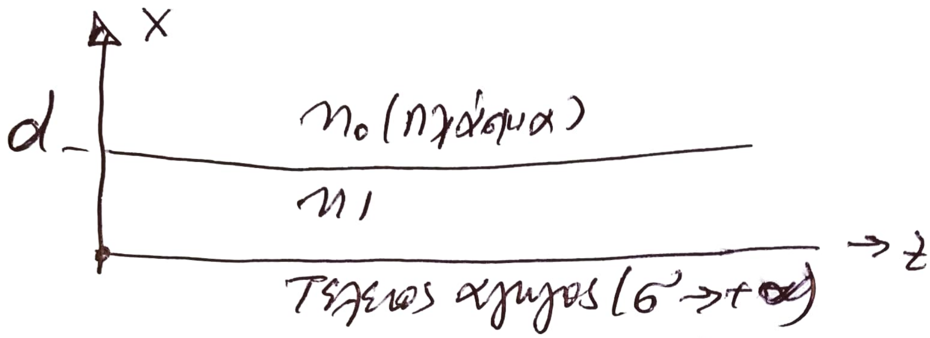
Άσκηση

1

1) Να μελετηθεί η κυματοδήγηση στην παρακάτω διάταξη (TE κύματα)



n_1 = πραγματικός αριθμός

$$n_0 = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

Για $x<d$

$$E_{y_1} = A\sin(\alpha x)\, e^{-j\beta z} \quad \left(\alpha = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}\right)$$

Ισχύει η $E_y = 0$ για $x = 0$

Για $x>d$

$$E_{y_2} = B\, e^{-\gamma(x-d)} \quad \left(\gamma = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_0^2}\right)$$

Οριακές συνθήκες για $x=d$

$$E_{y_1} = E_{y_2} \longrightarrow A\sin(\alpha d) = B$$

$$\frac{\partial E_{y_1}}{\partial x} = \frac{\partial E_{y_2}}{\partial x} \qquad \alpha A\cos(\alpha d) = -\gamma B$$

$$\alpha\cot(\alpha d) = -\gamma$$

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$$

$$\beta^2 = k_0^2 n_1^2 - \alpha^2$$

$$\gamma = \sqrt{k_0^2\left(n_1^2 - 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) - \alpha^2}$$

