

ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΑ


Γραμμές Μεταφοράς

Δήμητρα – Θεοδώρα Κακλαμάνη
Καθηγήτρια ΕΜΠ



Γραμμές Μεταφοράς στη Μικροκυματική και Οπτική Τεχνολογία

ΟΡΙΣΜΟΣ

- το υλικό μέσο (σύστημα αγωγών, διηλεκτρικών ή συνδυασμών τους) για τη μεταφορά **ενέργειας** (και **πληροφορίας**) μεταξύ δύο σημείων (θέσεων) κυκλώματος  **ενσύρματη ζεύξη**
- **ομοιόμορφη** γραμμή: αμετάβλητη διατομή σε όλο το μήκος της
 - γεωμετρικά χαρακτηριστικά
 - υλικά και ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες

ΑΠΑΙΤΗΣΗ

- μεταφορά της μικροκυματικής ισχύος με τη μικρότερη δυνατή **απόσβεση** (**εξασθένιση**) και **παραμόρφωση**  **ποιότητα γραμμής**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

- φυσικό μήκος γραμμής συγκρίσιμο ή και μεγαλύτερο του μήκους κύματος στη μικροκυματική ή οπτική συχνότητα λειτουργίας (φέρων)
 - εμφάνιση κυματικών φαινομένων \Leftrightarrow **πεδιακή ανάλυση** (εξισώσεις Maxwell)
 - **κατανεμημένο** στοιχείο \Leftrightarrow **ΧΩΡΟΧΡΟΝΙΚΗ** μεταβολή ρευμάτων και τάσεων

Είδη Γραμμών Μεταφοράς στη Μικροκυματική και Οπτική Τεχνολογία

Δύο (ή περισσότερων) απομονωμένων αγωγών



δισύρματη γραμμή
(δίκλωνο καλώδιο)



ομοαξονικό καλώδιο



γραμμή παραλλήλων πλακών



μικροταινία

- υποστηρίζουν διάδοση και TEM κυμάτων
- υποστηρίζουν διάδοση ακόμη και σε **μηδενική** συχνότητα (\exists αγωγός επιστροφής)
- **γραμμική σχέση διασποράς**

Μεταλλικοί κυματοδηγοί (κενοί αγωγιμοί σωλήνες)



ορθογωνικός
κυματοδηγός



κυκλικός
κυματοδηγός



μεταλλικός κυματοδηγός
με διηλεκτρικό

- συνεχείς ανακλάσεις στα τοιχώματα
- υποστηρίζουν διάδοση ρυθμών ανώτερης τάξης
- **μη-γραμμική σχέση διασποράς**
- διάδοση σε **υψηλές** συχνότητες με **χαμηλές απώλειες**

