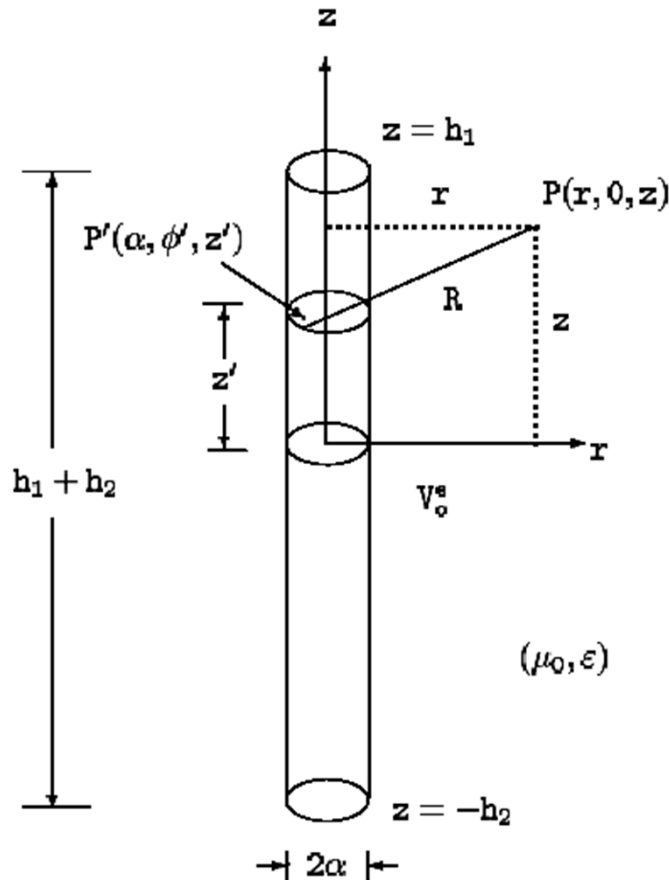


Μοντελοποίηση Κυλινδρικής Κεραίας



Θεώρημα Ισοδυναμίας Schelkunoff

$$\vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H} \quad \vec{M}_S = \vec{E} \times \hat{n}$$

Αντίδραση (Reaction)

$$\langle a, b \rangle = \iiint_{V_b} (\vec{E}_a \cdot \vec{J}_b - \vec{H}_a \cdot \vec{M}_b) dV$$

Θεώρημα Αμοιβαιότητας

$$\iint_S (\vec{E}_t \cdot \vec{J}_S - \vec{H}_t \cdot \vec{M}_S) dS = \iint_S \vec{E}_S \cdot \vec{J}_t dS$$

$$\frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} I_t(z') d\phi' dz' \right) I_s(z) d\phi dz = V_0^e I_t(0)$$

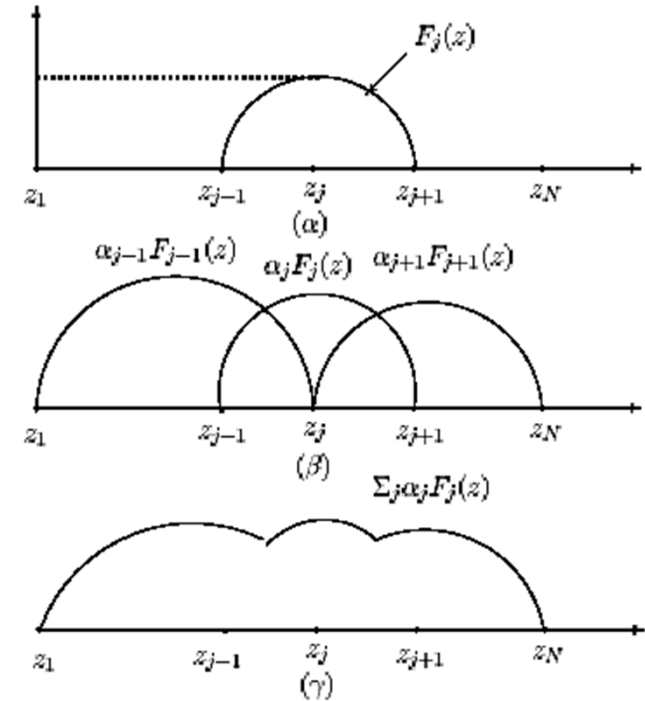
$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2 \left(\frac{\phi - \phi'}{2} \right)}$$

