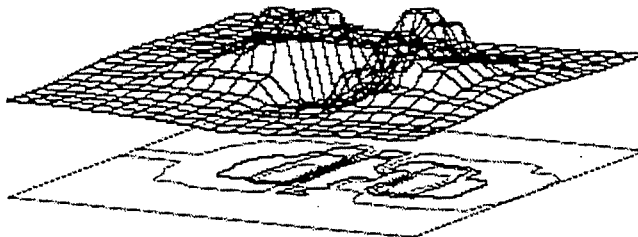




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Υπολογιστικές Τεχνικές Για Συστήματα Μετάδοσης Πληροφορίας



Δήμητρα – Θεοδώρα Ι. Κακλαμάνη
Καθηγήτρια, ΕΜΠ

Αθήνα, 2005

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Η Αναγκαιότητα των Υπολογιστικών Τεχνικών	1
1.1 Η Σημασία των Υπολογιστικών Τεχνικών και της Αποδοτικής Υλοποίησής τους.....	1
1.2 Το Παράδειγμα της Μικροταινίας	2
1.2.1 Η Κατάστρωση μιας Εξίσωσης για τη Μικροταινία	5
1.2.2 Η Επίλυση της Εξίσωσης της Μικροταινίας.....	9
1.3 Η Διάρθρωση των Υπολοίπων Κεφαλαίων	12
Βιβλιογραφία	15
2. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μοντελοποίηση Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας	16
2.1 Μια Εναλλακτική Προσέγγιση στο Πρόβλημα της Μικροταινίας.....	16
2.1.1 Η Μεταβολική Κατάστρωση	18
2.1.2 Διακριτοποίηση με Γραμμικές Συναρτήσεις Παρεμβολής.....	20
2.2 Γραμμικοί Τελεστές και Χώροι Εσωτερικών Γινομένων	23
2.3 Προβολική Κατάστρωση	26
2.4 Η Μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων	30
2.5 Τεχνικές Point Matching.....	33
2.6 Υπολογιστικές Μέθοδοι Ολοκληρωτικών Εξισώσεων.....	34
2.6.1 Κατάστρωση της Ολοκληρωτικής Εξίσωσης Μοντελοποίησης Κυλινδρικής Κεραίας.....	35
2.6.2 Επίλυση με τη Μέθοδο των Ροπών.....	38
2.7 Η Μέθοδος των Βοηθητικών Πηγών.....	41
2.7.1 Συγγενείς Μέθοδοι.....	41
2.7.2 Περιγραφή της «Κλασικής» Μεθόδου των Βοηθητικών Πηγών.....	43
2.7.3 Πλεονεκτήματα σε Σχέση με τη Μέθοδο των Ροπών	48
2.7.4 Επιλογή του Τύπου, της Θέσης και του Αριθμού των Βοηθητικών Πηγών - Σύγκλιση και Ευστάθεια	48

2.7.5 Εφαρμογή σε Διδιάστατα Προβλήματα: Σκέδαση από Διηλεκτρικό Κύλινδρο	51
2.7.6 Περιγραφή της Τροποποιημένης Μεθόδου των Βοηθητικών Πηγών	60
2.7.7 Παράρτημα: Ακτινοβολία Σταθερού Νηματοειδούς Ηλεκτρικού Ρεύματος Απείρου Μήκους.....	62
2.8 Υπολογιστικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων	66
2.8.1 Πεπερασμένα Στοιχεία με Διανυσματικές Συναρτήσεις Βάσης για Προβλήματα Σκέδασης	67
2.8.2 Πεπερασμένα Στοιχεία με Βαθμωτές Συναρτήσεις Βάσης για Διανυσματικά Πεδιακά Προβλήματα Σκέδασης και Ακτινοβολίας	78
2.8.3 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου.....	85
Βιβλιογραφία	103
3. Θέματα Υλοποίησης	118
3.1 Στοιχεία Υλοποίησης Υπολογιστικών Τεχνικών	118
3.2 Πλεγματοποίηση.....	119
3.2.1 Ορθογώνια Δομημένα Πλέγματα.....	119
3.2.2 Αυτόματη Δημιουργία Πλεγμάτων	122
3.3 Υπολογισμοί των Πινάκων Συντελεστών των Γραμμικών Συστημάτων των Αριθμητικών Μεθόδων.....	128
3.4 Αριθμητική Ολοκλήρωση	132
3.4.1 Ο Κανόνας του Euler	132
3.4.2 Ο Απλός και Σύνθετος Κανόνας του Τραπεζίου.....	133
3.4.3 Ο Κανόνας του Simpson.....	134
3.4.4 Ολοκλήρωση Romberg.....	135
3.4.5 Γκαουσιανή Ολοκλήρωση	137
3.4.6 Κανόνες Gauss-Kronrod.....	139
3.4.7 Γκαουσιανή Αριθμητική Ολοκλήρωση για Τρίγωνα	140
3.5 Τεχνικές Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων	141
3.5.1 Η Τεχνική Αποσύνθεσης LU	142

3.5.2 Τεχνικές Αποθήκευσης Αραιών Πινάκων	145
3.5.3 Επαναληπτικές Τεχνικές Επίλυσης Συστημάτων.....	147
3.5.4 Κριτήρια Τερματισμού Επαναληπτικών Τεχνικών	150
3.5.5 Δείκτης Κατάστασης.....	152
Βιβλιογραφία	153
4. Πιστοποίηση Αποτελεσμάτων - Βελτιστοποίηση	156
4.1 Πιστοποίηση Λογισμικού Μοντελοποίησης Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας	156
4.2 Παραδείγματα Πιστοποίησης Λογισμικού με Αναλυτικά Επιλύσιμα Προβλήματα .	159
4.2.1 Αριθμητικός Έλεγχος Κώδικα Πεπερασμένων Στοιχείων.....	159
4.2.2 Αριθμητικός Έλεγχος Κωδίκων Βοηθητικών Πηγών.....	167
4.3 Γενετικοί Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης.....	175
Βιβλιογραφία	178
5. Αντικειμενοστραφής Προγραμματισμός.....	179
5.1 Σύντομη Σύγκριση Δεδομένο-κεντρικού και Αντικειμενοστραφούς Προγραμματισμού	179
5.2 Βασικές Έννοιες Αντικειμενοστραφούς Προγραμματισμού	181
5.2.1 Η Έννοια του Αντικειμένου.....	181
5.2.2 Η Έννοια της Ενθυλάκωσης (encapsulation concept)	181
5.2.3 Επικοινωνία Αντικειμένων	182
5.2.4 Η Έννοια της Κλάσης.....	183
5.2.5 Η Έννοια της Κληρονομικότητας (inheritance).....	184
5.2.6 Η Έννοια των Διεπαφών (interfaces).....	185
5.2.7 Η Έννοια του Πολυμορφισμού (polymorphism)	186
5.3 Παράδειγμα Εφαρμογής στην Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων	187
Βιβλιογραφία	189
6. Παραλληλισμός.....	190

6.1 Παράλληλες Αρχιτεκτονικές.....	190
6.2 Τεχνικές Παράλληλου Προγραμματισμού.....	192
6.3 Η Κατανομή του Υπολογιστικού Φορτίου στους Επεξεργαστές.....	193
6.4 Η Επικοινωνία Ανάμεσα στους Επεξεργαστές.....	195
6.5 Ο Παραλληλισμός της Επαναληπτικής Μεθόδου.....	198
6.6 Επιτάχυνση και Αποδοτικότητα.....	200
6.7 Το Παράλληλο Προγραμματιστικό Περιβάλλον PVM.....	201
6.8 Το Σύστημα Παράλληλης Επεξεργασίας MPI.....	203
Βιβλιογραφία.....	204
7. Κατανεμημένη Επεξεργασία.....	206
7.1 Οι Εξελίξεις στα Δίκτυα Υπολογιστών - Συναφείς Τεχνολογίες και Αρχιτεκτονικές.....	206
7.2 Η Κοινή Βάση.....	208
7.2.1 Δικτυακή Επικοινωνία.....	208
7.2.2 Σύγχρονη και Ασύγχρονη Μετάδοση.....	209
7.2.3 Πελάτες, Εξυπηρετητές και Ομότιμες Οντότητες.....	210
7.2.4 Διεπαφές Προγραμματισμού Εφαρμογών (Application Programming Interfaces - APIs).....	210
7.2.5 Τερματικές Διεπαφές.....	211
7.2.6 Μηνύματα.....	212
7.2.7 Κλήση Απομακρυσμένων Διαδικασιών - Remote Procedure Call.....	213
7.3 Client/Server.....	213
7.4 Μεσιμικό - Middleware.....	214
7.4.1 Κατανεμημένο Περιβάλλον Υπολογισμών.....	215
7.4.2 Αξιόπιστη μεταφορά μηνυμάτων.....	215
7.5 Κατανεμημένα Αντικείμενα - Distributed Objects.....	216

