ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

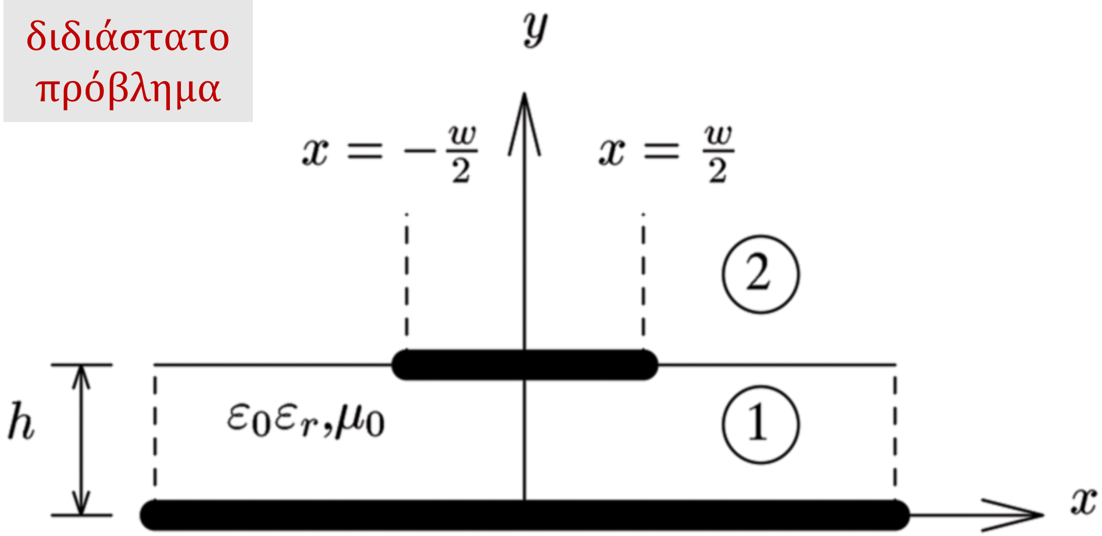
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Επίλυση μικροταινιακής γραμμής μεταφοράς
Μέθοδος Galerkin

Web Site: https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=973
http://mfol.ece.ntua.gr/computational-techniques-for-information-transmission-systems/

Το παράδειγμα της μικροταινίας

διδιάστατο πρόβλημα



$\lambda_0 \ll h$

↓

TEM (προσεγγιστικά)

$$E_z = H_z = 0$$

✓ **στατικές μέθοδοι ανάλυσης**

αυτεπαγωγή *ανά μονάδα μήκους*

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

χωρητικότητα *ανά μονάδα μήκους*

- **Επίλυση του προβλήματος της ταινιογραμμής**

$$\varepsilon_r = 1 \qquad L_{str} = L \qquad v_{str} = c = \frac{1}{\sqrt{LC_{str}}} \quad \Rightarrow \quad L = L_{str} = \frac{1}{c^2 C_{str}}$$

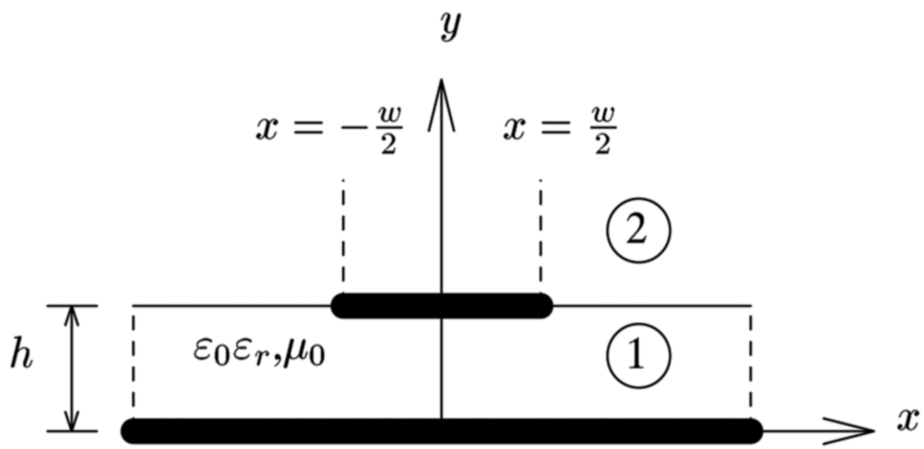
$$Z_0 = \frac{1}{c\sqrt{C_{str}C}} \qquad v = c\sqrt{\frac{C_{str}}{C}}$$