Επίλυση με τη Μέθοδο Ροπών⁽¹⁾

$$\frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} I_t(z') d\phi' dz' \right) I_s(z) d\phi dz = V_0^e I_t(0)$$

$$I_s(z) = \sum_{n=1}^N A_n F_n(z)$$

$$F_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin(k(z - z_{n-1}))}{\sin(k\Delta z)}, & z_{n-1} \leq z \leq z_n \\ \frac{\sin(k(z_{n+1} - z))}{\sin(k\Delta z)}, & z_n \leq z \leq z_{n+1} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} A_n = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

$$V_m = \begin{cases} V_0^e F_m(0), & z_{m-1} \leq 0 \leq z_{m+1} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} F_m(z') d\phi' dz' \right) F_n(z) d\phi dz$$

Επίλυση με τη Μέθοδο Ροπών⁽²⁾

- πίνακας Toeplitz (μέθοδος Levinson $O(N^2)$ πολυπλοκότητα)
- F_m, F_n μη μηδενικές στα $[z_{m-1}, z_{m+1}], [z_{n-1}, z_{n+1}]$
- κυλινδρική συμμετρία του πεδίου

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k \sin^2(k\Delta z)} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}} + \frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} - 2\cos(k\Delta z) \frac{e^{-jkR_n}}{R_n} \right) \cdot \sin(k(\Delta z - |z' - z_m|)) d\phi' dz$$

➤ Ιδιομορφίες για $\phi' = \phi, z' = z_{n+1}, z_{n-1}, z_n$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

$$I = \int_a^b f(x)dx \longrightarrow \sum_{i=1}^N a_i f(x_i)$$

χρήση πολυωνύμων παρεμβολής

$$f(x) \longrightarrow P_n(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x)$$

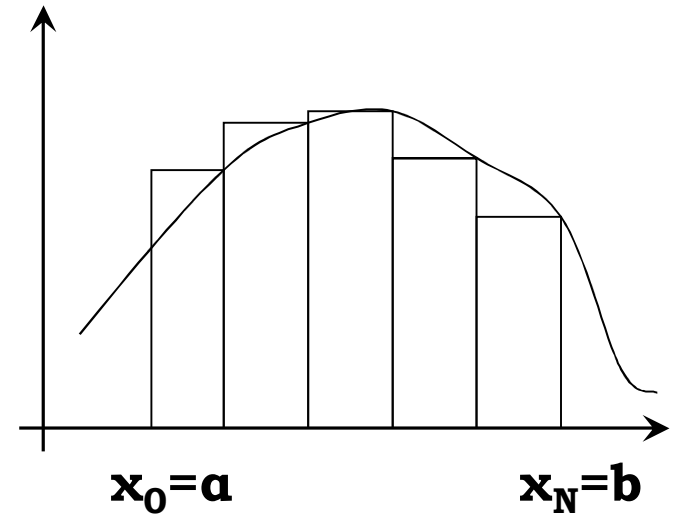
$$I = \int_a^b \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=1}^N a_i f(x_i)$$