7.5.1 Java RMI - Απομακρυσμένη Κλήση Μεθόδων	216
7.5.2 Η τεχνολογία DCOM.....	217
7.5.3 Η Αρχιτεκτονική CORBA	218
7.5.4 Η Τεχνολογία Κινητού Κώδικα	219
7.6 Σύγκριση των Τεχνολογιών	219
Βιβλιογραφία	221
8. Η Τεχνολογία των Κινητών Πρακτόρων.....	222
8.1 Ιστορική Αναδρομή	222
8.2 Ευφυείς Πράκτορες.....	224
8.3 Κινητοί Πράκτορες	226
8.4 Η Πλατφόρμα Grasshopper	229
8.4.1 Γενικές Έννοιες	229
8.4.2 Η Δομή ενός Κινητού Πράκτορα.....	230
8.4.3 ΟΚύκλος Ζωής ενός Πράκτορα.....	231
8.4.4 Η Πλατφόρμα	231
8.4.5 Επικοινωνία	233
Βιβλιογραφία	234
9. Οπτικοποίηση.....	237
9.1 Η Οπτικοποίηση στη Σύγχρονη Επιστήμη: Σημασία και Αναγκαιότητα	237
9.2 Η Οπτικοποίηση στην Προσομοίωση Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας.....	238
9.3 Οπτικοποίηση με το Πακέτο Λογισμικού MATLAB	240
9.4 Εισαγωγή στη Γλώσσα Προγραμματισμού Εικονικής Πραγματικότητας VRML	243
9.4.1 Τι Είναι η VRML.....	243
9.4.2 Ιστορική Αναδρομή	243
9.4.3 Τα Αρχεία της VRML.....	244
9.4.4 VRML Browsers.....	245

9.4.5	Η Δομή των VRML Κόσμων.....	246
9.4.6	Οι Κόμβοι και τα Πεδία τους.....	247
9.4.7	Δημιουργία Απλών Σχημάτων.....	249
9.4.8	Κείμενα στη VRML.....	250
9.4.9	Προχωρημένες Τεχνικές Σύνθεσης Σχημάτων.....	250
9.4.10	Έλεγχος της Εμφάνισης των Σχημάτων.....	254
9.4.11	Κόμβοι Ομαδοποίησης.....	255
9.4.12	Κόμβοι Μετασχηματισμών.....	256
9.5	Εφαρμογές της VRML για την Οπτικοποίηση Αποτελεσμάτων Μοντελοποίησης Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας.....	257
9.5.1	Ψηφιακά Μοντέλα Ανύψωσης (Digital Elevation Models).....	257
9.5.2	Διαγράμματα Ακτινοβολίας.....	259
9.6	Τεχνικές Στερεοσκοπικής Οπτικοποίησης (Stereoscopic Visualization) για την Τρισδιάστατη Απεικόνιση Κατανομών του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου.....	260
9.6.1	Εφαρμογή του Ανοικτού ΚυβερνοΟλογραφικού (CyberHolographic) Προτύπου για Στερεοσκοπική Οπτικοποίηση.....	260
	Βιβλιογραφία.....	263
10.	Λογοκεντρικός Προγραμματισμός.....	264
10.1	Η Αναγκαιότητα του Λογοκεντρικού Προγραμματισμού.....	264
10.2	Μια Σύντομη Γνωριμία με το FWEB.....	265
10.3	Απλό Παράδειγμα Λογοκεντρικού Κώδικα.....	267
10.4	Υπομονάδα Αριθμητικής Διανυσμάτων.....	274
10.4.1	Ορισμός Τύπου Δεδομένων.....	275
10.4.2	Προδιαγραφή Διαπροσωπείας.....	275
10.4.3	Υλοποίηση Υπορουτινών και Συναρτήσεων.....	277
10.5	Πώς Μπορεί να Ξεκινήσει Κάποιος να Χρησιμοποιεί το FWEB.....	281
	Βιβλιογραφία.....	282

Κεφάλαιο 1

Η Αναγκαιότητα των Υπολογιστικών Τεχνικών

"The purpose of computing, is insight not numbers."
R. W. P. Hamming

1.1 Η Σημασία των Υπολογιστικών Τεχνικών και της Αποδοτικής Υλοποίησής τους

Στο μνημειώδες έργο του "Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων", ο Thomas Kuhn παρατήρησε πως, η υιοθέτηση νέων τεχνολογιών και μαθηματικών εργαλείων έδωσε επανειλημμένα στη διάρκεια της ανθρώπινης ιστορίας το έναυσμα για μεγάλα άλματα στην επιστήμη. Το δέκατο έβδομο αιώνα, η ανακάλυψη του κλάδου της ανάλυσης από το Νεύτωνα, του επέτρεψε να κωδικοποιήσει για πρώτη φορά μαθηματικά τους νόμους της φύσης και να προχωρήσει στην ανάπτυξη αναλυτικών μεθόδων για την επίλυση απλών φυσικών προβλημάτων. Στον εικοστό αιώνα, η ανάπτυξη της θεωρίας της πληροφορίας και η υλοποίηση της έννοιας των μηχανών Turing παρείχε στους μηχανικούς τη δυνατότητα να προσομοιάσουν τους νόμους της φύσης. Έτσι, μπόρεσαν να βρουν για πρώτη φορά λύσεις σε σύνθετα και ρεαλιστικά προβλήματα, των οποίων η πολυπλοκότητα δεν επέτρεπε την εφαρμογή των αναλυτικών μεθόδων επίλυσης.

Πλέον, η υπολογιστική διερεύνηση, με τη μορφή των αριθμητικών προσομοιώσεων, γίνεται ολοένα και περισσότερο αποδεκτή σαν μια τρίτη βασική επιστημονική μεθοδολογία, συμπληρωματική της θεωρητικής ανάλυσης και του πειραματισμού, στην επιστημονική και τεχνική έρευνα. Οι

υπολογιστικές προσομοιώσεις καλύπτουν το κενό ανάμεσα στα φυσικά πειράματα και τις αναλυτικές προσεγγίσεις και μας παρέχουν ποιοτική και ποσοτική αντίληψη φαινομένων, που είναι πολύ σύνθετα για αναλυτικές μεθόδους και πολύ ακριβά ή επικίνδυνα για πειραματική μελέτη.

Τέτοιου τύπου είναι τα φαινόμενα, που αφορούν στα συστήματα μετάδοσης πληροφορίας. Πολύτιμο εργαλείο για την αντιμετώπιση των δύσκολων και σημαντικών αυτών προβλημάτων αποτελεί ο υπολογιστικός ηλεκτρομαγνητισμός, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί σαν η τομή των κλάδων του εφαρμοσμένου ηλεκτρομαγνητισμού, της αριθμητικής ανάλυσης και της επιστήμης των υπολογιστών.

Τα επιστημονικά/ερευνητικά άλματα που έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια στην περιοχή αυτή είναι πράγματι εντυπωσιακά. Μόλις πριν μια δεκαετία, ο υπολογιστικός ηλεκτρομαγνητισμός περιοριζόταν στην αντιμετώπιση προβλημάτων σκέδασης και είχε μερικώς εφαρμοστεί σε απλά προβλήματα ανάλυσης και σχεδίασης κεραίων. Σήμερα, οι υπολογιστικές τεχνικές επεκτείνονται σε όλα τα πεδία φυσικού στρώματος τηλεπικοινωνιακών συστημάτων και συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας γενικότερα.

Από τη μοντελοποίηση κατά τη φάση σχεδίασης και ανάπτυξης πρωτοποριακών συστημάτων ακτινοβολίας (όπως οι κεραίες fractal, ή οι λεγόμενες ευφυείς κεραίες (smart antennas)) και μικροκυματικών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (MIC και MMICs) υψηλών ταχυτήτων με ταυτόχρονη σχεδίαση νέων υλικών, έως την ελαχιστοποίηση των ηλεκτρομαγνητικών παρεμβολών στο περιβάλλον μιας εν λειτουργία επικοινωνιακής συσκευής (EMI/EMC calculations) και την εκτίμηση των απωλειών ενός δορυφορικού σήματος εξαιτίας βροχοπτώσεων ή χιονοπτώσεων, οι εφαρμογές των υπολογιστικών τεχνικών στο πεδίο των συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας καλύπτουν ένα ευρύτατο φάσμα και τις συναντά κανείς σε κάθε τομέα της σύγχρονης τεχνολογίας επικοινωνιών.