☛ αρκεί ο υπολογισμός της **χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους**

Κατάστρωση μιας εξίσωσης για τη μικροταινία[1]

ηλεκτροστατικό πρόβλημα $\rightarrow$ εύρεση ηλεκτρικού δυναμικού $u(x,y)$

☛ **αξιοποίηση συμμετρίας ως προς y**



- **Εξίσωση Laplace:**

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

- **Οριακές Συνθήκες:**

$$u = u_0 = \begin{cases} 0, & y = 0, -\infty < x < +\infty \\ 1, & y = h, \ |x| < w/2 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\right|_{x=0} = 0$$

για να $\exists$ συμμετρία του u ως προς y πρέπει η κάθετη παράγωγός του να μηδενίζεται πάνω στον y

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(k_x,y)e^{jk_x x}\,dk_x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} U(k_x,y)\cos(k_x x)\,dk_x$$

$$\frac{\partial^2 U(k_x,y)}{\partial y^2} - k_x^2 U(k_x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} U(k_x,y) = A\cosh(k_x y) + B\sinh(k_x y) \\ \textit{είτε} \\ U(k_x,y) = Ce^{-k_x y} + De^{+k_x y} \end{cases}$$

Περιοχη 1

$$U_1(k_x, y=0) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$A = 0$$

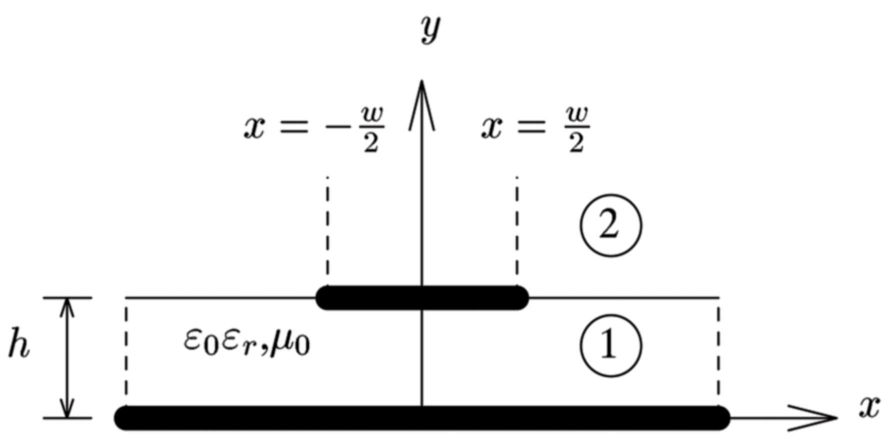
Περιοχη 2

$$U_2(k_x, y \to +\infty) \to 0, k_x > 0$$
$$\Downarrow$$
$$D = 0$$

Κατάστρωση μιας εξίσωσης για τη μικροταινία(2)

Περιοχη 1: $u_1(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} B(k_x)\sinh(k_x y)\cos(k_x x)\,dk_x$

Περιοχη 2: $u_2(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} C(k_x)e^{-k_x y}\cos(k_x x)\,dk_x$



οριακές συνθήκες στη θέση $y = h$:

- **συνέχεια u**

  αλγεβρική σχέση B, C

  $$u_1(x,h) = u_2(x,h)$$

- **ασυνέχεια D_y**

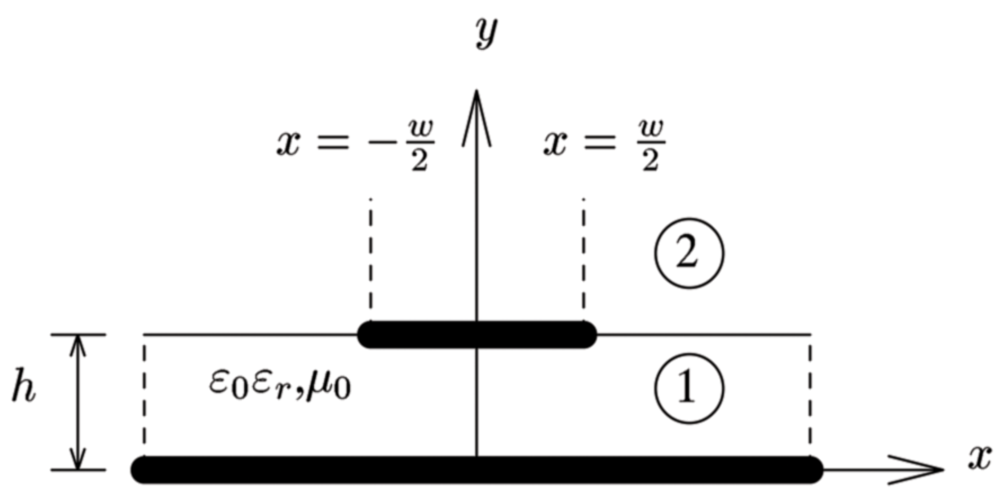
  επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

  $$-\varepsilon_0 \left.\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=h} + \varepsilon_0\varepsilon_r \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=h} = \sigma(x)$$

