ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

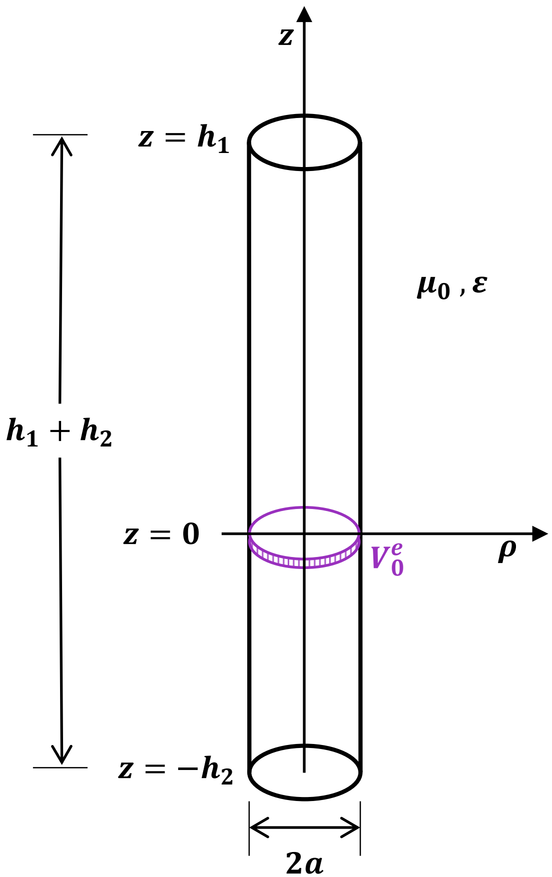
Μοντελοποίηση κυλινδρικής κεραίας

Μέθοδος Ροπών - Αριθμητική ολοκλήρωση

Τεχνικές επίλυσης γραμμικών συστημάτων

Web Site: http://mfol.ece.ntua.gr/computational-techniques-for-information-transmission-systems/
http://mycourses.ntua.gr/course_description/index.php?cidReq=ECE1196

Μοντελοποίηση Κυλινδρικής Κεραίας$^{(1)}$



Θεώρημα Ισοδυναμίας Schelkunoff

- αντικατάσταση αγώγιμου κυλίνδρου **και** περιβάλλοντος μέσου από ηλεκτρικά και μαγνητικά ρεύματα στην επιφάνειά του S

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_s \qquad \vec{M}_s = \vec{E}_s \times \hat{n}$$

- ✓ μηδενικά μαγνητικά ρεύματα πάνω σε τέλειο αγωγό
- ✓ μηδενικό συνολικό πεδίο στο εσωτερικό της κεραίας

Αντίδραση (Reaction)

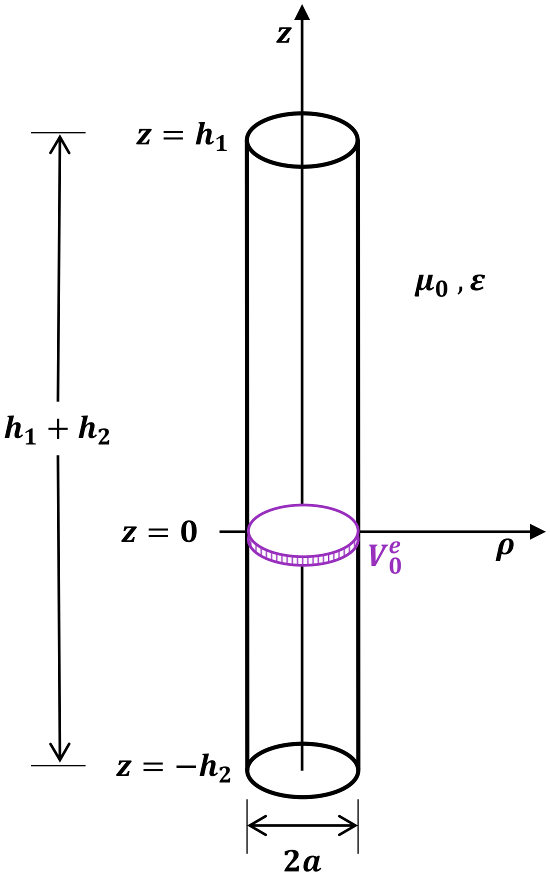
$$\langle a, b \rangle = \iiint_{V_b} \left(\vec{E}_a \cdot \vec{J}_b - \vec{H}_a \cdot \vec{M}_b \right) dV$$