$$\underbrace{d\alpha}_{u} \cot(\underbrace{\alpha d}_{u}) = -\gamma d$$

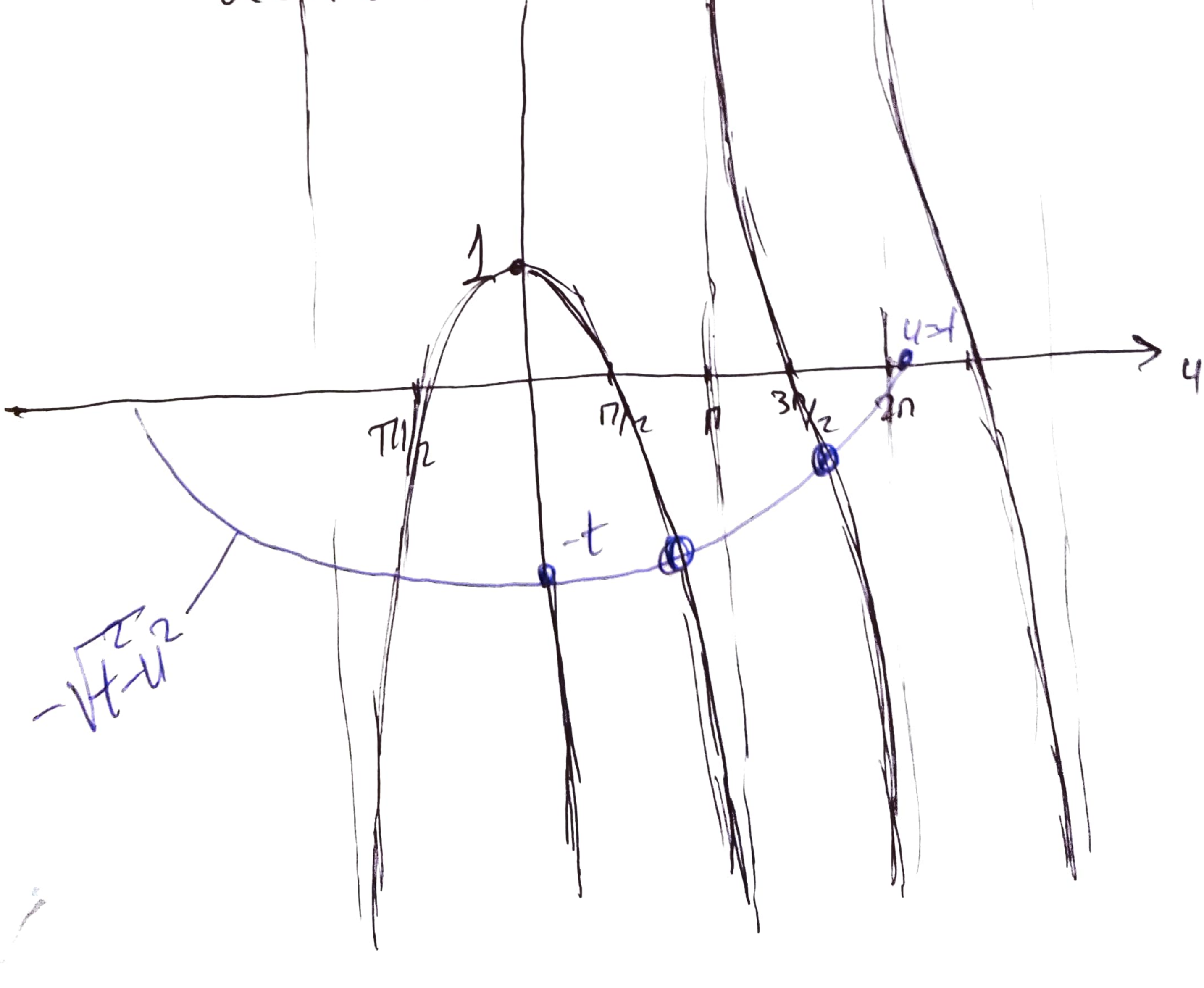
$$t = \sqrt{k_0^2\left(n_1^2 - 1 + \frac{\omega_0^2 c^2}{\omega^2 c^2}\right)}\, d$$

$$t = k_0 d \sqrt{n_1^2 - 1 + \frac{(\omega_0/c)^2}{k_0^2}}\, d$$

$$\gamma d = \sqrt{t^2 - u^2}$$

$$t^2 = k_0^2\left(n_1^2 - 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) d^2$$

$$u \cot(u) = -\sqrt{t^2 - u^2}$$



2) Σε οπτική ίνα οι δείκτες διάθλασης έχουν τα εξής χαρακτηριστικά

$$n_1 = n_{10}(1+j\delta_1)$$
$$n_0 = n_{00}(1+j\delta_0)$$
$$0<\delta_1, \delta_0 \ll 1$$

Να υπολογιστεί η σταθερά διάδοσης του βασικού ρυθμού HE_{11} όταν $n_1 \gtrsim n_0$ (χαλαρή κυματοδήγηση)

Η συνθήκη κυματοδήγησης (εξ. 3.54) για $m=1$ είναι

$$\frac{x\, J_1(x)}{J_0(x)} = \frac{y\, K_1(y)}{K_0(y)}$$

$$x = a(k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad y = a(\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}$$

Αναζητούμε την λύση $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$

β_0 σταθερά διάδοσης όταν έχουμε $\delta_1 = \delta_0 = 0$

Αναπτύσσουμε

$$x = a\Big(k_0^2 \underbrace{(1+j\delta_1)^2}_{\simeq(1+j2\delta_1)} n_{10}^2 - \beta_0^2 - \underbrace{(\Delta\beta)^2}_{\ll} - 2\beta_0\Delta\beta\Big)^{1/2}$$

$$x = a\left(k_0^2(1+j2\delta_1)n_{10}^2 - \beta_0^2 - 2\beta_0\Delta\beta\right)^{1/2}$$

$$x = a\left[(k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0^2) + j2\delta_1 n_{10}^2 k_0^2 - 2\beta_0\Delta\beta\right]^{1/2}$$

