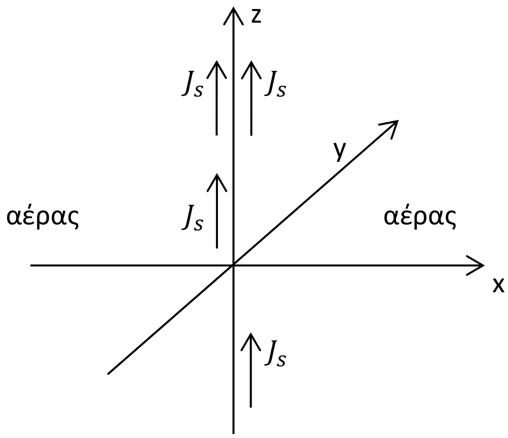
Άσκηση 1

Σε άπειρο τριδιάστατο χώρο αέρα στο επίπεδο x=0 έχει επιβληθεί επιφανειακή ρευματική κατανομή $\underline{J} = \hat{z}f(t)$ (A/m) όπου f(t) είναι μία συνάρτηση του χρόνου t. Ζητείται να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίο για x>0 και x<0.



Γνωρίζουμε ότι στο επίπεδο x=0 θα ισχύει η οριακή συνθήκη

$$\underline{J_s} = \hat{x}x\left(\underline{H}|_{x=0^+} - \underline{H}|_{x=0^-}\right) \qquad (1)$$

Όπου $\underline{H}|_{0^+} =$ το μαγνητικό πεδίο αμέσως δεξιά του επιπέδου x=0

$\underline{H}|_{0^-} =$ το μαγνητικό πεδίο αμέσως αριστερά του επιπέδου x=0

Τα ηλεκτρικά πεδία δεξιά και αριστερά του επιπέδου x=0 θα είναι ίδια και παράλληλα στις γραμμές του ηλεκτρικού ρεύματος $\underline{J_s}$. Τα μαγνητικά πεδία θα είναι αναγκαστικά αντίθετα, δηλαδή:

$$\underline{H}(x,t) = -\underline{H}(-x,t) \qquad (2)$$

Και επειδή το $\underline{H}$ (μαγνητικό) πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στον άξονα x και στο ηλεκτρικό πεδίο θα έχουμε:

$$\underline{H}(x,t) = \hat{y}h(x,t)$$

Άρα από την εξίσωση (1) και (2) έχουμε:

$$\underline{J_s} = \hat{z}f(t) = \hat{x}x\left(\hat{y}(h(x,t)_{x\to 0^+} - \left(-h(-x,t)\right)\right) = \hat{z}2h(x,t)|_{x\to 0^+} = \hat{z}2h(0,t)$$

Οπότε έχω

$$h(0,t) = f(t)$$

Και επειδή για x>0 ισχύει:

$$h(x,t) = h\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)\frac{1}{2}$$

Όπου c=$1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 3 * 10^8 \ m/s$ (ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό), θα έχω το μαγνητικό πεδίο:

$$\underline{H}(x,t) = \hat{y}\frac{1}{2} f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Και ηλεκτρικό πεδίο:

$$\underline{E}(x,t) = \hat{x} x \underline{H}(x,t)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{2} f\left(t - \frac{x}{c}\right)\hat{z}$$

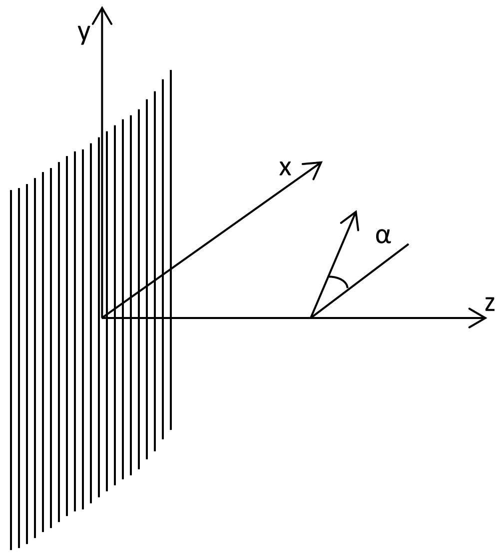
Για x<0 ισχύει αντίστοιχα:

$$\underline{H}(x,t) = -\hat{y}\frac{1}{2} f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\underline{E}(x,t) = \hat{z}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{2} f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Άσκηση 2

