

Υπολογιστική Προσομοίωση (Μοντελοποίηση- Πιστοποίηση-Οπτικοποίηση) 2D Προβλήματος Σκέδασης

Σε τέλεια αγώγιμο κύλινδρο άπειρου μήκους και κυκλικής διατομής ακτίνας $a = 0.6\lambda$, ο οποίος βρίσκεται στον ελεύθερο χώρο, με τον άξονά του παράλληλο στον z-άξονα καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων xyz , προσπίπτει χρονικά αρμονικό πολωμένο στην z-κατεύθυνση επίπεδο κύμα, το οποίο έχει μοναδιαίο πλάτος και διαδίδεται κατά την +x-κατεύθυνση (έστω $e^{+j\omega t}$ χρονική εξάρτηση). Να λύσετε το διδιάστατο πρόβλημα σκέδασης με εφαρμογή της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών (MAS), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Ορισμός της γεωμετρίας του σκεδαστή και του ισοδύναμου MAS μοντέλου:** Να χρησιμοποιήσετε βοηθητική επιφάνεια σύμμορφη προς την επιφάνεια του σκεδαστή (δηλ. ομόκεντρο κύλινδρο κυκλικής διατομής) και τον ίδιο αριθμό βοηθητικών πηγών (ASs) και σημείων ελέγχου (CPs), ομοιόμορφα κατανομημένων στη βοηθητική επιφάνεια και στην επιφάνεια του σκεδαστή, αντίστοιχα. Να κάνετε μια πρώτη επιλογή για την ακτίνα της βοηθητικής επιφάνειας και για τον αριθμό ASs/CPs. Να διαβάσετε από αρχείο εισόδου την ακτίνα του σκεδαστή και της βοηθητικής επιφάνειας (κανονικοποιημένες ως προς το μήκος κύματος λ) και τον αριθμό των ASs/CPs. Να σχεδιάσετε όλη τη γεωμετρία του ισοδύναμου MAS μοντέλου (ASs, CPs).
- Υπολογισμός των πλατών των βοηθητικών πηγών:** Να λύσετε το κατάλληλο γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Να σχεδιάσετε τα βάρη κατά μήκος της επιφάνειας του σκεδαστή και να τα αποθηκεύσετε.
- Έλεγχος της ικανοποίησης των κατάλληλων οριακών συνθηκών στην επιφάνεια του κυλίνδρου:** Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το σφάλμα οριακής συνθήκης ΔE_{bc} , σε πλήθος σημείων της επιφάνειας του κυλίνδρου *μεγαλύτερο* (κατά προτίμηση πολλαπλάσιο) του αριθμού των CPs. Να ελέγξετε τη σύγκλιση, προσθέτοντας περισσότερες ASs (άρα και περισσότερα CPs) και να επαναλάβετε τα βήματα 1 μέχρι 3. Να ελέγξετε επίσης τη συμπεριφορά του σφάλματος οριακής συνθήκης ΔE_{bc} κατά μήκος της επιφάνειας του κυλίνδρου, όταν μεταβάλετε την ακτίνα της βοηθητικής επιφάνειας. Να δοκιμάσετε «ακραίες» περιπτώσεις και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.
- Υπολογισμός της ενεργού διατομής σκέδασης:** Να εξαγάγετε την έκφραση για το μακρινό (σκεδαζόμενο) ηλεκτρικό πεδίο, χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Hankel για μεγάλα ορίσματα και τις συνήθεις προσεγγίσεις για το πλάτος και τη φάση του μακρινού πεδίου. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την ενεργό διατομή σκέδασης $\sigma_{2D} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(2\pi\rho \frac{|E_z^s|^2}{|E_z^i|^2} \right)$ ως προς την αζιμουθιακή γωνία φ (E_z^i και E_z^s είναι οι z-συνιστώσες του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου, αντίστοιχα). Να ελέγξετε τη σύγκλιση ως προς τον αριθμό των ASs και ως προς την ακτίνα της βοηθητικής επιφάνειας. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά των Figures 11-13 της παραπομπής [1] (κατά προτίμηση να ενσωματώσετε την εξίσωση (11-102) της [1] στους υπολογισμούς και στα διαγράμματά σας).

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε *οποιαδήποτε* γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. Fortran, C, C++, Java) και/ή *οποιοδήποτε* μαθηματικό πακέτο λογισμικού (π.χ. Matlab, MathCAD, Mathematica). Για την οπτικοποίηση μπορείτε να χρησιμοποιήσετε *οποιαδήποτε* βιβλιοθήκη ή γλώσσα περιγραφής γραφικών (π.χ. Java2D, VRML). Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε μέθοδο προσφέρεται από βιβλιοθήκες λογισμικού. Προγραμματιστικά βοηθήματα και βιβλιοθήκες λογισμικού είναι διαθέσιμα στην ιστοσελίδα του μαθήματος (<https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=973> και <http://mfol.ece.ntua.gr/computational-techniques-for-information-transmission-systems/>).