- **προσεγγίσεις** των **άγνωστων** κατανομών $\vec{J}_s$ και $\vec{M}_s$ τέτοιες ώστε οι **αντιδράσεις** τους σε καθορισμένες πηγές **δοκιμής** $\vec{J}_t$ να είναι οι «**σωστές**»

Θεώρημα Αμοιβαιότητας

$$\langle t, s \rangle = \langle s, t \rangle \xRightarrow[\vec{M}_t = 0]{} \iint_S \left(\vec{E}_t \cdot \vec{J}_s - \vec{H}_t \cdot \vec{M}_s \right) dS = \iint_S \vec{E}_s \cdot \vec{J}_t \, dS$$

Μοντελοποίηση Κυλινδρικής Κεραίας$^{(2)}$



$$\iint_S \left(\vec{E}_t \cdot \vec{J}_s - \cancel{\vec{H}_t \cdot \vec{M}_s}\right) dS = \underbrace{\iint_S \vec{E}_s \cdot \vec{J}_t dS}_{\substack{\text{μη μηδενικό μόνον για } z = 0 \\ \text{(απειροστό διάκενο διέγερσης)}}}$$

- **τέλεια αγώγιμη κεραία** ⇨ μηδενικό εφαπτομενικό $\vec{E}_s$ στην S
  - ✓ μηδενικά μαγνητικά ρεύματα $\vec{M}_s$
  - ✓ αναλυτικός υπολογισμός του δεξιού σκέλους
- προσεγγίσεις λεπτού σύρματος (**thin wire approximations**)
  $\alpha \ll (h_1 + h_2)$ και $\alpha \ll \lambda$
  - ✓ αμελητέα ολοκληρώματα στις βάσεις του κυλίνδρου

    $\vec{J}_s = J_z(z, \cancel{\varphi})\hat{z} + \cancel{J_\varphi(z,\varphi)\hat{\varphi}} \Rightarrow \vec{J}_s = J_z(z)\hat{z} \Rightarrow I(z)$
  - ✓ αμελητέα περιφερειακή συνιστώσα J_φ
  - ✓ αμελητέα εξάρτηση της αξονικής συνιστώσας J_z από την φ

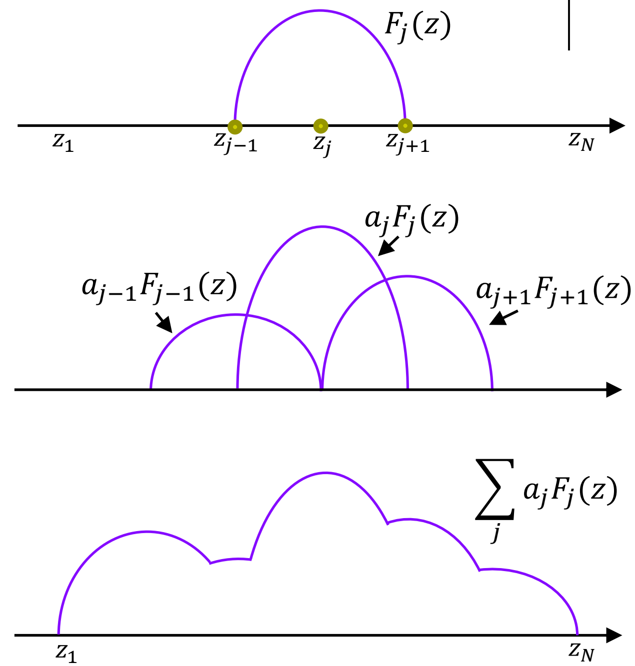
$$\frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{e^{-jkR}}{R} I_t(z') d\varphi' dz' \right) I_s(z) d\varphi dz = V_0^e I_t(0)$$

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)}$$

Επίλυση με τη Μέθοδο Ροπών[1]

$$\frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2}\int_{-h_2}^{h_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-h_2}^{h_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{e^{-jkR}}{R}I_t(z')d\varphi' dz'\right)I_s(z)d\varphi dz = V_0^e I_t(0)$$

$$I_s(z) = \sum_{n=1}^{N} A_n F_n(z)$$



$$F_n(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big(k(z-z_{n-1})\big)}{\sin(k\Delta z)}, & z_{n-1}\le z\le z_n \\ \dfrac{\sin\big(k(z_{n+1}-z)\big)}{\sin(k\Delta z)}, & z_n\le z\le z_{n+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{N} Z_{mn}A_n = V_m\,, \qquad m=1,2,\cdots,N \qquad V_m = \begin{cases} V_0^e F_m(0)\,, & z_{m-1}\le z\le z_{m+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2}\int_{-h_2}^{h_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-h_2}^{h_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{e^{-jkR}}{R}F_m(z')d\varphi' dz'\right)F_n(z)d\varphi dz$$