Χρησιμοποιώντας πολλά λεπτά σύρματα κατασκευάζουμε μία κουρτίνα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ερώτηση: τι θα συμβεί αν ένα κύμα που διαδίδεται παράλληλα με τον αρνητικά άξονα του z προσπέσει στο επίπεδο z=0. Το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος είναι:

$$\underline{E}_{\pi\rho o\sigma.} = (\hat{x}\cos a + \hat{y}\sin a)\cos(\omega\left(t + \frac{z}{c}\right))$$

η γωνία α φαίνεται στο σχήμα.

Οι αγωγοί είναι παράλληλοι με τον άξονα $\hat{y}$. Η $\hat{y}$ συνιστώσα του κύματος θα βλέπει ένα αγώγιμο τοίχωμα ενώ αντίθετα η $\hat{x}$ συνιστώσα δεν επηρεάζεται από τους αγωγούς.

Σύμφωνα με αυτά η $\hat{y}$ συνιστώσα θα ανακλάται πλήρως ενώ η $\hat{x}$ συνιστώσα θα διαπερνά την κουρτίνα όντας αυτή 'αόρατη' για τη $\hat{x}$ συνιστώσα. Άρα:

Ανακλώμενο κύμα (ηλεκτρικό πεδίο):

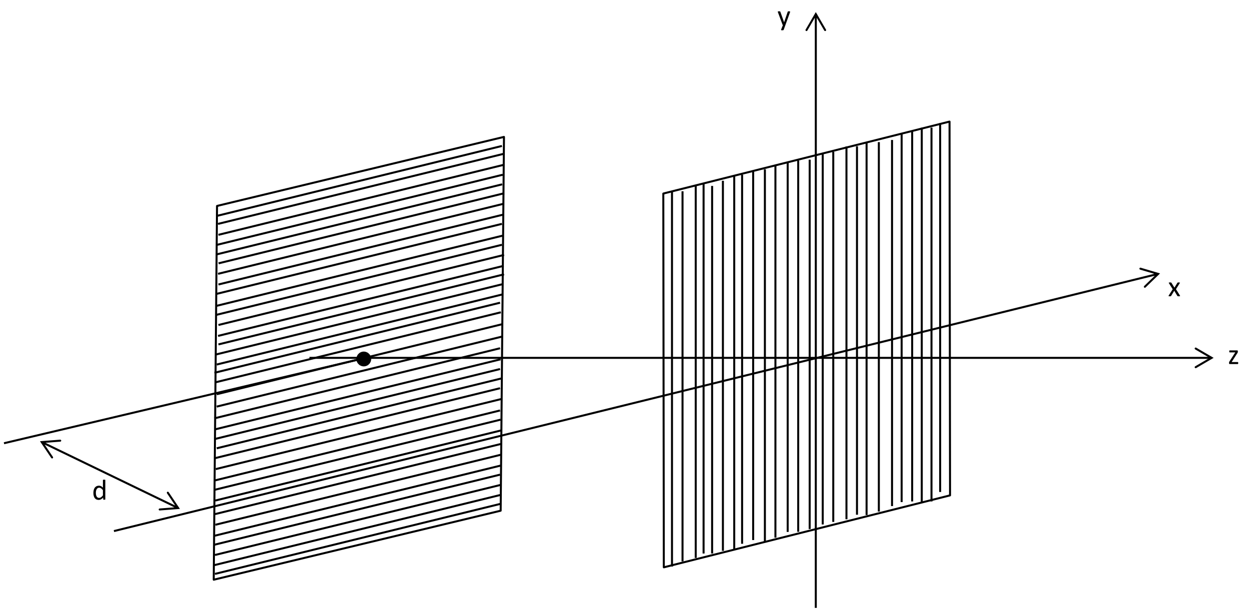
$$\underline{E}_{\alpha\nu.} = -\hat{y}\sin a\cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\ \gamma\iota\alpha\ z > 0$$