Πρέπει να σημειωθεί πως για την εκπόνηση της επόμενης εργαστηριακής άσκησης απαιτείται η εξαγωγή εκτελέσιμου ή bytecode αρχείου από την παρούσα εργασία. Η απαίτηση αυτή δεν αφορά βαθμολογικά σε καμία περίπτωση την παρούσα εργασία, αλλά επισημαίνεται για τη διευκόλυνση της εκπόνησης της επόμενης άσκησης.

A. SMALL RADIUS APPROXIMATION

As the radius of the cylinder increases, more terms in the infinite series of (11-97) are needed to obtain convergence. However, for very small cylinders, like a very thin wire ($a \ll \lambda$), the first term ($n = 0$) in (11-97) is dominant and is often sufficient to represent the induced current. Thus for a very thin wire (11-97) can be approximated by

$$\mathbf{J}_s \approx \hat{a}_z \frac{2E_0}{\pi a \omega \mu} \frac{1}{H_0^{(2)}(\beta a)} \quad (11-98)$$

where

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(\beta a) &= J_0(\beta a) - jY_0(\beta a) \stackrel{a \ll \lambda}{\approx} 1 - j\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma \beta a}{2}\right) = 1 - j\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1.781\beta a}{2}\right) \\ &\stackrel{a \ll \lambda}{\approx} -j\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1.781\beta a}{2}\right) \end{aligned} \quad (11-98a)$$

Thus for a very thin wire the current density of (11-98) can be approximated by

$$\mathbf{J}_z \approx \hat{a}_z j \frac{E_0}{a \omega \mu} \frac{1}{\ln\left(\frac{1.781\beta a}{2}\right)} \quad (11-98b)$$

B. FAR-ZONE SCATTERED FIELD

One of the most important parameters in scattering is the scattering width which is obtained by knowing the scattered field in the far zone. For this problem this can be accomplished by first reducing the scattered fields for far-zone observation ($\beta\rho \rightarrow$ large). Referring to (11-91), the Hankel function can be approximated for observations made in the far field by

$$H_n^{(2)}(\beta\rho) \stackrel{\beta\rho \rightarrow \text{large}}{\approx} \sqrt{\frac{2j}{\pi\beta\rho}} j^n e^{-j\beta\rho} \quad (11-99)$$

which when substituted in (11-91) reduces it to

$$E_z^s \approx -E_0 \sqrt{\frac{2j}{\pi\beta}} \frac{e^{-j\beta\rho}}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} e^{jn\phi} \quad (11-100)$$

The ratio of the far-zone scattered electric field to the incident field can then be written as

$$\begin{aligned} \frac{|E_z^s|}{|E_z^i|} &\stackrel{\beta\rho \rightarrow \text{large}}{\approx} \frac{\left| -E_0 \sqrt{\frac{2j}{\pi\beta}} \frac{e^{-j\beta\rho}}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} e^{jn\phi} \right|}{|E_0 e^{-j\beta x}|} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} e^{jn\phi} \right| \end{aligned} \quad (11-101)$$

Thus the scattering width of (11-21b) can be expressed as

$$\sigma_{2-D} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[2\pi\rho \frac{|E_z^s|^2}{|E_z^i|^2} \right] = \frac{4}{\beta} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} e^{jn\phi} \right|^2 \tag{11-102}$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} \cos(n\phi) \right|^2$$

where

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases} \tag{11-102a}$$

Plots of the bistatic σ_{2-D}/λ computed using (11-102) are shown in Figure 11-13 for cylinder radii of $a = 0.05\lambda, 0.1\lambda, 0.2\lambda, 0.4,$ and 0.6λ [13]. The backscattered ($\phi = 180^\circ$) patterns of σ_{2-D}/λ as a function of the cylinder radius are displayed in Figure 11-14 [13].

For small radii ($a \ll \lambda$) the first term ($n = 0$) in (11-102) is the dominant term, and it is sufficient to represent the scattered field. Thus for small radii the ratio of the Bessel to the Hankel function for $n = 0$ can be approximated using (11-98a) by

$$\frac{J_0(\beta a)}{H_0^{(2)}(\beta a)} \stackrel{a \ll \lambda}{\approx} \frac{1}{-j\frac{2}{\pi} \ln(0.89\beta a)} = j\frac{\pi}{2} \frac{1}{\ln(0.89\beta a)} \tag{11-103}$$