Είναι, επομένως, προφανής η μεγάλη σημασία, που έχει για το σύγχρονο μηχανικό η εξοικείωση με τη θεωρία και την πρακτική των υπολογιστικών τεχνικών. Εξίσου σημαντική, όμως, είναι και η αποδοτική υλοποίησή τους κατά την ανάπτυξη του αντίστοιχου λογισμικού.

Το συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον της βιομηχανίας για πακέτα προσομοίωσης ολόκληρων επικοινωνιακών συστημάτων, το κόστος και η συνεχιζόμενη επιτυχία των προσομοιώσεων να αναπτύσσουν βελτιστοποιημένες σχεδιάσεις πιο γρήγορα και πιο φθηνά θα συνεχίσουν, χωρίς αμφιβολία, να τροφοδοτούν την ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών και ταχύτερων εργαλείων προσομοίωσης.

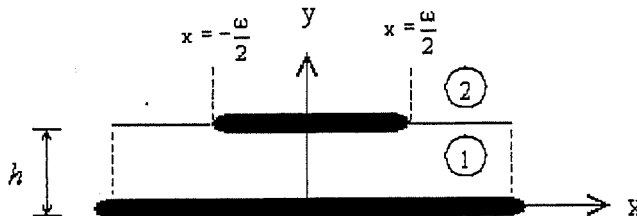
1.2 Το Παράδειγμα της Μικροταινίας

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τις θεμελιώδεις αρχές, τη δομή, και τον τρόπο λειτουργίας των υπολογιστικών τεχνικών, κρίνουμε σκόπιμο στο σημείο αυτό να

συμπεριλάβουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Το παράδειγμα αυτό αφορά τον αριθμητικό υπολογισμό της χωρητικότητας μιας μικροταινίας.

Η επιλογή του εν λόγω παραδείγματος δεν έγινε τυχαία. Υπαγορεύτηκε από το γεγονός πως, η μικροταινία συνδυάζει την απλότητα στη δομή της, με ένα ευρύ φάσμα πρακτικών χρήσεων, από μέσο κυματοδότησης έως στοιχείο ακτινοβολίας. Από πολλές απόψεις, η μικροταινία αποτελεί αντιπροσωπευτικό δείγμα των διατάξεων που μας ενδιαφέρουν, γι αυτό και θα προχωρήσουμε στην παρουσίαση της ανάλυσής της. Μέσω του συγκεκριμένου παραδείγματος, θα έχουμε την ευκαιρία να επισημάνουμε ορισμένα βασικά θέματα, που αφορούν στην υπολογιστική ανάλυση κάθε συστήματος μετάδοσης πληροφορίας.

Μια μικροταινιακή διάταξη έχει τη γενική γεωμετρία του Σχήματος 1.1. Όπως μπορούμε να δούμε εκεί, μια τυπική μικροταινία αποτελείται από ένα μεταλλικό αγωγό πλάτους ω τοποθετημένο πάνω σε μια διηλεκτρική πλάκα πάχους h , η άλλη πλευρά της οποίας είναι αγωγίμα καλυμμένη.



Σχήμα 1.1: Μια τυπική μικροταινιακή διάταξη.

Το πρόβλημα της κυματοδότησης σε μια μικροταινία δεν είναι καθόλου απλή υπόθεση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως, στη γενική περίπτωση, οι ρυθμοί που κυματοδηγούνται σε αυτή είναι συνθέσεις των ρυθμών TE και TM και για το λόγο αυτό ονομάζονται υβριδικά κύματα. Όμως στην (αρκετά συνηθισμένη στην πράξη) περίπτωση, που το μήκος κύματος στο κενό λ είναι πολύ μικρότερο από το πάχος h της μικροταινίας, μπορούμε να θεωρήσουμε προσεγγιστικά τον επικρατέστερο ρυθμό σαν ένα κύμα TEM. Δηλαδή, σαν ένα κύμα που δεν έχει ούτε ηλεκτρική, ούτε μαγνητική συνιστώσα κατά την κατεύθυνση διάδοσής του ($E_z = H_z = 0$).

Κάτι τέτοιο διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό την ανάλυση, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε γι'αυτή στατικές μεθόδους. Εδώ συναντάμε μια βασική αρχή κάθε απόπειρας ανάλυσης: πριν καταφύγουμε στην εφαρμογή υπολογιστικών τεχνικών για τη διεκπεραίωσή της, πρέπει να επιχειρούμε, μέσω καταλλήλων προσεγγιστικών παραδοχών, να την απλοποιήσουμε, όσο περισσότερο γίνεται, χωρίς να την καταστήσουμε ακατάλληλη για το σύστημα, στο οποίο αναφέρεται.

Ένα άλλο σημαντικό σημείο κάθε ανάλυσης είναι η επιλογή του μεγέθους (ή των μεγεθών), που επιχειρούμε να προσδιορίσουμε, από το αναλυόμενο

σύστημα. Στην περίπτωση της μικροταινίας επιλέγουμε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα C ανά μονάδα μήκους (F/m). Η επιλογή αυτή δεν είναι αυθαίρετη. Στηρίζεται στο γεγονός, πως οι βασικότερες ποσότητες, που χαρακτηρίζουν το φαινόμενο της κυματοδηγησης σε μια μικροταινία, η ταχύτητα διάδοσης v και η χαρακτηριστική αντίσταση Z_0 , δίνονται συναρτήσει της χωρητικότητας C , όπως μπορούμε να δούμε στις δύο παρακάτω σχέσεις

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.1)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.2)$$

Βέβαια, παρατηρώντας τις παραπάνω σχέσεις διαπιστώνουμε πως, τα v και Z_0 , εκτός από τη χωρητικότητα C , εξαρτώνται και από την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους L (H/m). Μήπως αυτό σημαίνει πως, εκτός από το ηλεκτροστατικό πρόβλημα εύρεσης της C , είμαστε υποχρεωμένοι να λύσουμε και ένα μαγνητοστατικό για τον υπολογισμό της αυτεπαγωγής L ; Όχι, απαραίτητα. Φυσικά είναι και αυτή μια δυνατότητα, προτιμότερο όμως είναι να επιλέξουμε να λύσουμε ένα δεύτερο ηλεκτροστατικό πρόβλημα. Θα δείξουμε ευθύς αμέσως πώς.

Ας θεωρήσουμε πως, στη μικροταινία του Σχήματος 1.1 αντικαθιστούμε το διηλεκτρικό στρώμα της περιοχής 1 με αέρα (πως θέτουμε δηλαδή $\epsilon_r = 1$). Η γραμμή μεταφοράς, που προκύπτει στην περίπτωση αυτή, καλείται ταινιογραμμή. Αν λύσουμε το ηλεκτροστατικό πρόβλημα για μια ταινιογραμμή, βρίσκουμε τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους της C_0 . Όμως, όπως είναι προφανές, στην περίπτωση της ταινιογραμμής, η ταχύτητα διάδοσης του TEM ρυθμού της είναι c , δηλαδή η ταχύτητα του φωτός στον ελεύθερο χώρο. Επόμεως, από τη σχέση (1.1), βρίσκουμε πως, η αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους θα είναι

$$L = \frac{1}{c^2 C_0} \quad (1.3)$$

Η τιμή για την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους, που μας δίνει η σχέση (1.3), θα πρέπει να ισχύει και για τη μικροταινία (με $\epsilon_r \neq 1$), αφού η διάταξη αυτή είναι μαγνητικά ισοδύναμη με την ταινιογραμμή (καθώς και για τις δύο έχουμε $\mu_r = 1$). Συνεπώς, αντικαθιστώντας την (1.3) στις (1.1) και (1.2), παίρνουμε

$$v = c \sqrt{\frac{C_0}{C}} \quad (1.4)$$

$$Z_0 = \frac{1}{c\sqrt{C_0 C}} \quad (1.5)$$

Άρα, με τη λύση δύο ηλεκτροστατικών προβλημάτων (ενός για την C και ενός για την C_0), μπορούμε να αναλύσουμε πλήρως τη λειτουργία μιας μικροταινίας. Είναι φανερό πως, ο συνδυασμός αυτός είναι προτιμότερος από την επίλυση ενός ηλεκτροστατικού και ενός μαγνητοστατικού προβλήματος, αφού έτσι χρειαζόμαστε έναν και όχι δύο υπολογιστικούς κώδικες.