  ολοκληρωτική σχέση B, C, σ

- **ορθογωνιότητα:** $\int_0^{+\infty} \cos(k_x x)\cos(k_x' x)dx = \frac{\pi}{2}\delta(k_x - k_x')$
- $\sigma(x) = 0$, για $x > w/2$
- $\boxed{u(x,y) = 1}$ για $|x| < w/2$ και $y = h$

Κατάστρωση μιας εξίσωσης για τη μικροταινία[3]



Χωρητικότητα

$$C = 2\int_0^{\frac{w}{2}} \sigma(x)dx$$

ολοκληρωτική εξίσωση:

«διέγερση»

$$\int_0^{\frac{w}{2}} G(x,x')\sigma(x')dx' = \boxed{1} \quad , \qquad 0 < x < \frac{w}{2}$$

με: $$G(x,x') = \frac{2}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(k_x x)\cos(k_x x')}{k_x(\varepsilon_r \coth(k_x h) + 1)} dk_x$$

Επίλυση της εξίσωσης της μικροταινίας

$$\int_0^{\frac{w}{2}} G(x,x')\sigma(x')dx' = 1 \quad , \quad 0 < x < \frac{w}{2}$$

άγνωστοι συντελεστές

- **ανάπτυξη σε άθροισμα γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων:** $\sigma(x') \cong \sum_{j=1}^{N} \boxed{a_j}\, \boxed{f_j(x')}$

συναρτήσεις βάσης

παράδειγμα: $f_j(x') = e^{L_j x'}$

συναρτήσεις δοκιμής

- **διαδικασία δοκιμής (testing):** $\int_0^{\frac{w}{2}} \boxed{f_i(x)}\, dx \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$
  - *ίδιες συναρτήσεις βάσης και συναρτήσεις δοκιμής* → *μέθοδος Galerkin*

- **μετατροπή της ολοκληρωτικής εξίσωσης σε σύστημα γραμμικών εξισώσεων τάξης *N*:**

$$\sum_{j=1}^{N} S_{ij} a_j = R_i \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

με $\quad S_{ij} = \int_0^{\frac{w}{2}} \int_0^{\frac{w}{2}} f_i(x) G(x,x') f_j(x') dx' dx \;, \qquad R_i = \int_0^{\frac{w}{2}} f_i(x) dx$

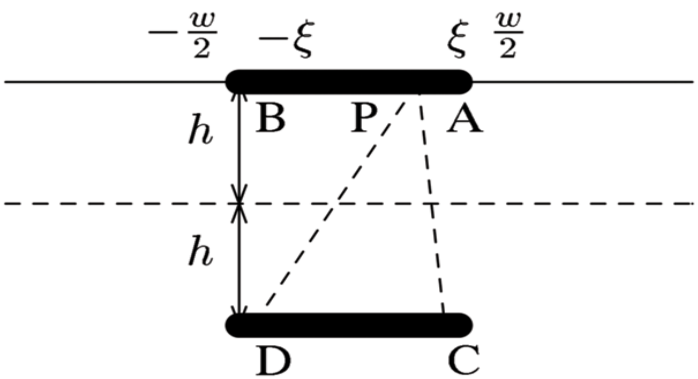
χωρητικότητα $\boxed{C = 2\int_0^{\frac{w}{2}} \sigma(x)dx} = 2\int_0^{\frac{w}{2}} \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(x) dx = 2\sum_{i=1}^{N} a_i \int_0^{\frac{w}{2}} f_i(x) dx = 2\sum_{i=1}^{N} a_i R_i$

Μια εναλλακτική προσέγγιση στο πρόβλημα της μικροταινίας

- **αρχή ελαχίστης δυναμικής ενέργειας**

$$W = \frac{1}{2}\iiint u(P)q(P)d\Omega_P \rightarrow W = \frac{1}{2}\iint u(P)\sigma(P)dS_P$$

