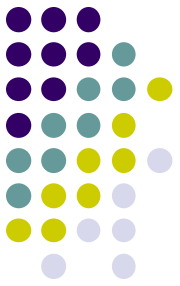
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Επίλυση μικροταινιακής γραμμής μεταφοράς
Μέθοδος Galerkin

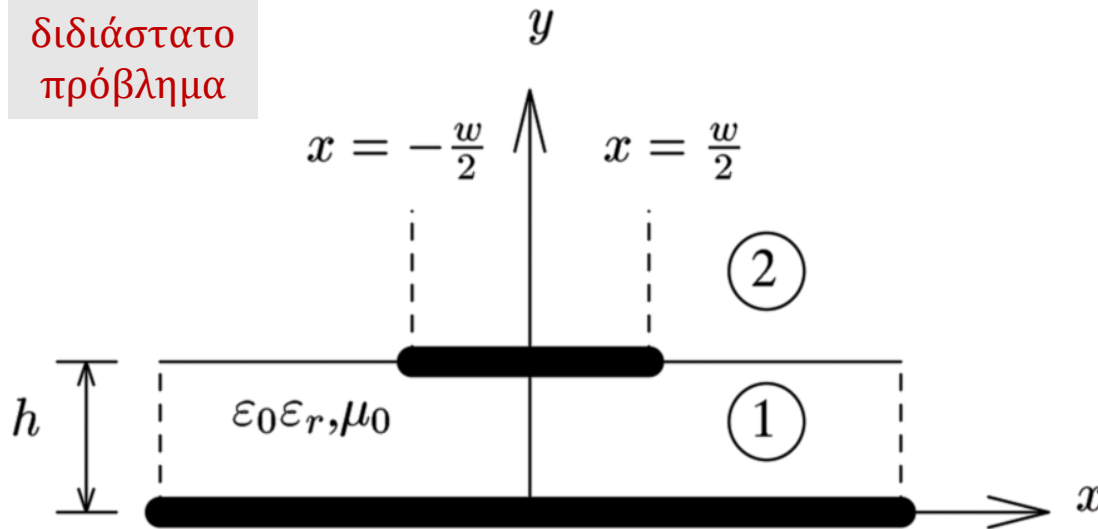


Web Site: <https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=973>
<http://mfol.ece.ntua.gr/computational-techniques-for-information-transmission-systems/>

Το παράδειγμα της μικροταινίας



διδιάστατο πρόβλημα



$$\lambda_0 \ll h$$



TEM (προσεγγιστικά)

$$E_z = H_z = 0$$

✓ στατικές μέθοδοι ανάλυσης

αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους

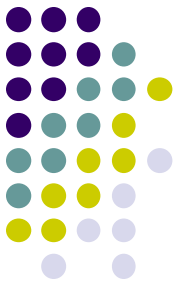
• Επίλυση του προβλήματος της ταινιογραμμής

$$\epsilon_r = 1 \quad L_{str} = L \quad v_{str} = c = \frac{1}{\sqrt{LC_{str}}} \Rightarrow L = L_{str} = \frac{1}{c^2 C_{str}}$$

$$Z_0 = \frac{1}{c \sqrt{C_{str} C}} \quad v = c \sqrt{\frac{C_{str}}{C}}$$

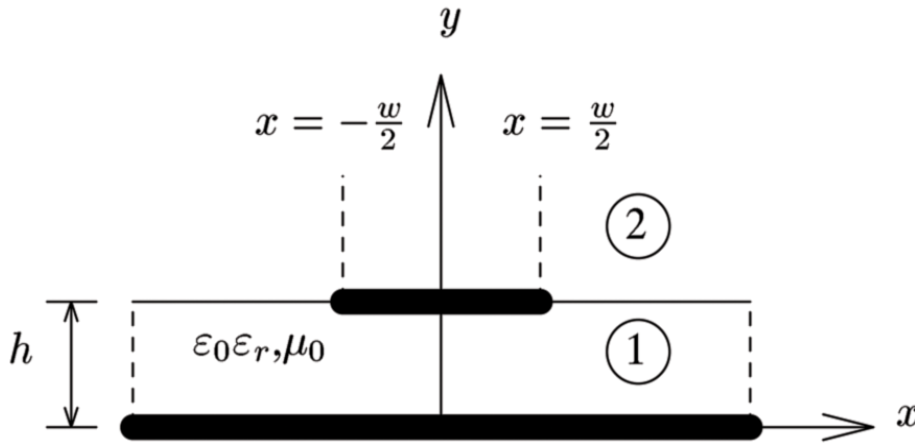
☛ αρκεί ο υπολογισμός της χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους

Κατάστρωση μιας εξίσωσης για τη μικροταινία⁽¹⁾



ηλεκτροστατικό πρόβλημα → εύρεση ηλεκτρικού δυναμικού $u(x, y)$

↪ αξιοποίηση συμμετρίας ως προς y



• Εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

• Οριακές Συνθήκες:

$$u = u_0 = \begin{cases} 0, & y = 0, -\infty < x < +\infty \\ 1, & y = h, |x| < w/2 \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right|_{x=0} = 0$$

για να \exists συμμετρία του u ως προς y πρέπει η κάθετη παράγωγός του να μηδενίζεται πάνω στον y

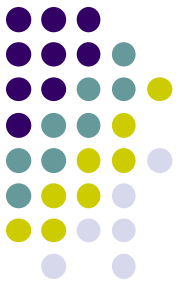
$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k_x, y) e^{jk_x x} dk_x = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} U(k_x, y) \cos(k_x x) dk_x$$

$$\frac{\partial^2 U(k_x, y)}{\partial y^2} - k_x^2 U(k_x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} U(k_x, y) = A \cosh(k_x y) + B \sinh(k_x y) \\ \text{είτε} \\ U(k_x, y) = C e^{-k_x y} + D e^{+k_x y} \end{cases}$$

ΠΕΡΙΟΧΗ 1
 $U_1(k_x, y=0) = 0$
 \Downarrow
 $A = 0$

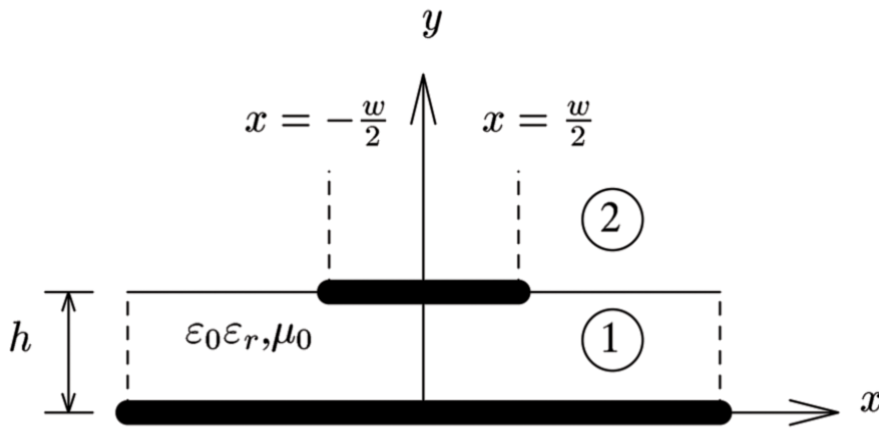
ΠΕΡΙΟΧΗ 2
 $U_2(k_x, y \rightarrow +\infty) \rightarrow 0, k_x > 0$
 \Downarrow
 $D = 0$

Κατάστροψη μιας εξίσωσης για τη μικροταινία⁽²⁾



ΠΕΡΙΟΧΗ 1: $u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} B(k_x) \sinh(k_x y) \cos(k_x x) dk_x$

ΠΕΡΙΟΧΗ 2: $u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} C(k_x) e^{-k_x y} \cos(k_x x) dk_x$



οριακές συνθήκες στη θέση $y = h$:

➤ **συνέχεια u** αλγεβρική σχέση B, C

$$u_1(x, h) = u_2(x, h)$$

➤ **ασυνέχεια D_y**

$$-\varepsilon_0 \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=h} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=h} = \sigma(x)$$

επιφανειακή
πυκνότητα
φορτίου

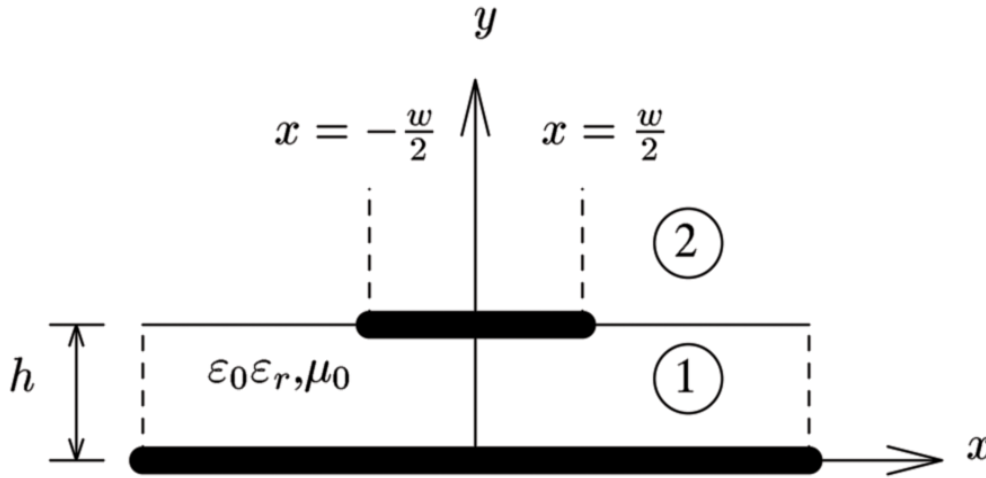
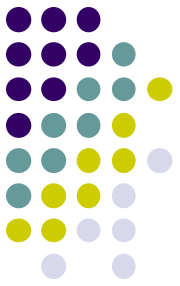
ολοκληρωτική σχέση B, C, σ