1.2.1 Η Κατάσρωση μιας Εξίσωσης για τη Μικροταινία

Ας δούμε τώρα κάπως πιο αναλυτικά τη μορφή του ηλεκτροστατικού προβλήματος, που πρέπει να αναλύσουμε. Στα πλαίσια της επίλυσης του προβλήματος αυτού, πρέπει να προσδιορίσουμε την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού (ας τη συμβολίσουμε με u) στις περιοχές 1 και 2 του Σχήματος 1.1. Το δυναμικό αυτό πρέπει να ικανοποιεί τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace, που είναι

$$\nabla^2 u = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.6)$$

Επειδή, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε παρατηρώντας το Σχήμα 1.1, η μικροταινιακή διάταξη είναι συμμετρική ως προς y , το δυναμικό της u θα είναι άρτια συνάρτηση ως προς x , δηλαδή θα έχουμε $u(x, y) = u(-x, y)$. Αυτό είναι κάτι, που λαμβάνουμε υπόψη σε κάθε περίπτωση υπολογιστικής ανάλυσης. Δηλαδή, να ελέγχουμε την ύπαρξη ενδεχομένων συμμετριών στο πρόβλημά μας, ώστε εκμεταλλευόμενοι τις, να περιορίζουμε τις άγνωστες ποσότητες, που αναζητούμε να προσδιορίσουμε.

Εκτός από τη διαφορική εξίσωση, που πρέπει να ικανοποιεί το δυναμικό, οφείλουμε να καθορίσουμε και τις οριακές συνθήκες για αυτό. Έχουμε δύο βασικά είδη οριακών συνθηκών:

- 1) Πάνω στους μεταλλικούς αγωγούς, έχουμε ισοδυναμικές επιφάνειες με γνωστές τιμές δυναμικού.
- 2) Για είναι συμμετρικό το δυναμικό περί τον άξονα y , πρέπει η κάθετη παράγωγός του να μηδενίζεται πάνω στον άξονα αυτό.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε πως, ο προσδιορισμός του δυναμικού είναι ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (boundary value problem), που συνίσταται από την εξίσωση (1.6) και οριακές συνθήκες του τύπου

$$u = u_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = 0$$

Στις οριακές συνθήκες καθορισμένων τιμών ($u=u_0$), αναφερόμαστε κάνοντας χρήση του όρου Dirichlet, μια και ο Dirichlet υπήρξε ο πρώτος, που έλυσε την εξίσωση του Laplace με τέτοιου τύπου συνθήκες σε όλα τα σύνορα. Για παρόμοιους λόγους, τις συνθήκες που εμπλέκουν παραγώγους, συνήθως τις καλούμε συνθήκες Neumann.

Για την περίπτωση της μικροταινίας του Σχήματος 1.1, θεωρούμε ότι, η κάτω μετ αλλική επιφάνεια ($y=0$) είναι γειωμένη, ενώ η άνω μεταλλική λωρίδα βρίσκεται σε δυναμικό 1 Volt. Δηλαδή, οι συνθήκες Dirichlet για το σύστημα μετάδοσης πληροφορίας, που εξετάζουμε, είναι

$$u(x, y) = 1, \text{ για } |x| < \omega/2, y = h \quad (1.7)$$

$$u(x, y) = 0, \text{ για } -\infty < x < \infty, y = 0 \quad (1.8)$$

Το ερώτημα που προκύπτει τώρα, είναι πώς μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση Laplace σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες (1.7) και (1.8). Είναι φανερό πως, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα την πολύ βολική τεχνική χωρισμού των μεταβλητών στην περίπτωση αυτή. Αυτό συμβαίνει γιατί η οριακή συνθήκη (1.7), που αναφέρεται σε μια επιφάνεια σταθερής συντεταγμένης y ($y=h$), εμφανίζει εξάρτηση από τη συντεταγμένη x (είναι 1 για $|x| < \omega/2$ και 0 για $|x| \geq \omega/2$). Επομένως, το πρόβλημα συνοριακών τιμών, που έχουμε, είναι μη διαχωρίσιμο (not separable) ως προς x και y .

Έχουμε, όμως, τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών ως προς την y και μια άλλη μεταβλητή. Θα δούμε ευθύς πώς. Για να επιτύχουμε το διαχωρισμό, θα χρειαστεί να καταφύγουμε στη χρήση του μετασχηματισμού Fourier. Με τη βοήθεια του μαθηματικού αυτού εργαλείου, μπορούμε να γράψουμε το ηλεκτροστατικό δυναμικό της μικροταινίας, με τη μορφή του ακόλουθου ολοκληρώματος

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k_x, y) e^{jk_x x} dk_x \quad (1.9)$$

Μάλιστα, επειδή, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συνάρτηση $u(x, y)$ είναι άρτια ως προς x , η παραπάνω σχέση (1.9) μπορεί να γραφεί σαν

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k_x, y) \cos(k_x x) dk_x \quad (1.10)$$

Με τον παραπάνω μετασχηματισμό, κατορθώσαμε να μετατρέψουμε μια συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x , σε συνάρτηση της φασματικής μεταβλητής k_x . Και καθώς ο πυρήνας (kernel) του μετασχηματισμού Fourier αποτελεί χαρακτηριστική λύση της εξίσωσης Laplace, στο μετασχηματισμένο

πρόβλημα συνωριακών τιμών μπορούμε να αποσυνδέσουμε (uncouple) και να απομονώσουμε την εξάρτηση από τη μεταβλητή y . Το αποτέλεσμα της αποσύνδεσης αυτής είναι η ακόλουθη συνήθης διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - k_x^2 U = 0 \quad (1.11)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής δίνεται από την έκφραση

$$U(k_x, y) = A \cosh(k_x y) + B \sinh(k_x y) \quad (1.12)$$

όπου \cosh και \sinh είναι οι συναρτήσεις υπερβολικού συνημιτόνου και ημιτόνου, αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη μηδενισμού του δυναμικού στο επίπεδο $y=0$, βρίσκουμε

$$U(k_x, 0) = 0 \Rightarrow A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (1.13)$$

Συνεπώς, στην περιοχή 1 του διηλεκτρικού υποστρώματος, η κατανομή του ηλεκτροστατικού δυναμικού θα είναι

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} B(k_x) \sinh(k_x y) \cosh(k_x x) dk_x \quad (1.14)$$

Στην περιοχή 2, η αντίστοιχη κατανομή, εκτός από το να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και τη συνθήκη συνέχειας στην επιφάνεια $y=h$, θα πρέπει να είναι σύμφωνη και με τη λεγόμενη συνθήκη του μακράν πεδίου (συνθήκη ακτινοβολίας). Η συνθήκη αυτή απαιτεί το δυναμικό να φθίνει στο μηδέν, καθώς η συντεταγμένη y τείνει στο άπειρο. Οι λύσεις της εξίσωσης Laplace, που επιδεικνύουν ανάλογη συμπεριφορά, έχουν την ακόλουθη εκθετική μορφή

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} C(k_x) e^{-k_x y} \cos(k_x x) dk_x \quad (1.15)$$

αφού σε κάθε περίπτωση $k_x > 0$.