όπου
$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, N$$

Κανόνας του Euler ή Ορθογωνικός Κανόνας

Πολυώνυμο μηδενικής τάξης $L_i(x) = 1$

$$I = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

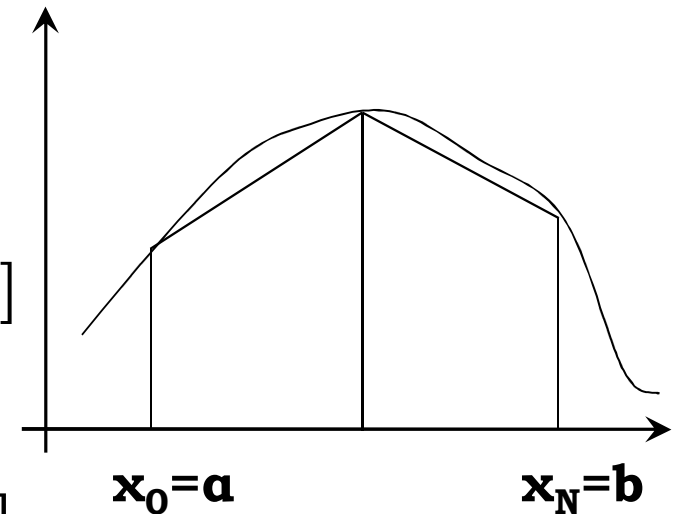


Κανόνας του τραπεζίου

Πολυώνυμο πρώτης τάξης

$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1)$$

Απλός κανόνας $\int_a^b f(x) dx \cong \frac{x_1-x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$



Σύνθετος κανόνας

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(a+ih) + \frac{h}{2} [f(a) + f(b)]$$

Κανόνας του Simpson

Πολυώνυμο δεύτερης τάξης (3 σημεία)

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

απλός κανόνας $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{x_2 - x_0}{3} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)]$

σύνθετος κανόνας $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6m} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(b) \right]$

Ολοκλήρωση Romberg

- αρχική εκτίμηση με σύνθετο κανόνα τραπεζίου**

$$I_{n,1} \cong h \sum_{i=1}^N f(a+ih) + \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] \quad h = \frac{b-a}{N} \quad N = 2^{n-1}$$

- βελτίωση με επέκταση (extrapolation) Richardson**

$$I_{n+1,1} \cong \frac{1}{2} I_{n,1} + h' \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + [2i-1]h') \quad h' = \frac{b-a}{2^n}$$

Γκαουσιανή Ολοκλήρωση

$$I \cong \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

➤ επιλέγουμε βάρη w_i και σημεία x_i ώστε οι λαμβανόμενες προσεγγίσεις να είναι ακριβείς για πολυώνυμα μέχρι βαθμού p

Παράδειγμα: $f(x) = a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$

$-1 < x < 1$, συμμετρία στα βάρη & τα σημεία

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_{-1} f(x_{-1}) + w_1 f(x_1) = w_1 f(-x_1) + w_1 f(x_1) \begin{cases} \rightarrow w_{-1} = w_1 = 1 \\ \rightarrow x_{-1} = -x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

❖ Κανόνες Gauss – Kronrod ($n \rightarrow 2n+1$)

❖ Γκαουσιανή Ολοκλήρωση για Τρίγωνα
(πολυδιάστατα ολοκληρώματα)

Τεχνικές Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων

➤ Απευθείας (Απαλοιφή Gauss, Αποσύνθεση LU, Choleski)

➤ Επαναληπτικές

- Στάσιμες (Jacobi, Gauss – Seidel, Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης, Συμμετρικής Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης)
- Μη στάσιμες (Conjugate Gradient, Minimal Residual, Conjugate Gradient on the Normal Equations, Generalized Minimal Residual, BiConjugate Gradient, Quasi-Minimal Residual, Conjugate Gradient Squared, BiConjugate Gradient Stabilized)

Η Τεχνική Αποσύνθεσης LU

$$[A] \cdot [x] = [b] \quad , \quad [L] \cdot [U] = [A]$$

$$[A] \cdot [x] = ([L] \cdot [U]) \cdot [x] = [L] \cdot \underbrace{([U] \cdot [x])}_y = [b]$$

Επίλυση του $[L] \cdot [y] = [b]$

Επίλυση του $[U] \cdot [x] = [y]$