Διηλεκτρικοί κυματοδηγοί



διηλεκτρική πλάκα



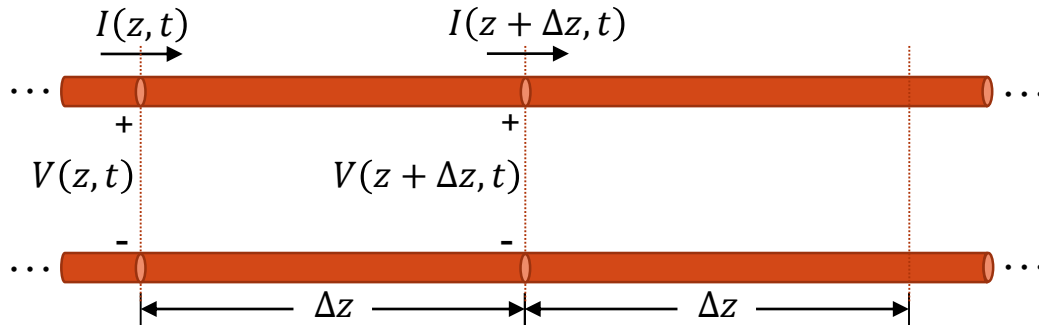
διηλεκτρική ράβδος



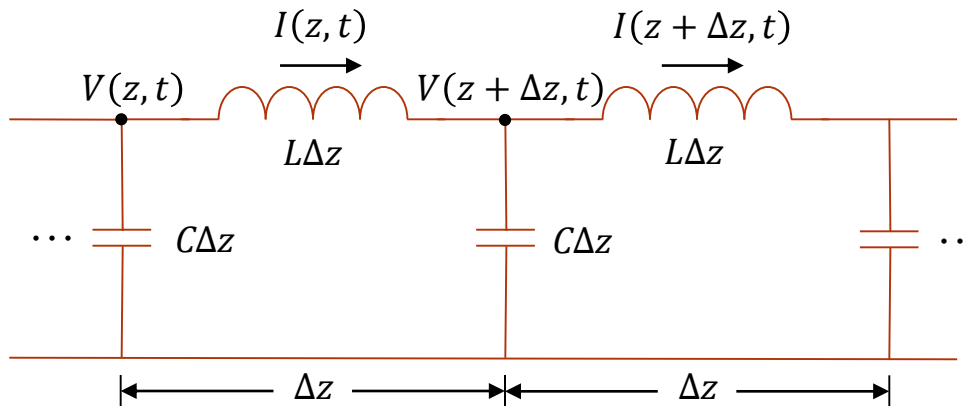
οπτικές ίνες

- συνεχείς **ολικές** ανακλάσεις στα τοιχώματα
- υποστηρίζουν διάδοση ρυθμών ανώτερης τάξης
- διάδοση σε **χιλιοστομετρικές** και **οπτικές** συχνότητες με εξαιρετικά **χαμηλές απώλειες** \Rightarrow
- ☑ **διάδοση σημάτων μεγάλου εύρους ζώνης σε μεγάλες αποστάσεις**

Κυκλωματικό Ισοδύναμο – Καταστατικές Εξισώσεις (1)



- **ομοιόμορφη** γραμμή μεταφοράς δύο απομονωμένων αγωγών
- **TEM** κύματα
- διάδοση κατά z
- **κατανεμημένο** στοιχείο: $V(z, t), I(z, t)$



ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ

- διαδοχική σύνδεση (cascaded connection) τμημάτων $\Delta z \ll \lambda$
- **συγκεντρωμένα** στοιχεία
 - L αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους της γραμμής (H/m)
 - C χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους της γραμμής (F/m)

NTK και σχέση τάσης-ρεύματος πηνίου:

$$V(z, t) - V(z + \Delta z, t) = L\Delta z \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) \quad \text{για } \Delta z \rightarrow 0:$$

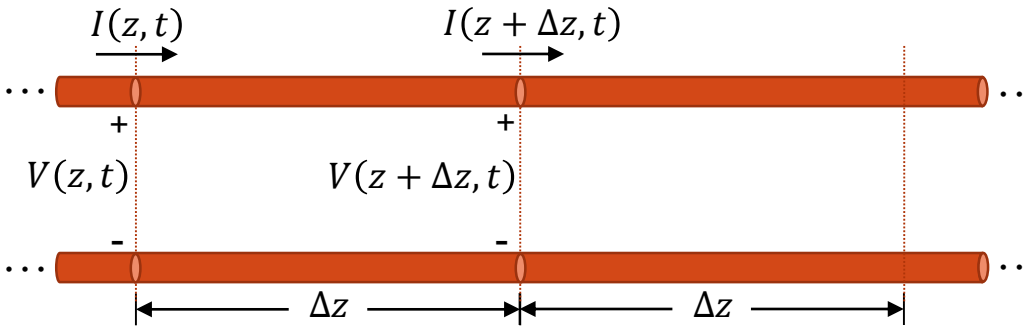
NPK και σχέση τάσης-ρεύματος πυκνωτή:

$$-\frac{\partial}{\partial z} V(z, t) = L \frac{\partial}{\partial t} I(z, t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) = C \frac{\partial}{\partial t} V(z, t)$$

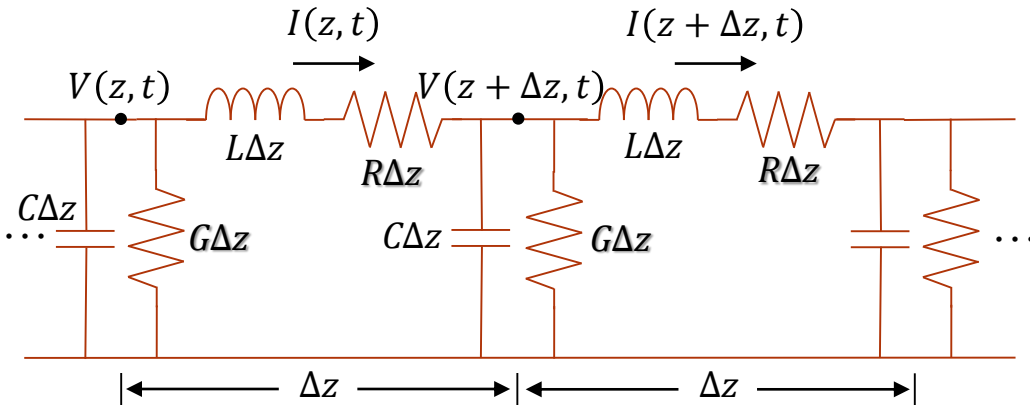
- αν υπάρχουν απώλειες; έχουν ληφθεί υπόψιν;

