(1)

Ασκηση Μικροκύματα

Οι ιδιότητες απειρου χώρου είναι:

α) Γιά $x>0$: $\epsilon_{r_1}(\omega)$, $\mu_{r_1}(\omega)$, $\sigma_1=0$

β) Γιά $x<0$: $\epsilon_{r_2}(\omega)$, $\mu_{r_2}(\omega)$, $\sigma_2=0$

Στο επίπεδο $x=0$ ισχυει η ρευματική επιφανειακή κατανομή

$$\underset{\sim}{J}_s = \hat{z}\, f(t) \; (A/m)$$

με $f(t)$ τυχαία συναρτηση (t = χρόνος)

Ζητείται ο υπολογισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για $x>0$ και $x<0$.

Το μαγνητικό πεδίο επειδή πρέπει να είναι καθετο στην κατευθυνση του J_s αλλά και στον άξονα διαδοσης x θα είναι

για $x>0$

$$\underline{H_1}(x,t) = \hat{y}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{j\omega t}\, h_1(\omega)\, e^{-j\frac{\omega}{c} n_1(\omega) x}$$

με $n_1(\omega)=\sqrt{\epsilon_{r_1}(\omega)\mu_{r_1}(\omega)}$, $k_0=\frac{\omega}{c}$

για $x<0$

$$H_2(x,t) = \hat{y}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{j\omega t}\, h_2(\omega)\, e^{+j\frac{\omega}{c} n_2(\omega) x}$$

Τα παραπάνω είναι αντιστροφοι μετασχηματισμοί Fourier.

Τα αντιστοιχα ηλεκτρικά πεδία θα είναι

$$\underline{E_1}(x,t) = \hat{z}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{j\omega t}\, h_1(\omega) Z_1(\omega)\, e^{-j\frac{\omega}{c} n_1(\omega) x}$$

οπου $1/Z_1(\omega) = \sqrt{(\varepsilon_0\epsilon_{r_1})/(\mu_0\mu_{r_1})}$

$$E_2(x,t) = \hat{z}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{j\omega t}\, h_2(\omega) Z_2(\omega)\, e^{-j\frac{\omega}{c} n_2(\omega) x}$$

$$1/Z_2(\omega) = \sqrt{(\varepsilon_0\epsilon_r(\omega))/(\mu_0\mu_r(\omega))}$$

(2)

Για να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $h_1(\omega)$ και $h_2(\omega)$ χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες

α) $\underline{E}_1(x,t) = \underline{E}_2(x,t)$ για $x=0$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{j\omega t} h_1(\omega) Z_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{j\omega t} h_2(\omega) Z_2(\omega)$$

πολλαπλασιάζω με $e^{-j\omega' t}$ και ολοκληρώνω από $t=-\infty$ μέχρι $t=+\infty$ και γνωρίζοντας

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega-\omega')t} dt = \delta(\omega-\omega')\, 2\pi$$

έχω

$$h_1(\omega') Z_1(\omega') = h_2(\omega') Z_2(\omega') \qquad (1)$$

β) $$\underset{\sim}{J}_s = \hat{x} \times \left(\underline{H}_1(x,t)\Big|_{x=0^+} - \underline{H}_2(x,t)\Big|_{x=0^-} \right)$$

ή

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{j\omega t} (h_1(\omega) - h_2(\omega))$$

και πολλαπλασιάζοντας πάλι με $e^{-j\omega' t}$ ολοκληρώνοντας από $t=-\infty$ μέχρι $t=+\infty$ βρίσκουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega' t} f(t)\, dt = h_1(\omega') - h_2(\omega') \qquad (2)$$

$$= F(\omega')/2\pi$$

όπου $$F(\omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega' t} f(t)\, dt$$

Λύνοντας τις Εξ. (1) και (2)

$$h_1(\omega') - \frac{h_1(\omega')}{Z_2(\omega')} Z_1(\omega') = \frac{F(\omega')}{2\pi}$$

$$h_1(\omega') = \frac{F(\omega')/(2\pi)}{1 - \dfrac{Z_1(\omega')}{Z_2(\omega')}}$$

$$h_2(\omega') = \frac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega')} \frac{F(\omega')/(2\pi)}{1 - \dfrac{Z_1(\omega')}{Z_2(\omega')}} = \frac{F(\omega')/(2\pi)}{\dfrac{Z_2(\omega')}{Z_1(\omega')} - 1}$$

Γνωρίζοντας την συνάρτηση $F(\omega)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα πεδιακά μεγέθη όπως π.χ.

$$\underline{E}_1(x,t) = \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{j\omega t} \frac{1}{(2\pi)} F(\omega) \frac{Z_1(\omega) Z_2(\omega)}{Z_2(\omega) - Z_1(\omega)}$$