Για να προσδιορίσουμε τους αγνώστους συντελεστές $B(k_x)$ και $C(k_x)$, θα κάνουμε χρήση των οριακών συνθηκών πάνω στην επιφάνεια $y=h$. Εκεί το δυναμικό θα πρέπει να είναι συνεχές, ενώ η y συνιστώσα της διηλεκτρικής μετατόπισης θα εμφανίζει ασυνέχεια, ανάλογη της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου πάνω στην επιφάνεια αυτή. Θα έχουμε δηλαδή

$$u_1(x, h) = u_2(x, h) \quad (1.16)$$

$$-\varepsilon_0 \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=h} + -\varepsilon_0 \varepsilon_r \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=h} = \sigma(x) \quad (1.17)$$

Βέβαια, η επιφανειακή πυκνότητα του στατικού φορτίου πάνω στην τυπωμένη ταινία μάς είναι άγνωστη. Αν αντικαταστήσουμε τις κατανομές (1.14) και (1.15) στις οριακές συνθήκες (1.16) και (1.17), παίρνουμε

$$B(k_x) \sinh(k_x h) = e^{-k_x h} C(k_x) \quad (1.18)$$

$$\int_0^{\infty} k_x (\varepsilon_r B(k_x) \cosh(k_x h) + C(k_x) e^{-k_x h}) \cos(k_x x) dk_x = \frac{\sigma(x)}{\varepsilon_0} \quad (1.19)$$

Έχουμε, πλέον, μια αλγεβρική και μια ολοκληρωτική σχέση. Ένας τρόπος να απαλλαγούμε από το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της σχέσης (1.19) είναι να εκμεταλλευτούμε την ορθογωνιότητα (orthogonality) των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos(k_x x)$. Η ιδιότητα αυτή εκφράζεται μαθηματικά με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης

$$\int_0^{\infty} \cos(k_x x) \cos(k'_x x) dx = \frac{\pi}{2} \delta(k_x - k'_x) \quad (1.20)$$

Αν, λοιπόν, πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (1.19) με τη συνάρτηση $\cos(k_x x)$ και ολοκληρώσουμε ως προς x , από 0 έως ∞ , κάνοντας χρήση και της (1.20), λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση

$$k_x (\varepsilon_r B(k_x) \cosh(k_x h) + C(k_x) e^{-k_x h}) = \frac{2}{\pi \varepsilon_0} \int_0^{\omega/2} \sigma(x') \cos(k_x x') dx' \quad (1.21)$$

Για να καταλήξουμε στην παραπάνω σχέση, λάβαμε επίσης υπόψη μας πως, για $x > \omega/2$, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι μηδενική. Έχουμε, πλέον, στη διαθεσή μας ένα σύστημα, που αποτελείται από τις εξισώσεις (1.18) και (1.21). Λύνοντας το σύστημα αυτό ως προς $B(k_x)$ και $C(k_x)$, βρίσκουμε τις ακόλουθες τιμές για τους συντελεστές αυτούς

$$B(k_x) = \frac{2 \int_0^{\omega/2} \sigma(x') \cos(k_x x') dx'}{\pi \varepsilon_0 \sinh(k_x h) k_x (\varepsilon_r \coth(k_x h) + 1)} \quad (1.22)$$

$$C(k_x) = \frac{2e^{k_x h} \int_0^{\omega/2} \sigma(x') \cos(k_x x') dx'}{\pi \epsilon_0 k_x (\epsilon_r \coth(k_x h) + 1)} \quad (1.23)$$

Μας έχει απομείνει μια ακόμα οριακή σύνθηκη, που δεν την έχουμε αξιοποιήσει. Θα το κάνουμε ευθύς αμέσως. Πρόκειται για την εξίσωση (1.7). Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.23) στην έκφραση (1.15) και απαιτώντας η τελευταία για $y=h$ και $0 < x < \omega/2$ να μας δίνει 1 Volt, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{2}{\pi \epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{e^{k_x h}}{k_x (\epsilon_r \coth(k_x h) + 1)} \left\{ \int_0^{\omega/2} \sigma(x') \cos(k_x x') dx' \right\} e^{-k_x h} \cos(k_x x) dk_x = 1 \quad (1.24)$$

Την παραπάνω σχέση μπορούμε να τη γράψουμε ισοδύναμα και με την εξής μορφή

$$\int_0^{\omega/2} G(x, x') \sigma(x') dx' = 1, 0 < x < \omega/2 \quad (1.25)$$

όπου

$$G(x, x') = \frac{2}{\pi \epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{\cos(k_x x) \cos(k_x x')}{k_x (\epsilon_r \coth(k_x h) + 1)} dk_x \quad (1.26)$$

είναι η συνάρτηση Green για το ηλεκτροστατικό πρόβλημα της μικροταινίας του Σχήματος 1.1. Λύνοντας την ολοκληρωτική εξίσωση (1.25), προσδιορίζουμε την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\sigma(x)$ (Cb/m^2) και έχουμε τη δυνατότητα, μέσω μιας απλής ολοκλήρωσης, να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα C

$$C = 2 \int_0^{\omega/2} \sigma(x) dx \quad (1.27)$$

που είναι και το βασικό μας ζητούμενο.

1.2.2 Η Επίλυση της Εξίσωσης της Μικροταινίας

Πώς όμως μπορούμε να επιλύσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση σαν την (1.25); Στο σημείο αυτό οι αναλυτικές τεχνικές δεν μπορούν να μας βοηθήσουν. Για το λόγο αυτό πρέπει να καταφύγουμε στη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Μια από τις αποτελεσματικότερες αριθμητικές τεχνικές για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων σαν την (1.25) είναι η λεγόμενη μέθοδος Galerkin, τα βασικά σημεία της οποίας θα περιγράψουμε εν συντομία στη συνέχεια.

Το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της μεθόδου, είναι η έκφραση της άγνωστης ζητούμενης ποσότητας (στην περίπτωση μας της $\sigma(x)$), με τη μορφή ενός αθροίσματος γραμμικά ανεξαρτήτων συναρτήσεων, που καλούμε συναρτήσεις βάσης

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(x) \quad (1.28)$$

Οι συναρτήσεις βάσης είναι γνωστές και, ουσιαστικά, το ζητούμενο στη μέθοδο Galerkin είναι ο προσδιορισμός των αγνώστων συντελεστών τους a_i . Η έκφραση μιας ποσότητας με τη μορφή αναπτύγματος μιας οικογένειας συναρτήσεων έχει πολλά κοινά σημεία με την ανάλυση Fourier, όπως είναι προφανές. Μόνο που, όπως ήδη αναφέραμε, οι συναρτήσεις βάσης στην ανάλυση Fourier είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, κάτι που δεν συμβαίνει στη γενική περίπτωση των συναρτήσεων βάσης της μεθόδου Galerkin.

Αν οι συναρτήσεις βάσης f_i είναι ορθογώνιες, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε σχετικά απλά τους συντελεστές τους a_i . Απλώς αντικαθιστούμε το ανάπτυγμα (1.28) στην ολοκληρωτική εξίσωση (1.25) και, αφού πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της με κάθε συνάρτηση βάσης ($f_j, j=1, \dots, N$), τα ολοκληρώνουμε ως προς x από 0 έως $\omega/2$. Για την περίπτωση ορθογώνιων συναρτήσεων βάσης, όλα τα ολοκληρώματα γινομένων διαφορετικών συναρτήσεων ($f_i f_j, i \neq j$) μηδενίζονται, με αποτέλεσμα κάθε μια από τις N προκύπτουσες σχέσεις να είναι και μια εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο, κάποιο (διαφορετικό κάθε φορά) συντελεστή a_i .

Οι συναρτήσεις βάσης, όμως, για να μπορούν να εκφράσουν μέσω του γραμμικού τους συνδυασμού την άγνωστη ποσότητα του προβλήματός μας, πρέπει να χαρακτηρίζονται από ορισμένες μαθηματικές ιδιότητες (όπως συμμετρία, παραγωγισιμότητα, κατάλληλη συμπεριφορά στις γεωμετρικές αιχμές), που έχουν άμεση σχέση με τη φυσική του συστήματος, που μοντελοποιούμε. Δυστυχώς, οι ιδιότητες αυτές δεν ικανοποιούνται πάντα από ορθογώνια σύνολα συναρτήσεων. Για την ακρίβεια, αυτό συμβαίνει αρκετά σπάνια στην πράξη και τότε λέμε πως, το πρόβλημά μας είναι αναλυτικά επιλύσιμο (με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε απειροσειρά) και δεν χρειάζεται να καταφύγουμε σε αριθμητικές τεχνικές.