Μεταδιδόμενο κύμα

$$\underline{E}_{\mu\varepsilon\tau.} = \hat{x}\cos a\cos\left(\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\right)\ \gamma\iota\alpha\ z < 0$$

Άσκηση 3

Δίνουμε τη διάταξη:



Τι θα συμβεί αν προσπίπτει από z>0 το ίδιο κύμα της άσκησης 2;

Απάντηση:

Στο επίπεδο z=0 θα ανακλαστεί η $\hat{y}$ συνιστώσα. Το κύμα με $\hat{x}$ συνιστώσα θα διέλθει του επιπέδου z=0 αλλά θα ανακλαστεί όλο στο επίπεδο z=-d και θα προστεθεί για z>0 με το προηγούμενο κύμα αφού η φάση του θα αυξηθεί κατά φ=$2k_0 d$ (πήγαινε-έλα διαδρομή). Άρα για z>0 το συνολικό ανακλώμενο κύμα θα είναι:

$$\underline{E}_{\alpha\nu.} = -\hat{y}\sin(a)\cos\left(\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)\right) = -\hat{x}\cos(a)\cos\left(\omega\left(t+\frac{z}{c}\right)+\varphi\right)$$

Αν α$= 45^o$ και φ=$^{\pi}/_{2}$ ή $^{3\pi}/_{2}$ έχουμε κυκλική πόλωση δηλαδή $\frac{4\pi}{\lambda}d = \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$ $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$ $d = \frac{\lambda}{8}$ ή $\frac{3\lambda}{8}$

Άσκηση 4

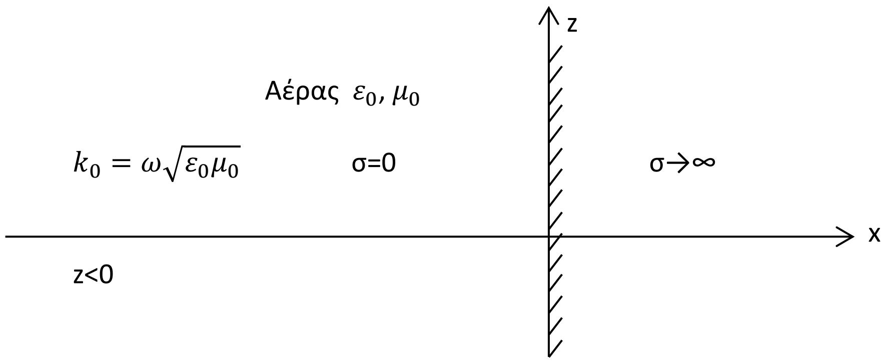
Η πρώτη άσκηση να λυθεί αν αντί του αέρα είχαμε υλικό με διηλεκτρική σταθερά $E_r = E_r(\omega),\ \mu_r(\omega) = 1,\ \sigma = 0$

Υπόδειξη:

Χρησιμοποιούμε μετασχηματισμούς Fourier.

Άσκηση 1

Επίπεδο κύμα με ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r},t) = \hat{z}e(x,t) = A\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ προσπίπτει από z<0 προς άπειρη επιφάνεια αγωγού με άπειρη αγωγιμότητα (σ→ ∞). Να βρεθεί το ανακλώμενο κύμα.



Γράφουμε το προσπίπτον κύμα σε μορφή φασιθέτη:

$$\underline{\dot{E}} = \hat{z}Re(Ae^{j\omega_0 t - jk_0 x}) => \underline{\dot{E}} = \hat{z}e^{-jk_0 x}A$$

Το ανακλώμενο κύμα θα διαδίδεται στην αντίστροφη κατεύθυνση: $\underline{\dot{E}}_{\alpha\nu} = \hat{z}A\dot{R}e^{jk_0 x}$) (R=συντελεστές ανάκλασης).