Επίλυση με τη Μέθοδο Ροπών$^{(2)}$

- **πίνακας Toeplitz (μέθοδος Levinson O(N^2) πολυπλοκότητα)**
- $\boldsymbol{F_m}$, $\boldsymbol{F_n}$ **μη μηδενικές στα** $[z_{m-1}, z_{m+1}]$, $[z_{n-1}, z_{n+1}]$
- **κυλινδρική συμμετρία του πεδίου**
- **παραγοντικές ολοκληρώσεις**

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k sin^2(k\Delta z)} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}} + \frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} - 2cos(k\Delta z) \frac{e^{-jkR_n}}{R_n} \right) sin\big(k(\Delta z - |z' - z_m|)\big) d\varphi' dz'$$

- ***αριθμητική ολοκλήρωση***
- ***ιδιομορφίες της ολοκληρωτέας για*** $\varphi' = \varphi$, $z' = z_{n+1}, z_{n-1}, z_n$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

$$I = \int_a^b f(x)dx \longrightarrow \sum_{i=1}^{N} a_i f(x_i)$$

χρήση πολυωνύμων παρεμβολής

- ***ομοιόμορφη*** *υποδιαίρεση του διαστήματος ολοκλήρωσης*

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$f(x) \longrightarrow P_n(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) L_i(x)$$

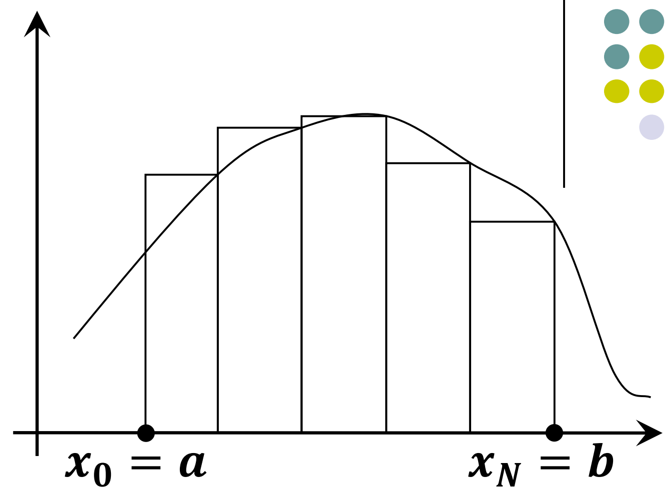
$$I = \int_a^b \sum_{i=1}^{N} f(x_i) L_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} a_i f(x_i)$$

όπου $a_i = \int_a^b L_i(x) dx\,, \qquad \forall\, i = 1, 2, \cdots, N$

Κανόνας του Euler ή Ορθογωνικός Κανόνας

πολυώνυμο μηδενικής τάξης $L_i = 1$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$



Κανόνας του τραπεζίου

πολυώνυμο πρώτης τάξης

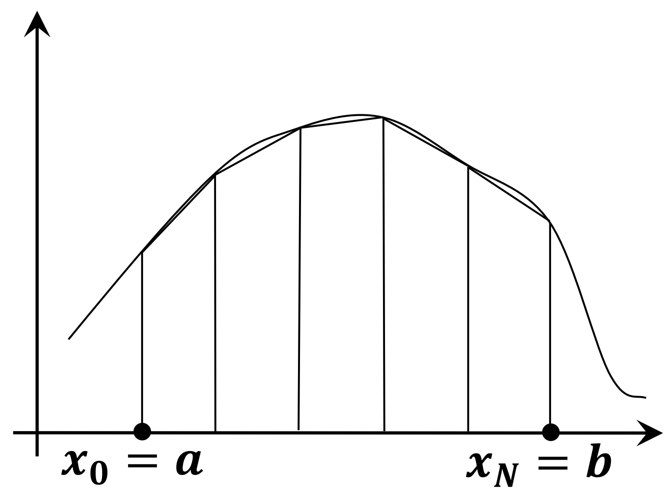
$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