Κυκλωματικό Ισοδύναμο – Καταστατικές Εξισώσεις (2)



- **ομοιόμορφη** γραμμή μεταφοράς δύο απομονωμένων αγωγών **με απώλειες**
- **TEM** κύματα, διάδοση κατά z
- **κατανεμημένο** στοιχείο: $V(z, t), I(z, t)$

ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ



- διαδοχική σύνδεση τμημάτων $\Delta z \ll \lambda$
- **συγκεντρωμένα** στοιχεία
 - L αυτεπαγωγή / μονάδα μήκους (H/m)
 - C χωρητικότητα / μονάδα μήκους (F/m)
 - R ωμική αντίσταση ανά μονάδα μήκους της γραμμής (Ω/m)
 - G αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους της γραμμής (S/m)

$$-\frac{\partial}{\partial z} V(z, t) = L \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) + RI(z, t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} I(z, t) = C \frac{\partial}{\partial t} V(z, t) + GV(z, t)$$

- από τι εξαρτώνται τα L, C, R, G ; σε τι οφείλονται; πώς μετρώνται/υπολογίζονται;
- ποια σχέση συνδέει τα R, G ;

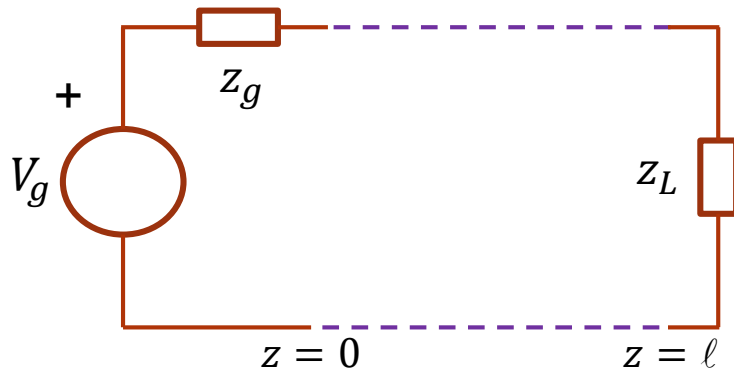
$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, t) = RGV(z, t) + (RC + LG) \frac{\partial}{\partial t} V(z, t) + LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(z, t) \quad \text{εξίσωση τηλεγραφητή}$$

Εναλλασσόμενα Ρεύματα σε Γραμμές Μεταφοράς

Πηγή τάσης V_g με εσωτερική αντίσταση z_g τροφοδοτεί φορτίο z_L μέσω ομοιόμορφης γραμμής μεταφοράς μήκους ℓ

συγκεντρωμένα στοιχεία

κατανεμημένο στοιχείο



διάδοση κατά τον z -άξονα (TEM κύματα)
 συχνότητα ταλάντωσης $f = \omega/2\pi$

σταθερή κατάσταση \Rightarrow **phasors** για πηγές, τάσεις, ρεύματα

$$V(z, t) = \text{Re}(e^{j\omega t} V(z))$$

$$I(z, t) = \text{Re}(e^{j\omega t} I(z))$$

σύνθετες αντιστάσεις για
 συγκεντρωμένα παθητικά στοιχεία

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dV(z)}{dz} &= (R + j\omega L)I(z) & (1) \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= (G + j\omega C)V(z) & (2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2V(z)}{dz^2} &= (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z) \\ \frac{d^2I(z)}{dz^2} &= (R + j\omega L)(G + j\omega C)I(z) \end{aligned} \right.$$

Α. Τάσεις - Ρεύματα (1)

Λύσεις της μορφής $V(z) = A_+ e^{+\gamma z} + A_- e^{-\gamma z}$ (3)

$$I(z) = B_+ e^{+\gamma z} + B_- e^{-\gamma z} \quad (4) \xrightarrow{(6),(7)} I(z) = -\frac{A_+}{z_0} e^{+\gamma z} + \frac{A_-}{z_0} e^{-\gamma z}$$

$$\gamma = \gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (5) \quad \text{σταθερά διάδοσης}$$

$$\text{με } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{γιατί;}$$

$$(1) \xrightarrow{(3),(4)} \frac{A_+}{B_+} = -\sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad (6) \quad \text{και} \quad \frac{A_-}{B_-} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad (7)$$