Τι κάνουμε, όμως, στη γενική περίπτωση μη ορθογώνιων συναρτήσεων βάσης; Τα πρώτα μας βήματα είναι πανομοιότυπα. Και πάλι γράφουμε την άγνωστη ποσότητα σαν ένα άθροισμα γνωστών συναρτήσεων βάσης με άγνωστα βάρη και, στην συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την προκύπτουσα εξίσωση κατά μέλη με κάθε συνάρτηση βάσης και ολοκληρώνουμε τα γινόμενα στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεών μας. Τώρα, όμως, τα ολοκληρώματα των γινομένων διαφορετικών συναρτήσεων βάσης δεν μηδενίζονται, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να πάρουμε εξισώσεις, που να λύνουμε απευθείας ως προς a_i . Αντίθετα, αυτό που παίρνουμε είναι ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους (τους συντελεστές a_i).

$$\sum_{i=1}^N S_{ij} a_i = R_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.29)$$

όπου, στην περίπτωση της μικροταινίας, είναι

$$S_{ij} = \int_0^{\omega/2} \int_0^{\omega/2} f_i(x) G(x, x') f_j(x') dx' dx \quad (1.30)$$

$$R_i = \int_0^{\omega/2} f_i(x) dx \quad (1.31)$$

Το γραμμικό αυτό σύστημα μπορούμε να το λύσουμε αριθμητικά και να βρούμε τους άγνωστους συντελεστές a_i . Όσο για τη χωρητικότητα C ανά μονάδα μήκους της μικροταινίας, αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα (1.28) στην έκφραση (1.27) και κάνοντας χρήση και της (1.31), βρίσκουμε πως είναι

$$C = 2 \int_0^{\omega/2} \sigma(x) dx = 2 \int_0^{\omega/2} \sum_{i=1}^N a_i f_i(x) dx = 2 \sum_{i=1}^N a_i \int_0^{\omega/2} \sum_{i=1}^N f_i(x) dx = 2 \sum_{i=1}^N a_i R_i \quad (1.32)$$

Η διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω, μπορεί να εφαρμοστεί με διάφορα (μη ορθογώνια) σύνολα συναρτήσεων. Ενδεικτικά αναφέρουμε πως, για την ανάπτυξη της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου της μικροταινίας του Σχήματος 1.1, ένα κατάλληλο σύνολο είναι αυτό των εκθετικών συναρτήσεων

$$f_i(x) = e^{L_i x} \quad (1.33)$$

Οι συντελεστές L_i στον εκθέτη είναι πραγματικοί αριθμοί κατάλληλα επιλεγμένοι για την ικανοποιητική περιγραφή της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου στη μικροταινία. Η επιλογή καταλλήλων συναρτήσεων βάσης είναι μεγάλης σημασίας για την αποτελεσματική αριθμητική επίλυση ενός συστήματος.

Το είδος των συναρτήσεων βάσης καθορίζει, μεταξύ άλλων, την ευκολία και τον τρόπο υπολογισμού των ολοκληρωμάτων των σχέσεων (1.30) και (1.31). Αρκετά συχνά τα ολοκληρώματα αυτά δεν είναι δυνατόν να τα υπολογίσουμε αναλυτικά και πρέπει να κάνουμε χρήση τεχνικών αριθμητικής ολοκλήρωσης. Επιπλέον, όπως είναι προφανές, ο τύπος των συναρτήσεων βάσης επηρεάζει και διαμορφώνει καθοριστικά τις ιδιότητες του γραμμικού συστήματος (1.29).

Σε μια ακραία περίπτωση, το σύστημα αυτό μπορεί να είναι μη επίλυσιμο. Ακόμα όμως και αν η επίλυσή του είναι δυνατή (όπως συνήθως συμβαίνει στην πράξη), δεν αποκλείεται, κάτω από ορισμένες συνθήκες, τα αριθμητικά σφάλματα, που εμφανίζονται κατά την διάρκειά της, να είναι τόσο σημαντικά,

που να καθιστούν προβληματική ή πρακτικά άχρηστη τη λύση που λαμβάνουμε. Καθίσταται, επομένως, σαφές πως, για την αποτελεσματική αριθμητική αντιμετώπιση ενός προβλήματος, δεν αρκεί να εξασφαλίσουμε τη σωστή φυσική μοντελοποίησή του, αλλά να λάβουμε υπόψη μας και τη συμπεριφορά (ακρίβεια και ευστάθεια) των υπολογιστικών εργαλείων (όπως ολοκλήρωσης, ή επίλυσης συστημάτων), που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτή.

Το θέμα αυτό είναι αρκετά προχωρημένο και ξεφεύγει από τα όρια μιας σύντομης εισαγωγής. Αν και θα επανέλθουμε σε αυτό στα πλαίσια παραγράφων επόμενων κεφαλαίων, αξίζει να συμπεριλάβουμε εδώ ορισμένες σχετικές παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα, η ευκολία ή η δυσκολία στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος (σαν το (1.29)) εξαρτάται από τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του πίνακα συντελεστών του (S_{ij}). Στην ιδανική περίπτωση που οι συναρτήσεις βάσης είναι ορθογώνιες, ο πίνακας αυτός είναι διαγώνιος και η επίλυση του συστήματος είναι τετριμμένη (trivial): προκύπτει διαιρώντας κάθε στοιχείο του διανύσματος σταθερών όρων με το αντίστοιχο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα συντελεστών.

Δεν πρέπει, επομένως, να μας προξενεί έκπληξη το γεγονός πως, όσο περισσότερο κοντά στο διαγώνιο είναι ο πίνακας συντελεστών ενός συστήματος, τόσο ευκολότερη (υπολογιστικά) είναι, στις περισσότερες περιπτώσεις, η λύση του. Η ομοιότητα αυτή έχει τη μορφή των διαγωνίων στοιχείων, που είναι πολύ μεγαλύτερα σε μέτρο, όχι μόνον από τα υπόλοιπα στοιχεία της γραμμής και της στήλης στην οποία ανήκει, αλλά ακόμα και από αθροίσματα των απολύτων τιμών τους (dominant diagonal). Η συγκεκριμένη ιδιότητα πινάκων (την μαθηματική έκφραση της οποίας θα παρουσιάσουμε σε μεταγενέστερο κεφάλαιο) είναι στην περίπτωση της μεθόδου Galerkin άμεση απόρροια των σχέσεων μεταξύ των συναρτήσεων βάσης, που χρησιμοποιούμε. Όπως είναι προφανές, όσο πιο κοντά σε ορθογώνιες είναι οι συναρτήσεις βάσης, τόσο πιο κοντά στο διαγώνιο είναι ο πίνακας του συστήματος που θα λάβουμε. Αυτό, επομένως, είναι δυνατό να αποτελέσει ένα αξιολογικό κριτήριο επιλογής, ανάμεσα σε εναλλακτικά υποψήφια σύνολα συναρτήσεων βάσης.

1.3 Η Διάρθρωση των Υπολοίπων Κεφαλαίων

Ανεξάρτητα, πάντως, από τις συναρτήσεις βάσης, το θεμελιώδες χαρακτηριστικό της μεθόδου Galerkin (και παρόμοιων τεχνικών) είναι πως, μετασχηματίζει μια συναρτησιακή εξίσωση σε ένα καθαρά αλγεβρικό πρόβλημα (εν προκειμένω την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος). Αυτός ο μετασχηματισμός είναι πολύ βολικός, γιατί το αλγεβρικό πρόβλημα μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε πολύ αποτελεσματικά με μια πληθώρα εργαλείων, δανεισμένων από την αριθμητική ανάλυση.

Τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να καταστρώσουμε τέτοιους μετασχηματισμούς και τη θεωρία, πάνω στην οποία βασίζονται, θα τα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο (το δεύτερο κατά σειρά). Συγκεκριμένα, αφού πρώτα επιχειρήσουμε να δώσουμε μια ενοποιημένη ερμηνεία των εν λόγω μετασχηματισμών σαν προβολές από απειροδιάστατους χώρους Hilbert σε πεπερασμένης διάστασης Ευκλείδειους υποχώρους, θα αναφερθούμε πιο ειδικά

στις ιδιαίτερα σημαντικές μεθόδους των ροπών, των βοηθητικών πηγών, των πεπερασμένων στοιχείων και των πεπερασμένων διαφορών.

Αναμφίβολα, η μαθηματική κατάστρωση (formulation) των υπολογιστικών τεχνικών είναι ένα εξαιρετικά σημαντικό θέμα. Όπως, όμως, έχουμε ήδη τονίσει, εξίσου μεγάλη σημασία έχει και ο τρόπος, με τον οποίο υλοποιούμε αυτές τις τεχνικές. Στα πλαίσια του **τρίτου κεφαλαίου**, που έχει τίτλο «Θέματα Υλοποίησης», συζητούνται τα θεμελιώδη ζητήματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης, της αυτόματης δημιουργίας πλεγμάτων και της επίλυσης (απευθείας και επαναληπτικής) γραμμικών συστημάτων.