$$x = \underbrace{a(k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0^2)^{1/2}}_{X_0}\left(1 + \frac{j2\delta_1 n_{10}^2 k_0^2 - 2\beta_0\Delta\beta}{k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0^2}\right)^{1/2}$$

$$x = a\left(k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0^2\right)^{1/2}\left(1 + \underbrace{\frac{j\delta_1 k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0 \Delta\beta}{\left(k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0^2\right)^2}}_{j\Delta u_1}\right)$$

$$y = a\left(\beta_0^2 - k_0^2 n_{00}^2\right)^{1/2}\left(1 + j\Delta u_2\right)$$

$$\Delta u_2 = \frac{j\delta_0 k_0^2 n_{00}^2 - \beta_0 \Delta\beta}{\beta_0^2 - k_0^2 n_{00}^2}$$

$$\frac{xJ_1(x)}{J_0(x)} = \frac{x_0 J_1(x_0)}{J_0(x_0)} + (x - x_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{xJ_1(x)}{J_0(x)}\right)_{x=x_0}$$

$$\frac{yK_1(y)}{K_0(y)} = \frac{y_0 K_1(y_0)}{K_0(y_0)} + (y - y_0)\frac{d}{dy}\left(\frac{yK_1(y)}{K_0(y)}\right)\Bigg|_{y=y_0}$$

$$x - x_0 = \frac{j\Delta u_1 a}{x_0}$$

$$y - y_0 = j\frac{\Delta u_2 a}{y_0}$$

$$\frac{j\Delta u_1 a}{x_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{xJ_1(x)}{J_0(x)}\right)\Bigg|_{x=x_0} = \frac{j\Delta u_2 a}{y_0}\frac{d}{dy}\left(\frac{yK_1(y)}{K_0(y)}\right)_{y=y_0}$$

$\Delta\varepsilon_1$

$$X = X_0 + \frac{(j\delta_1 n_{10}^2 k_0^2 - \beta_0 \Delta\beta)a}{a(k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0^2)^{1/2}}$$

$$X = X_0 + \frac{\Delta\varepsilon_1}{X_0}, \quad \Delta\varepsilon_1 = (j\delta_1 n_{10}^2 k_0^2 - \beta_0\Delta\beta)a$$

ομοίως

$$y = y_0 + \frac{\Delta\varepsilon_2}{y_0}, \quad \Delta\varepsilon_2 = (j\delta_2 n_{00}^2 k_0^2 - \beta_0\Delta\beta)a$$

επειδή $|\Delta\varepsilon_1| \ll 1$, $|\Delta\varepsilon_2| \ll 1$

$$\frac{XJ_1(X)}{J_0(X)} = \frac{X_0 J_1(X_0)}{J_0(X_0)} + (X - X_0)\frac{d}{dX}\left(\frac{XJ_1(X)}{J_0(X)}\right)_{X=X_0}$$

$$\frac{yK_1(y)}{K_0(y)} = \frac{y_0 K_1(y_0)}{K_0(y_0)} + (y - y_0)\frac{d}{dy}\left(\frac{yK_1(y)}{K_0(y)}\right)_{y=y_0}$$

Οι πρώτοι όροι είναι ίσοι αν $\beta = \beta_0$ η λύση με $\delta_1 = \delta_0 = 0$

οπότε

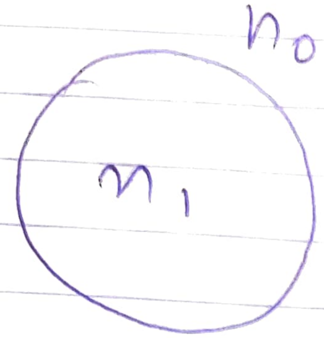
$$\frac{\Delta\varepsilon_1}{X_0}\frac{d}{dX}\left(\frac{XJ_1(X)}{J_0(X)}\right)_{X=X_0} = \frac{\Delta\varepsilon_2}{y_0}\frac{d}{dy}\left(\frac{yK_1(y)}{K_0(y)}\right)$$

$$j\frac{\delta_1 n_{10}^2 a}{X_0}\left(\frac{d}{dX}\left(\frac{XJ_1(X)}{J_0(X)}\right)\right)_{X=X_0} + j\frac{\delta_0 n_{00}^2 a}{y_0}\frac{d}{dy}\left(\frac{yK_1(y)}{K_0(y)}\right)$$

$$= \frac{\Delta\beta\,\beta_0 a}{\cancel{k_0}}\left[\left(\frac{d}{dX}\left(\frac{XJ_1(X)}{J_0(X)}\right)_{X=X_0}\frac{1}{X_0} + \frac{d}{dy}\left(\frac{yK_1(y)}{K_0(y)}\right)_{y=y_0}\frac{1}{y_0}\right)\right.$$