$= z_0 \quad (8)$

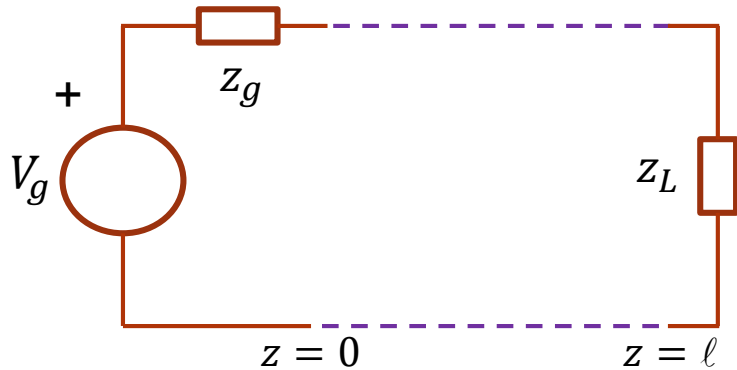
**χαρακτηριστική
αντίσταση γραμμής**

- ποιος όρος της $\gamma(\omega)$ δείχνει τη διάδοση;
- από τι εξαρτάται η z_0 ;
- ποια η z_0 σε γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες;
- τι δείχνει η z_0 ;
- ποια η $\gamma(\omega)$ σε γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

A. Τάσεις – Ρεύματα (2)

- οριακές συνθήκες στην αρχή και στο τέλος της γραμμής (συγκεντρωμένα στοιχεία \Rightarrow νόμοι Kirchhoff)



$$\left. \begin{aligned} V_g &= z_g I(z=0) + V(z=0) \\ V(z=l) &= z_L I(z=l) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(3),(4)} \dots\dots$$

$$A_- = V_g \frac{z_0}{(z_0 + z_g)} \frac{1}{(1 - \rho_g \rho_L e^{-2\gamma \ell})} \quad (9)$$

$$A_+ = A_- \rho_L e^{-2\gamma \ell} \quad (10)$$

όπου $\rho_g = \frac{z_g - z_0}{z_g + z_0} \quad (11)$

$$\rho_L = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0} \quad (12)$$

B. Σύνθετη Αντίσταση

$$(3) \xrightarrow{(9),(10)} V(z) = A_- (e^{-\gamma z} + \rho_L e^{+\gamma(z-2\ell)}) = A_- e^{-\gamma z} (1 + \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)}) \quad (13)$$

$$(4) \xrightarrow{(9),(10)} I(z) = \frac{A_-}{z_0} (e^{-\gamma z} - \rho_L e^{+\gamma(z-2\ell)}) = \frac{A_-}{z_0} e^{-\gamma z} (1 - \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)}) \quad (14)$$

• **σύνθετη αντίσταση** της γραμμής στη θέση z :

$$z(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V(z)}{I(z)} \xrightarrow{(13),(14)} z(z) = z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)}} \quad (15)$$

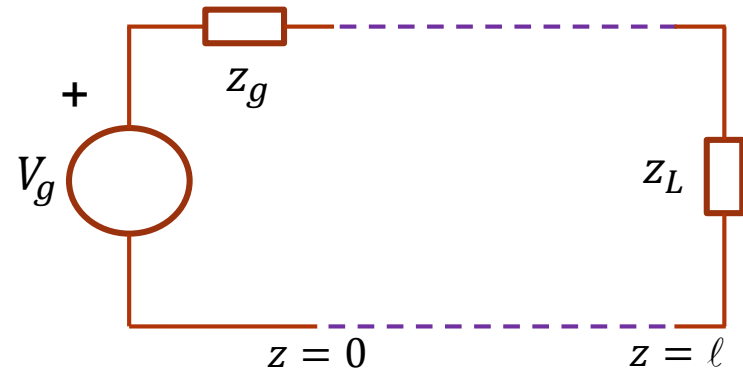
➤ z μετρά από πηγή προς φορτίο

• **ανηγμένη σύνθετη αντίσταση** της γραμμής στη θέση z :

$$\zeta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z(z)}{z_0} = \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)}} \quad (16)$$

- τι σημαίνει κυκλωματικά η $z(z)$;
- πραγματικό μέρος, φανταστικό μέρος

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ



Γ. Συντελεστής Ανάκλασης (1)