Το τελικό προϊόν κάθε υπολογιστικής τεχνικής είναι μια προσέγγιση της λύσης του προβλήματος, που εξετάζουμε. Την ακρίβεια και την καταλληλότητα της προσέγγισης αυτής δεν πρέπει, σε καμία περίπτωση, να τη θεωρούμε δεδομένη. Μόνο μέσω προσεκτικών ελέγχων και συγκρίσεων, μπορούμε να εκτιμήσουμε τα σφάλματα που εμπεριέχονται στην υπολογιστική μας προσέγγιση και να λάβουμε, έτσι, ένα μέτρο της ποιότητας των λύσεών μας. Με τα αντικείμενα αυτά ασχολούμαστε στο **τέταρτο κεφάλαιο**, όπου επίσης κάνουμε μια σύντομη αναφορά στο πολύ ενδιαφέρον θέμα της βελτιστοποίησης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, με τη χρήση γενετικών αλγορίθμων.

Με το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται το πρώτο μέρος του βιβλίου, που έχει περισσότερο μαθηματικό χαρακτήρα. Τα επόμενα έξι κεφάλαια, που αντλούν τη θεματολογία τους καθαρά από το χώρο της Πληροφορικής, καλύπτουν αποκλειστικά ζητήματα συστηματικής και αποδοτικής ανάπτυξης λογισμικού, κατά την προσομοίωση συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας.

Καταρχήν, στο **πέμπτο κεφάλαιο**, εισάγουμε την αντικειμενοστραφή (object oriented) λογική θεώρησης του λογισμικού, σε αντιδιαστολή με τη δεδομένο-κεντρική (data centric). Μέσα από αντιστοιχίες με παραδείγματα του πραγματικού κόσμου, παρουσιάζονται οι βασικές αρχές του Αντικειμενοστραφούς Προγραμματισμού και χαρακτηριστικά του, όπως ο πολυμορφισμός και η κληρονομικότητα, που τον καθιστούν, σε πολλές περιπτώσεις, ως τον πλέον αποδοτικό τρόπο ανάπτυξης λογισμικού.

Τα επόμενα τρία κεφάλαια επικεντρώνονται σε εναλλακτικούς τρόπους αντιμετώπισης των τεράστιων απαιτήσεων σε υπολογιστική ισχύ (μνήμη και χρόνο εκτέλεσης), που εμφανίζονται κατά την επίλυση μεγάλης κλίμακας προβλημάτων. Τέτοια, βέβαια, είναι και τα περισσότερα προβλήματα μοντελοποίησης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, που έχουμε να αντιμετωπίσουμε στην πράξη.

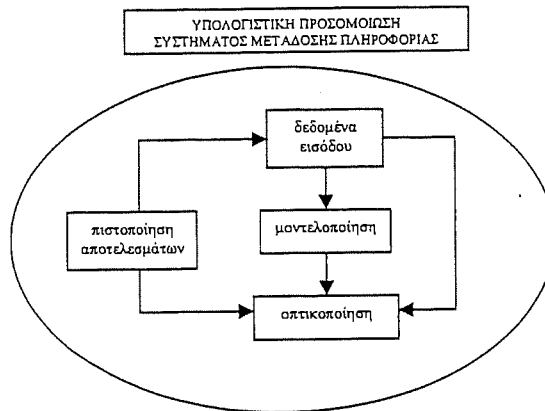
Έτσι, στο **έκτο κεφάλαιο**, ασχολούμαστε με τον Παραλληλισμό. Παρουσιάζονται οι βασικές αρχές και τεχνικές του παράλληλου προγραμματισμού, δίνεται ένα παράδειγμα παραλληλοποίησης κώδικα πεπερασμένων στοιχείων, ενώ το κεφάλαιο περιλαμβάνει και μια σύντομη παρουσίαση του παράλληλου προγραμματιστικού περιβάλλοντος PVM (Parallel Virtual Machine) και του συστήματος παράλληλης επεξεργασίας MPI (Message Passing Interface).

Στην κατεύθυνση αντιμετώπισης ολοένα και πιο απαιτητικών υπολογιστικά προβλημάτων, καθώς και της εκτέλεσής τους σε όσο το δυνατό λιγότερο χρόνο, οι τεχνικές της Κατανεμημένης Επεξεργασίας διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο, αφού δίνουν στους μηχανικούς τη δυνατότητα επίλυσης μεγάλης κλίμακας προβλημάτων μοντελοποίησης, σε συνεχώς λιγότερο χρόνο και με πολύ καλή σχέση κόστους/απόδοσης. Παράλληλα, η αύξηση του μεγέθους και της απόδοσης των δικτύων υπολογιστών αποτελούν τόσο την αιτία, όσο και το αποτέλεσμα του γεγονότος ότι, η διασύνδεση στο δίκτυο δεν αποτελεί, πλέον, μια ακριβή διαδικασία και υποστηρίζεται από πολλά προϊόντα του εμπορίου, ενώ επιπρόσθετα και σε συνδυασμό με τις εξελίξεις στις ασύρματες επικοινωνίες, καθίσταται δυνατή, ανεξάρτητα από τη φυσική θέση του χρήστη, ενισχύοντας την ανάπτυξη των λεγόμενων εν κινήσει υπολογισμών (mobile computing). Έτσι, η ανάπτυξη κατάλληλης υποδομής λογισμικού, ώστε να γίνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη εκμετάλλευση των κατανεμημένων υπολογιστικών πόρων δικτύων, σε αντιδιαστολή με τη χρήση υπερυπολογιστών, είναι όχι μόνο δυνατή, αλλά και επιθυμητή. Το **έβδομο κεφάλαιο** περιλαμβάνει μια επισκόπηση των τεχνικών κατανεμημένης υπολογιστικής επεξεργασίας, όπου καλύπτονται ουσιαδεις έννοιες και δημοφιλείς υλοποιήσεις τους, με παράλληλη παρουσίαση των δυνατών και αδύνατων σημείων τους.

Επειδή η ιδέα του «κινητού κώδικα» (mobile code) απέκτησε καινούργια διάσταση, κυρίως μέσω της διατύπωσης των βασικών αρχιτεκτονικών και τεχνολογικών αρχών, που αποτελούν το υπόβαθρο της Τεχνολογίας Κινητών Πρακτόρων, στην τεχνολογία αυτή αφιερώνεται ολόκληρο το **όγδοο κεφάλαιο**, όπου παρουσιάζεται και μία από τις δημοφιλέστερες πλατφόρμες ανάπτυξης και υλοποίησης κινητών πρακτόρων, το Grasshopper.

Το επόμενο θέμα, με το οποίο ασχολείται το **ένατο κεφάλαιο**, είναι αυτό της Οπτικοποίησης. Πρόκειται για ιδιαίτερα σημαντική συνιστώσα της υπολογιστικής προσομοίωσης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, γιατί η οπτικοποίηση, σε συνδυασμό με τις υπολογιστικές τεχνικές μοντελοποίησης, μπορεί να αποτελέσει ένα πολύτιμο εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας των φυσικών μηχανισμών, που ευθύνονται για τη συμπεριφορά σύνθετων και πρωτοποριακών συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, βοηθώντας μας να αξιολογήσουμε και να προβλέψουμε σωστά τη λειτουργία τους. Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται και μια εισαγωγή στη Γλώσσα Μοντελοποίησης Εικονικής Πραγματικότητας (Virtual Reality Modelling Language - VRML) και στο Ανοικτό ΚυβερνοΟλογραφικό Πρότυπο (Open CyberHolographic Standard).

Τέλος, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, επειδή οι σύγχρονοι κώδικες προσομοίωσης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας είναι, συνήθως, αρκετά περίπλοκοι και μακροσκελείς, ενώ συχνά απαιτούν, για την ανάπτυξη, κατανόηση και συντήρησή τους, τη συνεργασία προγραμματιστικών ομάδων, ακόμα και από απόσταση, η επαρκής τεκμηρίωσή τους είναι πολύ σημαντική. Έτσι, στο **δέκατο κεφάλαιο**, η τεχνική του Λογοκεντρικού Προγραμματισμού (Literate Programming) προτείνεται σαν μεθοδολογία τεκμηρίωσης λογισμικού και παρουσιάζεται μια από τις πλέον σύγχρονες εκδοχές του WEB συστήματος δομημένης τεκμηρίωσης, το FWEB.



Σχήμα 1.2: Ο κύκλος της υπολογιστικής προσομοίωσης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας.