απλός κανόνας

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong \frac{x_1-x_0}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

σύνθετος κανόνας

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$$



Κανόνας του Simpson

πολυώνυμο δεύτερης τάξης

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

τρία σημεία → τμήμα παραβολής

απλός κανόνας $$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{x_2-x_0}{3}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)]$$

σύνθετος κανόνας **για $2m$ υποδιαιρέσεις**

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6m}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + f(b)\right]$$

Ολοκλήρωση Romberg

✓ **δυνατότητα** **επαναχρησιμοποίησης**

- **αρχική εκτίμηση με σύνθετο κανόνα τραπεζίου**

ομοιόμορφο μήκος διαμέρισης

$$I_{n,1} \cong h \sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih) + \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$N = 2^{n-1}$$

πλήθος ισοκατανεμημένων σημείων

- **βελτίωση με επέκταση (extrapolation) Richardson**

$$I_{n+1,1} \cong \frac{1}{2} I_{n,1} + h' \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + [2i-1]h')$$

$$h' = \frac{b-a}{2^n}$$

νέο μήκος διαμέρισης

Γκαουσιανή Ολοκλήρωση

$$I \cong \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

➢ ***ανομοιόμορφη*** *υποδιαίρεση του διαστήματος ολοκλήρωσης*

➢ **κοινή πρακτική**: βάρη $\boldsymbol{w_i}$ και σημεία $\boldsymbol{x_i}$ ώστε οι λαμβανόμενες προσεγγίσεις να είναι ακριβείς για **πολυώνυμα μέχρι βαθμού p**

<u>Παράδειγμα:</u> $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ $\quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma$

δύο δείγματα $x_{-1}\,, x_1$: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_{-1} f(x_{-1}) + w_1 f(x_1)$

συμμετρία στα βάρη και τα σημεία:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(-x_1) + w_1 f(x_1) = 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma$$

$\rightarrow w_{-1} = w_1 = 1$

$\rightarrow x_{-1} = -x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

❖ **Κανόνες Gauss – Kronrod**
(n → 2n+1)

❖ **Γκαουσιανή Ολοκλήρωση για Τρίγωνα**
(πολυδιάστατα ολοκληρώματα)

Τεχνικές Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων(1)

- **απευθείας (direct)**

  (Απαλοιφή Gauss, Αποσύνθεση LU, Choleski)

- **επαναληπτικές (iterative)**

  - **στάσιμες**

    (Jacobi, Gauss – Seidel, Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης, Συμμετρικής Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης)

  - **μη στάσιμες**

    (Conjugate Gradient, Minimal Residual, Conjugate Gradient on the Normal Equations, Generalized Minimal Residual, BiConjugate Gradient, Quasi-Minimal Residual, Conjugate Gradient Squared, BiConjugate Gradient Stabilized)

Τεχνικές Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων(2)

➢ **πυκνά συστήματα**

- **MoM, MAS**
- συνήθως μικρότερης τάξης έναντι των αραιών
- δαπανηρός ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα και όχι τόσο η επίλυση του συστήματος

✓ προτιμητέες οι **απευθείας** τεχνικές επίλυσης έναντι των επαναληπτικών

γιατί;

➢ **αραιά συστήματα**

- **FEM**
- συνήθως πολύ μεγαλύτερης τάξης έναντι των πυκνών
- δαπανηρή η επίλυση του συστήματος και όχι τόσο ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα

γιατί;

✓ προτιμητέες οι **επαναληπτικές** τεχνικές επίλυσης

Η Τεχνική Αποσύνθεσης LU

$$[\boldsymbol{A}] \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

κάτω τριγωνικός

παραγοντοποίηση $\boxed{[\boldsymbol{L}]} \cdot \boxed{[\boldsymbol{U}]} = [\boldsymbol{A}]$

άνω τριγωνικός

$$[\boldsymbol{A}] \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = ([\boldsymbol{L}] \cdot [\boldsymbol{U}]) \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{L}] \cdot \underbrace{([\boldsymbol{U}] \cdot \vec{\boldsymbol{x}})}_{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

επίλυση του $[\boldsymbol{L}] \cdot \vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ **με εμπρόσθια αντικατάσταση**

επίλυση του $[\boldsymbol{U}] \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}}$ **με οπίσθια αντικατάσταση**