κύμα οδεύον κατά τα θετικά z
(από πηγή προς φορτίο \mapsto **προσπίπτον**)

κύμα οδεύον κατά τα αρνητικά z
(**ανακλώμενο**)

$$(13) \xrightarrow{\gamma = \gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)} V(z) = A_- \{ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \rho_L e^{-(2\ell - z)\alpha} e^{-2j\beta\ell} e^{+j\beta z} \} \quad (17)$$

το **προσπίπτον** έχει διανύσει απόσταση z πάνω στη γραμμή

το **ανακλώμενο** έχει διανύσει απόσταση $(2\ell - z)$ πάνω στη γραμμή

- σε κάθε θέση z **συνυπάρχουν** το προσπίπτον και το ανακλώμενο \mapsto **στάσιμα κύματα**
- ταυτόχρονα με τη διάδοση τα δύο κύματα εξασθενούν κατά α Neper/m

• $\alpha = \alpha(\omega)$ **συντελεστής εξασθένησης** (απώλειες)
ανά μονάδα μήκους της γραμμής (Neper/m)

• $\beta = \beta(\omega)$ **συντελεστής στροφής** (στροφή φάσης)
ανά μονάδα μήκους της γραμμής (rad/m)

πώς προκύπτει από
στην (17);

➤ ουσιαστικά το $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$
είναι η σταθερά διάδοσης

➤ **ποιοι όροι στην (17) δείχνουν τη διάδοση;**

➤ **ποιοι όροι στην (17) δείχνουν την εξασθένηση;**

Γ. Συντελεστής Ανάκλασης (2)

$$V(z) = A_-(e^{-\gamma z} + \rho_L e^{+\gamma(z-2\ell)}) = A_- e^{-\gamma z} (1 + \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)}) \quad (13)$$

• **συντελεστής ανάκλασης** της γραμμής στη θέση z :

$$\rho(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_{\text{refl}}(z)}{V_{\text{inc}}(z)} \xrightarrow{(13),(17)} \boxed{\rho(z) = \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)}} = \rho_L e^{-2(\alpha+j\beta)(\ell-z)} \quad (18)$$

$$(15) \stackrel{(18)}{\Rightarrow} \boxed{z(z) = z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}} \quad (19) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho(z) = \frac{z(z) - z_0}{z(z) + z_0}} \quad (21)$$

$$\boxed{\zeta(z) = \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}} \quad (20) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho(z) = \frac{\zeta(z) - 1}{\zeta(z) + 1}} \quad (22)$$

- τι είναι το ρ_L ;
- τι τιμές μπορεί να πάρει ο $\rho(z)$;
ποια η επιθυμητή; πότε επιτυγχάνεται;
ποια η πλήρως ανεπιθύμητη; πότε συμβαίνει;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

➤ z μετρά
από πηγή
προς φορτίο

Δ. Περιοδικότητα

$$\rho(z) = \rho_L e^{-2\gamma(\ell-z)} = \rho_L e^{-2(\alpha+j\beta)(\ell-z)} = \rho_L e^{-2\alpha(\ell-z)} e^{-2j\beta(\ell-z)} \quad (18)$$

$$2\beta(\ell - z) = 2k\pi \xrightarrow{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}} 2 \frac{2\pi}{\lambda} (\ell - z) = 2k\pi \Rightarrow (\ell - z) = k \frac{\lambda}{2}, \quad k \text{ ακέραιος}$$

z μετρά από πηγή προς φορτίο

$\xi = (\ell - z)$ μετρά από φορτίο προς πηγή

- αν δεν υπάρχουν απώλειες στη γραμμή, ανά $\frac{\lambda}{2}$ μετράμε ακριβώς τις ίδιες τιμές
 - αν υπάρχουν απώλειες, η περιοδικότητα παραμένει, αλλά οι μετρούμενες τιμές είναι μειωμένες κατά τον αντίστοιχο παράγοντα εξασθένησης
- πώς διερευνάται η περιοδικότητα;
- πώς επηρεάζουν οι απώλειες την περιοδικότητα;

Ε. Στάσιμα – Λόγος Στασίμων – Ακρότατα Τάσης (1)