➤ **ορθογωνιότητα:** $\int_0^{+\infty} \cos(k_x x) \cos(k'_x x) dx = \frac{\pi}{2} \delta(k_x - k'_x)$

➤ $\sigma(x) = 0$, για $x > w/2$

➤ $u(x, y) = 1$ για $|x| < w/2$ και $y = h$

Κατάστρωση μιας εξίσωσης για τη μικροταινία⁽³⁾



Χωρητικότητα

$$C = 2 \int_0^{\frac{w}{2}} \sigma(x) dx$$

ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\int_0^{\frac{w}{2}} G(x, x') \sigma(x') dx' = \mathbf{1} \quad \text{«διέγερση»}, \quad 0 < x < \frac{w}{2}$$

$$\text{με: } G(x, x') = \frac{2}{\pi \epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(k_x x) \cos(k_x x')}{k_x (\epsilon_r \coth(k_x h) + 1)} dk_x$$

Επίλυση της εξίσωσης της μικροταινίας



$$\int_0^{\frac{w}{2}} G(x, x') \sigma(x') dx' = 1, \quad 0 < x < \frac{w}{2}$$

άγνωστοι
συντελεστές

➤ ανάπτυξη σε άθροισμα γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων: $\sigma(x') \cong \sum_{j=1}^N a_j f_j(x')$

➤ διαδικασία δοκιμής (testing): $\int_0^{\frac{w}{2}} f_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N$

❖ ίδιες συναρτήσεις βάσης και συναρτήσεις δοκιμής → μέθοδος Galerkin

παραδείγματα:
 $f_j(x') = e^{L_j x'}$

➤ μετατροπή της ολοκληρωτικής εξίσωσης σε σύστημα γραμμικών εξισώσεων τάξης N:

$$\sum_{j=1}^N S_{ij} a_j = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

με $S_{ij} = \int_0^{\frac{w}{2}} \int_0^{\frac{w}{2}} f_i(x) G(x, x') f_j(x') dx' dx, \quad R_i = \int_0^{\frac{w}{2}} f_i(x) dx$

χωρητικότητα $C = 2 \int_0^{\frac{w}{2}} \sigma(x) dx = 2 \int_0^{\frac{w}{2}} \sum_{i=1}^N a_i f_i(x) dx = 2 \sum_{i=1}^N a_i \int_0^{\frac{w}{2}} f_i(x) dx = 2 \sum_{i=1}^N a_i R_i$

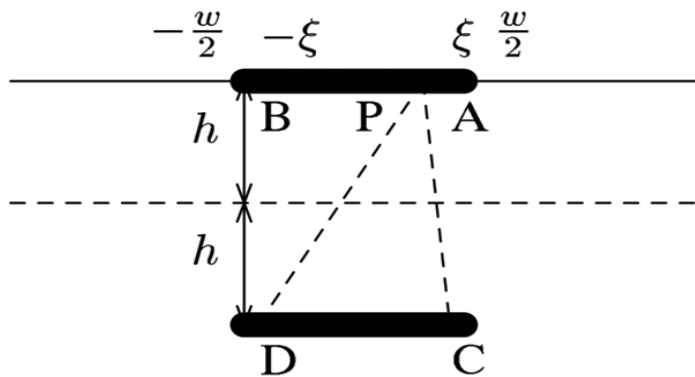
Μια εναλλακτική προσέγγιση στο πρόβλημα της μικροταινίας



➤ αρχή ελαχίστης δυναμικής ενέργειας

$$W = \frac{1}{2} \iiint u(P)q(P)d\Omega_P \rightarrow W = \frac{1}{2} \iint u(P)\sigma(P)dS_P$$

✓ κατανομή πυκνότητας φορτίου ώστε να ελαχιστοποιείται η ηλεκτροστατική ενέργεια W