✓ *κατανομή πυκνότητας φορτίου ώστε να ελαχιστοποιείται η ηλεκτροστατική ενέργεια W*



$$PA = |x - \xi| \qquad PC = \sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}$$

$$PB = |x + \xi| \qquad PD = \sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}$$

$$u(x) = -\int_0^{\frac{w}{2}} \frac{\sigma(\xi)}{2\pi\varepsilon} ln\left(\frac{|x-\xi|}{\sqrt{(x-\xi)^2+(2h)^2}} \frac{|x+\xi|}{\sqrt{(x+\xi)^2+(2h)^2}}\right) d\xi$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{\frac{w}{2}}\int_0^{\frac{w}{2}} ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(2h)^2}}{|x-\xi|}\frac{\sqrt{(x+\xi)^2+(2h)^2}}{|x+\xi|}\right)\sigma(\xi)\sigma(\xi')d\xi' d\xi$$

Μεταβολική κατάστρωση

- **ελαχιστοποίηση ενέργειας (ακρότατο της *W*)**

- **οριακές συνθήκες :** $u = u_0\,, \qquad -\frac{w}{2} \le x \le +\frac{w}{2}\,, y = h$

$$F(\sigma) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{\frac{w}{2}}\int_0^{\frac{w}{2}} ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(2h)^2}}{|x-\xi|}\frac{\sqrt{(x+\xi)^2+(2h)^2}}{|x+\xi|}\right)\sigma(\xi)\sigma(\xi')d\xi' d\xi - \int_0^{\frac{w}{2}} u_0\sigma(\xi)d\xi$$

- ✓ **συνθήκη στασιμότητας :** $\delta F(\sigma) = 0$ *μηδενική 1η μεταβολή συναρτησιακού*

- ✓ **ακρότατο (ελάχιστο):** $\delta^2 F(\sigma) > 0$

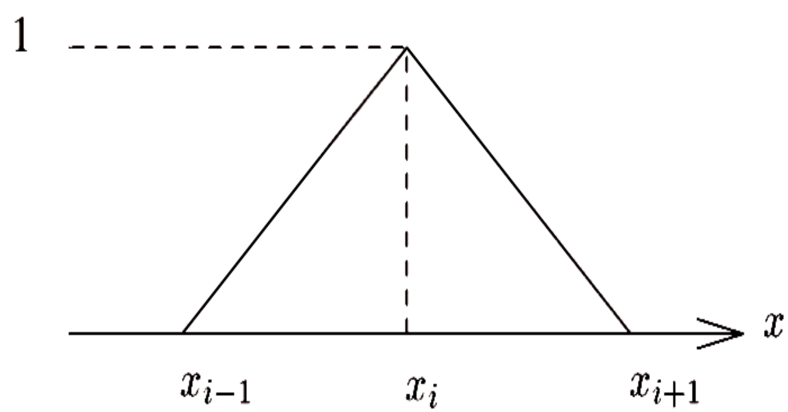
Διακριτοποίηση
με γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής[1]

άγνωστοι συντελεστές

$$\sigma(\xi) \cong \sum_{k=1}^{M} \boxed{\sigma_k}\, \boxed{t_k(\xi)}$$

συναρτήσεις βάσης

$$t_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\[2ex] \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\[2ex] 0, & x < x_{i-1}\ , x > x_{i+1} \end{cases}$$



$$F(\sigma) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \sigma_k \sigma_j \int_0^{\frac{w}{2}} \int_0^{\frac{w}{2}} ln\left[\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|} \right] t_k(\xi) t_j(\xi') d\xi' d\xi$$

$$- \sum_{k=1}^{M} \sigma_k \int_0^{\frac{w}{2}} u_0 t_k(\xi) d\xi$$

Διακριτοποίηση
με γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής[2]

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} = 0, \qquad k = 1, \cdots, M \qquad \longrightarrow \qquad \underbrace{[S] \cdot \vec{\sigma} = \vec{V}}_{\textit{σύστημα γραμμικών εξισώσεων}}$$

με

$$S_{jk} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\frac{w}{2}} \int_0^{\frac{w}{2}} ln \left[\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|} \right] t_k(\xi) t_j(\xi') d\xi' d\xi$$

και $$V_k = \int_0^{\frac{w}{2}} \boxed{u_0} t_k(\xi) d\xi$$

διέγερση

χωρητικότητα $(u_0 = 1)$ $$\boxed{C = 2\int_0^{\frac{w}{2}} \sigma(x) dx}$$ με $$\sigma(\xi) \cong \sum_{k=1}^{M} \sigma_k \; t_k(\xi)$$