- γραμμή χωρίς απώλειες $\Leftrightarrow R = 0, G = 0$ ή ισοδυνάμως $\alpha = 0 \Rightarrow \gamma = j\beta$

$$(17) \xrightarrow{\gamma=j\beta} V(z) = A_- \{e^{-j\beta z} + \rho_L e^{+j\beta(z-2\ell)}\} \quad (23)$$

$$V(z, t) = A_- \cos(\omega t - \beta z) + A_- |\rho_L| \cos[\omega t + \beta(z - \ell) + \varphi_L]$$

$$\rho_L = |\rho_L| e^{j\varphi_L}$$

(χάρην απλότητας θεωρήθηκε ότι $A_- \in \mathbb{R}$)

$$|V(z)| = |A_-| \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos[2\beta(z - \ell) + \varphi_L]} \quad (24) \quad \text{νόμος συνημιτόνων}$$

- άρα σε κάθε θέση z το μέτρο της τάσης μεταβάλλεται από $|V(z)|_{min}$ μέχρι

$|V(z)|_{max}$ (στάσιμα κύματα) με χρονική συχνότητα ταλάντωσης ω

(και χωρική περιοδικότητα $k \frac{\lambda}{2}$ κατά τα γνωστά)

γιατί;

- πώς από τον phasor της (23) προκύπτει η πραγματική τάση στο πεδίο του χρόνου;
- πώς προκύπτει το μέτρο του phasor της (23);

Ε. Στάσιμα – Λόγος Στασίμων – Ακρότατα Τάσης (2)

εύρεση ακρότατων $|V(z)| = |A_-| \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos[2\beta(z - \ell) + \varphi_L]}$

➤ για $\cos[2\beta(z - \ell) + \varphi_L] = 1 \Rightarrow 2\beta(z - \ell) + \varphi_L = 2k\pi$ (25) ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$|V(z)| = |V(z)|_{max} = |A_-|(1 + |\rho_L|) \quad (26)$$

$$\rho_L = |\rho_L|e^{j\varphi_L}$$

➤ για $\cos[2\beta(z - \ell) + \varphi_L] = -1 \Rightarrow 2\beta(z - \ell) + \varphi_L = (2k + 1)\pi$ (27)

$$|V(z)| = |V(z)|_{min} = |A_-|(1 - |\rho_L|) \quad (28)$$

• **λόγος στασίμων κυμάτων** της γραμμής:

$$SWR = S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|V(z)|_{max}}{|V(z)|_{min}} \xrightarrow{(26),(28)} SWR = S = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = S(\omega) \quad (29)$$

$$(25) \Rightarrow \ell - z = \frac{\varphi_L - 2k\pi}{2 \cdot 2\pi/\lambda} \Rightarrow \ell - z = d_{max,k} = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\varphi_L}{\pi} - 2k \right) \quad (30)$$

$$(27) \Rightarrow \ell - z = d_{min,k} = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\varphi_L}{\pi} - 2k - 1 \right) \quad (31)$$

γιατί;

- επιβεβαίωση περιοδικότητας
- υπολογισμός απόστασης διαδοχικών ακρότατων

- τι τιμές παίρνει ο S ;
ποια η επιθυμητή; πότε επιτυγχάνεται;
ποια η πλήρως ανεπιθύμητη; πότε συμβαίνει;
- τι δείχνει ο S ; από τι εξαρτάται;

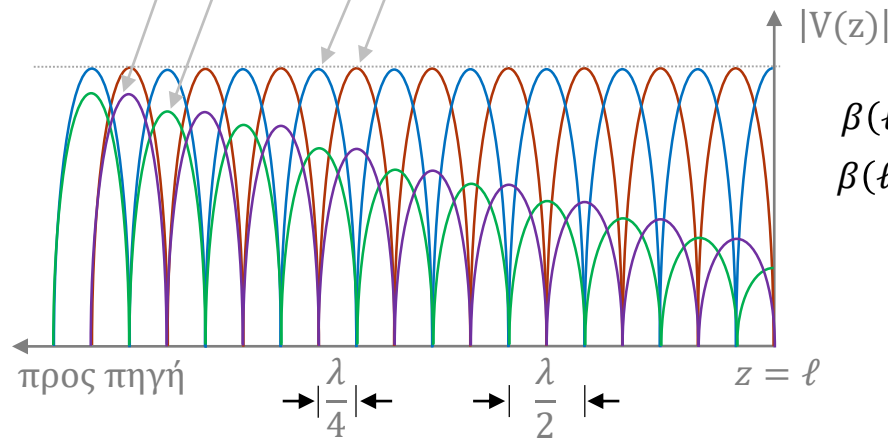
- τι επηρεάζει το μέτρο του ρ_L ;
τι η φάση του;