Λύνω ως προς $\Delta\beta = \dots$

Σε οπτική ίνα οι δείκτες διάθλασης έχουν τα εξής χαρακτηριστικά



$n_1 = n_{10}(1+j\delta_1)$

$n_0 = n_{00}(1+j\delta_0)$

$\delta_1, \delta_0 > 0$

Να υπολογιστεί η σταθερά διάδοσης του βασικού ρυθμού HE_{11} όταν $n_1 \gtrsim n_0$ (χαλαρή κυματοδήγηση)

Η συνθήκη κυματοδήγησης είναι:

$$\frac{xJ_1(x)}{J_0(x)} = \frac{yK_1(y)}{K_0(y)}$$

$\cancel{x^2 = a^2 k_0^2 (n_1^2 - n_0^2),\ y^2 = k_0 a}$

$$x = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}, \quad y = a\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_0^2}$$

Αναζητούμε την λύση

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta$$

β_0 = η λύση όταν $\delta_1 = \delta_0 = 0$

Γράφουμε

$\cancel{x = a\sqrt{k_0^2 n_{10}^2}}$

$$x = a\sqrt{k_0^2 n_{10}^2 (1+j\delta_1)^2 - \beta^2}$$

$$= a\sqrt{k_0^2 n_{10}^2 (1+2j\delta_1) - \beta_0^2 - 2\beta_0\Delta\beta}$$

$$= a\left(k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0^2\right)^{1/2}\left(1 + \frac{2j\delta_1 k_0^2 n_{10}^2 - 2\beta_0\Delta\beta}{k_0^2 n_{10}^2 - \beta_0^2}\right)^{1/2}$$

3) Σε οπτική ίνα (μονορυθμικής) ισχύουν

$$n_1 = n_{10} + (\lambda-\lambda_0) n_{11} \quad (\text{πυρήνας})$$

$$n_0 = n_{00} + (\lambda-\lambda_0) n_{01} \quad (\text{επένδυση})$$

ποιά σχέση πρέπει να ισχύει για να έχουμε ελαχιστοποίηση της διαπλάτυνσης παλμών

Γνωρίζουμε την συνθήκη

$$\frac{x J_1(x)}{J_0(x)} = \frac{y K_1(y)}{K_0(y)}$$

$$x = a(k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad y = a(\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}$$

$$x = a\left(k_0^2 n_{10}^2 + \underbrace{k_0^2(\lambda-\lambda_0^2) n_{11}^2}_{\text{αγνοείται}} + 2k_0(\lambda-\lambda_0) n_{11} n_{10} - \beta^2\right)^{1/2}$$

$$x = a\left((k_0^2 n_{10}^2 - \beta^2)\left(1 + \underbrace{\frac{2k_0(\lambda-\lambda_0) n_{11} n_{10}}{(k_0^2 n_{10}^2 - \beta^2)}}_{\ll 1}\right)\right)^{1/2}$$

$$x \cong \underbrace{a(k_0^2 n_{10}^2 - \beta^2)^{1/2}}_{x_0} + \frac{\cancel{2}k_0(\lambda-\lambda_0) n_{11} n_{10}}{x_0}$$

$$x \cong x_0 + \frac{k_0(\lambda-\lambda_0) n_{11} n_{10}}{x_0}$$

Ομοίως

$$y \cong y_0 + \frac{k_0(\lambda-\lambda_0) n_{01} n_{00}}{y_0}, \quad y_0 = a(\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}$$

Αναζητούμε την λύση

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta$$

όπου β_0 είναι η λύση όταν $n_{11} = n_{01} = 0$ εφαρμόζοντας την μέθοδο στην προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε την τιμή $\Delta\beta$.
Στη συνέχεια καθορίζουμε να ισχύει η συνθήκη

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \text{σταθερή}$$