Στην επιφάνεια x=0 επειδή έχουμε άπειρη αγωγιμότητα θα πρέπει το άθροισμα (συνολικό) ηλεκτρικό πεδίο να μηδενίζεται:

$\underline{\dot{E}}_{\pi\rho} + \underline{\dot{E}}_{\alpha\nu} = 0$ για x=0 ή

$$A + A\dot{R} = 0 \; => \; \dot{R} = -1$$

Άρα το συνολικό πεδίο θα είναι

$\underline{\dot{E}}_{\Sigma} = \underline{E}_{\pi\rho} + \underline{E}_{\alpha\nu} = \hat{z}\left(Ae^{-jk_0 x} - Ae^{jk_0 x}\right) = -2Aj\sin(k_0 x)\,\hat{z}$

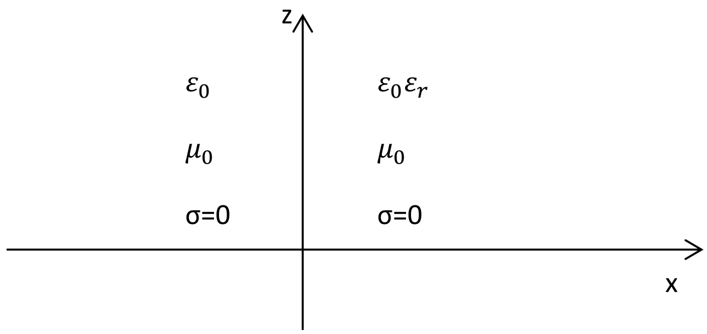
και το πραγματικό πεδίο

$\underline{E}_{\Sigma}(\underline{r},t) = \hat{z}2\sin(k_0 x)\sin(\omega_0 t)$

έχουμε ένα στάσιμο κύμα.

Άσκηση 2

Επίπεδο κύμα της προηγούμενης άσκησης προσπίπτει σε ημιάπειρο χώρο με διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_r (αντί\ \sigma \to +\infty)$. Να υπολογιστεί το ανακλώμενο και μεταδιδόμενο κύμα.



Προσπίπτον κύμα: $\underline{\dot{E}}_{\pi\rho} = A e^{-jk_0 x} \hat{z}$ (ηλεκτρικό πεδίο)

$\underline{\dot{H}}_{\pi\rho} = -\frac{A}{Z_0} e^{-jk_0 x} \hat{y}$ (x<0)

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$ (κυματική αντίσταση)

Ανακλώμενο κύμα: $\underline{E}_{\alpha\nu} = \dot{R} A e^{jk_0 x} \hat{z}$ (x<0)

$\underline{H}_{\alpha\nu} = +\frac{A}{Z_0} \dot{R} e^{jk_0 x} \hat{z}$ (x<0)

Μεταδιδόμενο κύμα: $\underline{\dot{E}}_{\mu\varepsilon\tau} = \dot{T} \dot{A} e^{-jk_0 \sqrt{\varepsilon_r} x} \hat{z}$ (x<0) (x>0)

$$\underline{\dot{H}}_{\mu\varepsilon\tau} = -\dot{T} \frac{\dot{A}}{Z_1} e^{-jk_0 \sqrt{\varepsilon_r} x} \hat{z}$$

$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

$\dot{R}$= συντελεστής ανάκλασης, $\dot{T}$=συντελεστής μετάδοσης.

Προσοχή τα πρόσημα στα μαγνητικά πεδία για το ανακλώμενο πρέπει να είναι αντίθετο με το προσπίπτον ενώ το μεταδιδόμενο όπως το προσπίπτον.

Μετά εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες που είναι η συνέχεια των πεδίων στην επιφάνεια x=0.