ΣΤ. Ειδικές Περιπτώσεις Φορτίου

1. προσαρμογή: $z_L = z_0 \Rightarrow \rho_L = 0$ ($S = 1$) $V(z) = A_- e^{-\gamma z}$ $|V(z)| = |A_-| e^{-\alpha z}$
σε γραμμή χωρίς απώλειες: $V(z) = A_- e^{-j\beta z}$ $|V(z)| = |A_-|$

2. βραχυκύκλωμα: $z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1$ ($S \rightarrow \infty, V_{min} = 0$) $V(z) = 2A_- e^{-\gamma \ell} \sinh(\gamma(\ell - z))$
σε γραμμή χωρίς απώλειες: $V(z) = 2A_- e^{-j\beta \ell} j \sin(\beta(\ell - z))$ $|V(z)| \sim |\sin(\beta(\ell - z))|$

3. ανοιχτόκύκλωμα: $z_L \rightarrow \infty \Rightarrow \rho_L = 1$ ($S \rightarrow \infty, V_{min} = 0$) $V(z) = 2A_- e^{-\gamma \ell} \cosh(\gamma(\ell - z))$
σε γραμμή χωρίς απώλειες: $V(z) = 2A_- e^{-j\beta \ell} \cos(\beta(\ell - z))$ $|V(z)| \sim |\cos(\beta(\ell - z))|$



$$\left. \begin{array}{l} \beta(\ell - z_1) = n_1 \pi \\ \beta(\ell - z_2) = n_2 \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \beta(z_2 - z_1) = \underbrace{(n_1 - n_2)}_k \pi \Rightarrow \Delta z = k \lambda / 2$$

στη γενική περίπτωση φορτίου ($\rho_L \neq 0, \pm 1$)
υπάρχει περιοδικότητα, τα μέγιστα μειώνονται,
τα ελάχιστα δεν είναι μηδενισμοί

- πώς προσδιορίζεται η συχνότητα λειτουργίας από μετρήσεις τάσης πάνω στη γραμμή;
- πώς προσδιορίζεται άγνωστο φορτίο από μετρήσεις τάσης πάνω στη γραμμή;

Άσκηση

| γραμμή χωρίς απώλειες | z_L | $\zeta_L = \frac{z_L}{z_0}$ | $\rho_L = \frac{\zeta_L - 1}{\zeta_L + 1}$ | $ \rho_L $ | φ_L | $S = \frac{1 + \rho_L }{1 - \rho_L }$ | $d_{min} = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\varphi_L}{\pi} - 2k - 1 \right)$ |
|-----------------------|---------|-----------------------------|--|------------|-------------|---|---|
| προσαρμογή | | | | | | | |
| βραχυκύκλωμα | | | | | | | |
| ανοιχτοκύκλωμα | | | | | | | |
| “απλό” επαγωγικό | jz_0 | | | | | | |
| “απλό” χωρητικό | $-jz_0$ | | | | | | |
| ωμικό $> z_0$ | | | | | | | |
| ωμικό $< z_0$ | | | | | | | |

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ζ. Συνθήκες Μη-Παραμόρφωσης (1)

ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ

όλες οι συχνότητες που μετέχουν στο διαμορφωμένο σήμα

1. να διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα (να υφίστανται την ίδια καθυστέρηση)

άρα: ταχύτητα ομάδας $v_g = \frac{1}{\frac{\partial \beta(\omega)}{\partial \omega}} \Big|_{\omega=\omega_0}$ ανεξάρτητη της συχνότητας

ή ισοδυνάμως: **σταθερά διάδοσης $\beta(\omega)$ γραμμική συνάρτηση της συχνότητας (γραμμική σχέση διασποράς)**

2. να εξασθενούν στον ίδιο βαθμό

άρα: **συντελεστής εξασθένησης $\alpha(\omega)$ ανεξάρτητος της συχνότητας**

$$\gamma = \gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{A(\omega) + jB(\omega)} \quad (32)$$

$$\text{με } A(\omega) = RG - \omega^2 LC \quad (33) \quad \text{και} \quad B(\omega) = \omega(LG + RC) \quad (34)$$

υψώνοντας την (32) στο τετράγωνο και εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη

⇒ διτετράγωνη εξίσωση ως προς $\alpha(\omega)$, με λύση:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\underbrace{A(\omega) + \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}}_K} \quad (35) \quad , \quad \beta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-A(\omega) + \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}} \quad (36)$$