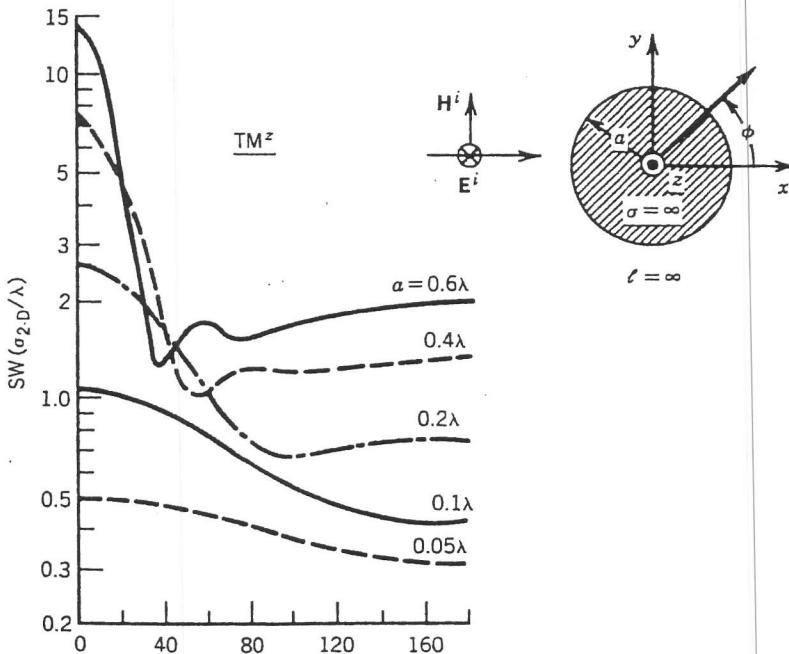


FIGURE 11-13 Two-dimensional TM^z bistatic scattering width (SW) of a circular conducting cylinder. (Courtesy J. H. Richmond, Ohio State University.)

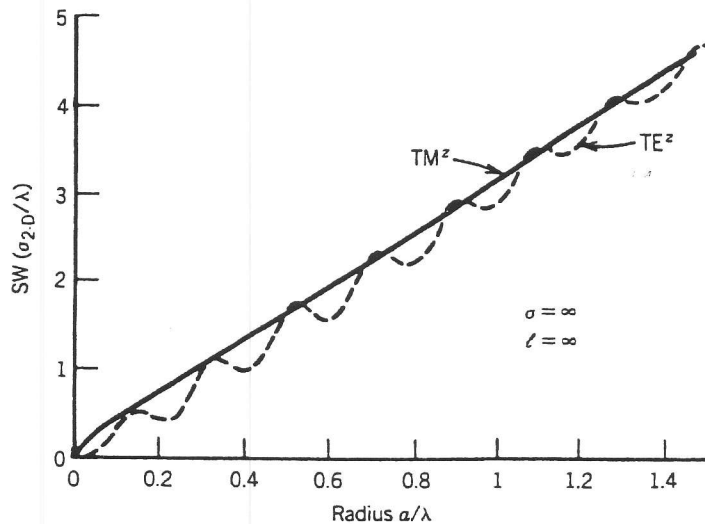


FIGURE 11-14 Two-dimensional monostatic (backscattered) scattering width for a circular conducting cylinder as a function of its radius. (Courtesy J. H. Richmond, Ohio State University.)

and (11-102) can then be reduced to

$$\sigma_{2-D} \stackrel{a \ll \lambda}{\approx} \frac{2\lambda}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} \right) \left| \frac{1}{\ln(0.89\beta a)} \right|^2 = \frac{\pi\lambda}{2} \left| \frac{1}{\ln(0.89\beta a)} \right|^2 \quad (11-103a)$$

This is independent of ϕ which becomes evident in Figure 11-13 by the curves for the smaller values of a .

For a cylinder of finite length ℓ the three-dimensional radar cross section for normal incidence is related to the two-dimensional scattering width by (11-22e). Thus using (11-102) and (11-103a) we can write the three-dimensional RCS using (11-22e) as

$$\sigma_{3-D} \approx \frac{4\ell^2}{\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} e^{jn\phi} \right|^2 \quad (11-104a)$$

$$\sigma_{3-D} \stackrel{a \ll \lambda}{\approx} \pi\ell^2 \left| \frac{1}{\ln(0.89\beta a)} \right|^2 \quad (11-104b)$$

11.5.2 Normal Incidence Plane Wave Scattering by Conducting Circular Cylinder: TE^z Polarization

Now let us assume that a TE^z uniform plane wave traveling in the +x direction is normally incident upon a perfectly conducting circular cylinder of radius a , as shown in Figure 11-12b. The incident magnetic field can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i &= \hat{a}_z H_0 e^{-j\beta x} = \hat{a}_z H_0 e^{-j\beta \rho \cos \phi} = \hat{a}_z H_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n(\beta \rho) e^{jn\phi} \\ &= \hat{a}_z H_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n \epsilon_n J_n(\beta \rho) \cos(n\phi) \end{aligned} \quad (11-105)$$