Ηλεκτρικό πεδίο: $\dot{E}_{\pi\rho} + \dot{E}_{\alpha\nu} = \dot{E}_{\mu\varepsilon\tau}$ (x=0)

$$A + \dot{R}A = \dot{T}A$$

Μαγνητικό πεδίο: $\dot{H}_{\pi\rho} + \dot{H}_{\alpha\nu} = \dot{H}_{\mu\varepsilon\tau}$ (x=0)

$$-\frac{A}{Z_0}+\frac{A}{Z_0}\dot{R}=-\dot{T}\frac{A}{Z_0\big/\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Οπότε

$$1+\dot{R}=\dot{T}$$

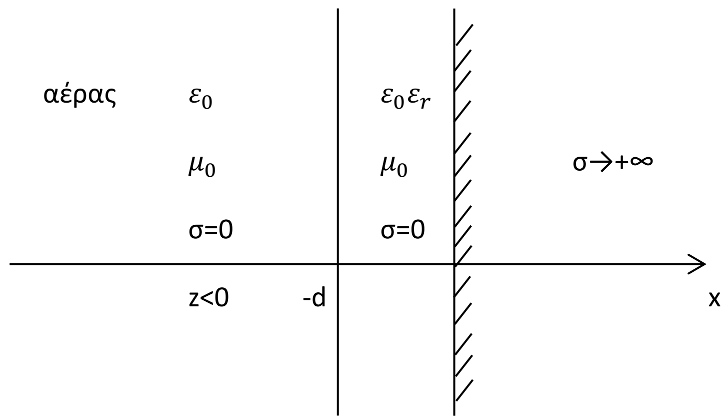
$$-1+\dot{R}=-\dot{T}\sqrt{\varepsilon_r}$$

Αφαιρούμε: $2=\dot{T}(1+\sqrt{\varepsilon_r}) => \dot{T}=\frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon_r}}$

και $\dot{R}=\dot{T}-1=\frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon_r}}-1=\frac{2-1-\sqrt{\varepsilon_r}}{1+\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon_r}}{1+\sqrt{\varepsilon_r}}$

Άσκηση 3

Δίνουμε την εξής διάταξη:



Επίσης προσπίπτει ένα κύμα από x<0.

Να υπολογιστεί το ανακλώμενο κύμα.

Υπόδειξη Λύσης (να τη λύσετε μόνοι σας)

1) Στον χώρο x<-d τα πεδία θα είναι το προσπίπτον και το ανακλώμενο
2) Στον χώρο –d<x<0. Τα πεδία είναι:

$$\underline{E_1} = (A_1 e^{jk_0\sqrt{\varepsilon_r}x} + A_2 e^{-jk_0\sqrt{\varepsilon_r}x})\hat{z}$$

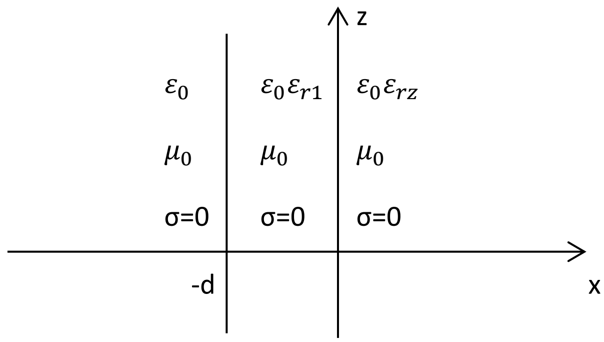
$$\underline{H_1} = (A_1 e^{jk_0\sqrt{\varepsilon_r}x} - A_2 e^{-jk_0\sqrt{\varepsilon_r}x})\hat{y}\frac{1}{z_0/\sqrt{\varepsilon_r}}$$

3) Στον χώρο x>0 το πεδίο είναι μηδέν ($\sigma \to \infty$)

Εφαρμόζω τις οριακές συνθήκες για x=0 και x=-d. Λύνω και βρίσκω τους συντελεστές $A_1, A_2, \dot{R}$.

Άσκηση 4

Δίνουμε τη διάταξη:



Πάλι προσπίπτει επίπεδο κύμα από x<0 να υπολογίσετε τα κύματα σε όλους τους χώρους έχοντας κατανοήσει τις προηγούμενες ασκήσεις.