Z. Συνθήκες Μη-Παραμόρφωσης (2)

$$\alpha(\omega) = \text{σταθ.} \stackrel{(35)}{\implies} A^2(\omega) + B^2(\omega) = A^2(\omega) + K^2 + 2A(\omega)K \stackrel{(33),(34)}{\implies}$$

$$\stackrel{(33),(34)}{\implies} \omega^2(LG + RC)^2 + 2KRG - 2KLC\omega^2 = K^2 \stackrel{(33),(34)}{\implies} \begin{cases} LG + RC = \sqrt{2KLC} \\ K = 2RG \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{LG} - \sqrt{RC})^2 = 0 \Rightarrow \boxed{LG = RC} \quad (37) \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{C}{G} = \frac{L}{R}} \quad (37) \quad \text{συνθήκη Heaviside}$$

$$\gamma(\omega) = \sqrt{RG} \sqrt{\left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right) \left(1 + j\omega \frac{C}{G}\right)} \stackrel{(37)}{\implies} \gamma(\omega) = \sqrt{RG} \left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right) = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}$$

δηλαδή, αν ισχύει η (37), τότε $\alpha = \sqrt{RG}$ (38) ανεξάρτητο της συχνότητας

και $\beta(\omega) = \omega\sqrt{LC}$ (39) γραμμική συνάρτηση της συχνότητας

με $v_g = 1/\sqrt{LC}$ (40) ανεξάρτητη της συχνότητας

άρα: η (37) ικανοποιεί **και τις δύο** απαιτήσεις μη-παραμόρφωσης !!

$$\text{επιπλέον, ισχύει ότι } z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{j\omega + R/L}{j\omega + G/C}} \stackrel{(37)}{\implies} z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \in \mathbb{R} \quad (41)$$

$$\text{και } (38) \stackrel{(37),(41)}{\implies} \alpha = \frac{R}{z_0}, \quad (37) \Rightarrow G = \frac{RC}{L} \stackrel{(41)}{\implies} G = \frac{R}{z_0^2}$$

Z. Συνθήκες Μη-Παραμόρφωσης (3)

$$\gamma = \gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (5)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

➤ εναλλακτικός τρόπος απόδειξης της συνθήκης Heaviside $LG = RC$: (37)

για να είναι $\gamma(\omega) = K + j\omega M$ πρέπει (αρκεί) $G + j\omega C = \nu(R + j\omega L)$

☑ σε γραμμή μεταφοράς **χωρίς απώλειες** ($R = 0, G = 0$)

ικανοποιούνται οι απαιτήσεις μη-παραμόρφωσης: $\alpha = 0$ και $\beta(\omega) = \omega\sqrt{LC}$

➤ αν υπάρχουν μη-αμελητέες απώλειες, η (37) **δύσκολα επιτυγχάνεται**

- συνήθως με προσθήκη πηνίων σε σειρά
- δημιουργεί πρόβλημα η εξάρτηση $R(\omega)$

☑ η συνηθέστερη συνθήκη εξασφάλισης μη-παραμόρφωσης στη γραμμή:

συνδυασμός χαμηλών απωλειών και υψηλών συχνοτήτων λειτουργίας,

ώστε να ισχύει $R \ll \omega L$ (42) και $G \ll \omega C$ (43)

Z. Συνθήκες Μη-Παραμόρφωσης (4)

$$\gamma(\omega) = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)} \xrightarrow[(1+z)^n \cong 1+nz]{|z| \ll 1} \gamma(\omega) \cong j\omega\sqrt{LC} \left(1 - j\frac{R}{2\omega L}\right) \left(1 - j\frac{G}{2\omega C}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma(\omega) \cong j\omega\sqrt{LC} \left\{ \left(1 - \frac{RG}{4\omega^2 LC}\right) - j\frac{1}{2\omega} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right) \right\} \cong \frac{1}{2} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right) + j\omega\sqrt{LC}$$

$\alpha_{\gamma\Sigma} \checkmark\checkmark$
 $\beta_{\gamma\Sigma}(\omega) \checkmark\checkmark$
 $v_{g\gamma\Sigma} \cong 1/\sqrt{LC}$

και επειδή $z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{j\omega + R/L}{j\omega + G/C}} \xrightarrow{(42),(43)} z_0 \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \in \mathbb{R}$

τελικά $\alpha_{\gamma\Sigma} \cong \frac{1}{2} G \sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2} \left(G z_0 + \frac{R}{z_0} \right)$

► οι ολικές απώλειες ως άθροισμα των απωλειών στους αγωγούς και στα διηλεκτρικά