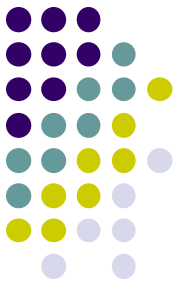
$$PA = |x - \xi| \quad PC = \sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}$$

$$PB = |x + \xi| \quad PD = \sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}$$

$$u(x) = - \int_0^{\frac{w}{2}} \frac{\sigma(\xi)}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{|x - \xi|}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}} \frac{|x + \xi|}{\sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}} \right) d\xi$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\frac{w}{2}} \int_0^{\frac{w}{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}}{|x - \xi|} \frac{\sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}}{|x + \xi|} \right) \sigma(\xi)\sigma(\xi')d\xi'd\xi$$

Μεταβολική κατάστρωση



➤ ελαχιστοποίηση ενέργειας (ακρότατο της W)

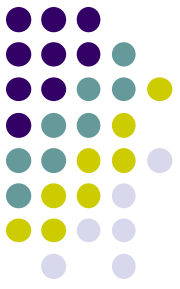
➤ οριακές συνθήκες: $u = u_0$, $-\frac{w}{2} \leq x \leq +\frac{w}{2}$, $y = h$

$$F(\sigma) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\frac{w}{2}} \int_0^{\frac{w}{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|} \right) \sigma(\xi) \sigma(\xi') d\xi' d\xi - \int_0^{\frac{w}{2}} u_0 \sigma(\xi) d\xi$$

✓ συνθήκη στασιμότητας: $\delta F(\sigma) = 0$ μηδενική 1^η μεταβολή συναρτησιακού

✓ ακρότατο (ελάχιστο): $\delta^2 F(\sigma) > 0$

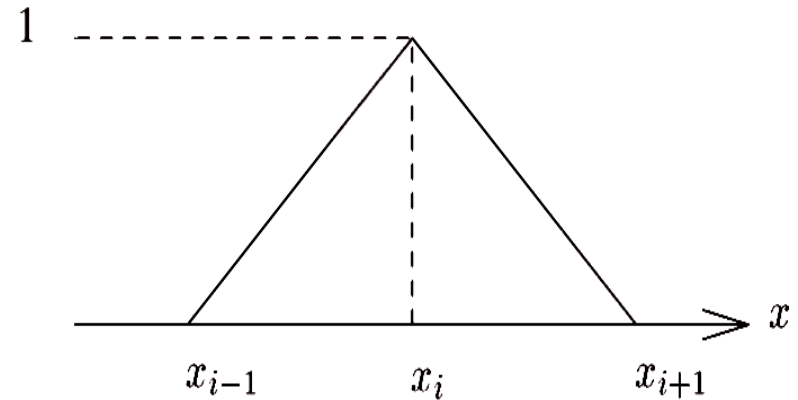
Διακριτοποίηση με γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής⁽¹⁾



$$\sigma(\xi) \cong \sum_{k=1}^M \sigma_k t_k(\xi)$$

← άγνωστοι συντελεστές
← συναρτήσεις βάσης

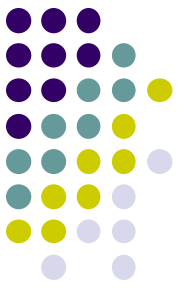
$$t_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x < x_{i-1}, x > x_{i+1} \end{cases}$$



$$F(\sigma) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sigma_k \sigma_j \int_0^{\frac{w}{2}} \int_0^{\frac{w}{2}} \ln \left[\frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}}{|x - \xi|} \frac{\sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}}{|x + \xi|} \right] t_k(\xi) t_j(\xi') d\xi' d\xi$$

$$- \sum_{k=1}^M \sigma_k \int_0^{\frac{w}{2}} u_0 t_k(\xi) d\xi$$

Διακριτοποίηση με γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής⁽²⁾



$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} = 0, \quad k = 1, \dots, M \quad \rightarrow \quad \underbrace{[S] \cdot \vec{\sigma} = \vec{V}}_{\text{σύστημα γραμμικών εξισώσεων}}$$

με

$$S_{jk} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\frac{w}{2}} \int_0^{\frac{w}{2}} \ln \left[\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|} \right] t_k(\xi) t_j(\xi') d\xi' d\xi$$

και $V_k = \int_0^{\frac{w}{2}} \boxed{u_0} t_k(\xi) d\xi$ διέγερση

χωρητικότητα ($u_0 = 1$) $C = 2 \int_0^{\frac{w}{2}} \sigma(x) dx$ με $\sigma(\xi) \cong \sum_{k=1}^M \sigma_k t_k(\xi)$