Ολοκληρώνοντας το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο και την παρουσίαση του περιεχομένου των υπολοίπων κεφαλαίων, θα πρέπει να είναι καθαρό στον αναγνώστη τους ότι, η εισαγωγή δεδομένων (είτε αυτά αφορούν την αριθμητική μέθοδο και την υπολογιστική υλοποίησή της, είτε αφορούν παραμέτρους του αναλυόμενου συστήματος), η μοντελοποίηση με τη χρήση διαφόρων υπολογιστικών μεθόδων και τεχνικών αποδοτικής υλοποίησής τους, η πιστοποίηση των αποτελεσμάτων και η οπτικοποίηση, αλληλεπιδρούν και συγκροτούν αυτό που καλείται υπολογιστική προσομοίωση συστήματος μετάδοσης πληροφορίας, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2.

Βιβλιογραφία

- [1]. Ν. Κ. Ουζούνου, *Εισαγωγή στα Μικροκύματα*, Αθήνα, 1986.
- [2]. Μ. Ν. Ο. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, CRC Press, 1992.
- [3]. Α. F. Peterson, S. L. Ray and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press, 1998.

Κεφάλαιο 2

Αριθμητικές Μέθοδοι για Μοντελοποίηση Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας

2.1 Μια Εναλλακτική Προσέγγιση στο Πρόβλημα της Μικροταινίας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε έναν αριθμητικό τρόπο υπολογισμού της χωρητικότητας μιας μικροταινίας. Η διαδικασία, που ακολουθήσαμε εκεί, αν και ιδιαιτέρως αποτελεσματική, υπήρξε σε μεγάλο βαθμό εξειδικευμένη στο συγκεκριμένο πρόβλημα, με συνέπεια να μην είναι προφανής η γενίκευσή της για άλλα συστήματα. Για το λόγο αυτό, θα επανέλθουμε στο πρόβλημα της μικροταινίας, θέτοντάς το σε νέες βάσεις, με τρόπο που θα μας επιτρέψει να επισημάνουμε ορισμένα βασικά θέματα της μοντελοποίησης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας.

Για να ξεκινήσουμε τη νέα μας προσέγγιση, θα χρειαστεί να ανατρέξουμε σε μια θεμελιώδη φυσική αρχή, αυτή της Ελαχίστης Δυναμικής Ενέργειας (Minimum Potential Energy Principle). Σύμφωνα με την αρχή αυτή, τα φυσικά μεγέθη σε ένα σύστημα (εν προκειμένω τη μικροταινία) ακολουθούν κατανομές, που ελαχιστοποιούν την αποθηκευμένη πεδιακή ενέργεια ανά μονάδα μήκους.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφέρουμε πως, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, η Αρχή Ελαχίστης Ενέργειας είναι ισοδύναμη μαθηματικά με την εξίσωση του Laplace. Κάτι τέτοιο σημαίνει πως, μια δυναμική κατανομή, που ικανοποιεί την εξίσωση αυτή, ελαχιστοποιεί επίσης την ενέργεια του συστήματος και το αντίστροφο.

Όπως ήδη αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το πρόβλημα υπολογισμού της χωρητικότητας μιας μικροταινίας είναι ουσιαστικά ένα ηλεκτροστατικό πρόβλημα. Για το λόγο αυτό, θα στρέψουμε την προσοχή μας στην ηλεκτροστατικά αποθηκευμένη ενέργεια ενός στατικού πεδίου, που δίνεται από τη σχέση

$$W = \frac{1}{2} \iiint u(P)q(P)d\Omega_p \quad (2.1)$$

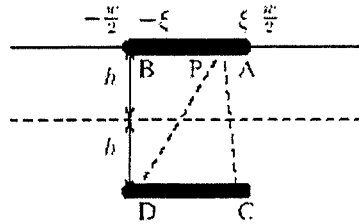
όπου το ανωτέρω ολοκλήρωμα το λαμβάνουμε σε όλες τις περιοχές του συστήματός μας, που περιέχουν φορτία. Με $q(P)$ συμβολίζουμε την τοπική πυκνότητα φορτίου στο σημείο P , όπου βρίσκεται το χωρικό διαφορικό στοιχείο $d\Omega_p$. Ας δούμε τώρα, πώς εφαρμόζεται η έκφραση (2.1) στην περίπτωση της μικροταινίας.

Επειδή το σύστημα της μικροταινίας αποτελείται από επιφανειακούς αγωγούς απειροστού (πρακτικά μηδενικού) πάχους και μονωτές, τα φορτία, όπως είναι φυσικό, θα συγκεντρώνονται πάνω στους αγωγούς με τη μορφή επιφανειακών κατανομών σ . Αυτό σημαίνει πως, η σχέση (2.1) θα μετασχηματιστεί σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στις επιφάνειες των αγωγών της μικροταινίας.

$$W = \frac{1}{2} \iint u(P)\sigma(P)dS_p \quad (2.2)$$

Μάλιστα, αν αναλογιστούμε πως, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, αντιλαμβανόμαστε πως πρέπει να δουλέψουμε με μεγέθη (W,s) ανά μονάδα μήκους, με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα να ανάγεται από επιφανειακό σε επικαμπύλιο.

Θεωρώντας πως, το δυναμικό u στη σχέση (2.2) οφείλεται αποκλειστικά στα επιφανειακά φορτία των αγωγών της μικροταινίας, μπορούμε να το υπολογίσουμε με την υπέρθεση των δυναμικών, που οφείλονται στα φορτία αυτά. Για να διευκολυνθούμε στον υπολογισμό μας αυτό, μπορούμε να κάνουμε χρήση της τεχνικής του κατοπτρισμού και να αντικαταστήσουμε το τέλεια αγωγίμο επίπεδο γείωσης ($y=0$), με ένα είδωλο της αγωγίμης λωρίδας ($-\omega/2 \leq x \leq \omega/2$, $y=h$). Το είδωλο αυτό θα έχει το ίδιο μήκος (ω) με την αρχική λωρίδα, αντίθετη κατανομή φορτίου και θα είναι τοποθετημένο παράλληλα στον άξονα x , στο επίπεδο $y=-h$, όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Εφαρμογή της μεθόδου του κατοπτρισμού σε μια μικροταινιακή διάταξη. $PA = |x - \xi|$, $PB = |x + \xi|$, $PC = \sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}$, $PD = \sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}$.

Το ενδιαφέρον μας για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού δυναμικού $u(x)$ επικεντρώνεται πάνω στην επιφάνεια της λωρίδας. Πηγές του δυναμικού αυτού είναι τα επιφανειακά φορτία στην άνω λωρίδα και τα ίσα και αντίθετα φορτία του ειδώλου της. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη μας πως, το στοιχειώδες γραμμικό φορτίο $\sigma(\xi)d\xi$ στην περιοχή $[0, \omega/2]$ συνοδεύεται από ένα ακριβώς ίδιο στη θέση $(-\xi, h)$ και ίσα, αλλά αντίθετα, φορτία στις θέσεις $(\xi, -h)$ και $(-\xi, -h)$, βρίσκουμε πως, η σχέση, που μας δίνει το δυναμικό στη μικροταινία, είναι η

$$u(x) = - \int_0^{\omega/2} \frac{\sigma(\xi)}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|x - \xi|}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}} \frac{|x + \xi|}{\sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}} d\xi \quad (2.3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.2) και (2.3), παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για την αποθηκευμένη ηλεκτροστατική ενέργεια της μικροταινιας

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\omega/2} \int_0^{\omega/2} \ln \left(\frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}}{|x - \xi|} \frac{\sqrt{(x + \xi')^2 + (2h)^2}}{|x + \xi'|} \right) \sigma(\xi)\sigma(\xi')d\xi'd\xi \quad (2.4)$$

2.1.1 Η Μεταβολική Κατάστρωση

Όπως ήδη αναφέραμε, η συνάρτηση της αποθηκευμένης ενέργειας W του συστήματος πρέπει να εμφανίζει ακρότατο για την ορθή κατανομή του δυναμικού του. Είναι προφανές πως, η ορθή κατανομή δυναμικού θα πρέπει, πέρα από την ελαχιστοποίηση της ενέργειας, να ικανοποιεί και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες, που επιβάλλονται από τη σχεδίαση της μικροταινιας ($u = u_0$, για $-\omega/2 \leq x \leq \omega/2$, $y = h$). Η ταυτόχρονη ικανοποίηση των δύο αυτών στόχων (ενεργειακή ελαχιστοποίηση, ικανοποίηση οριακών συνθηκών) εξασφαλίζεται από τη συνθήκη στασιμότητας του ακόλουθου συναρτησιακού (functional, δηλαδή συνάρτηση συναρτήσεων)

$$F(\sigma) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\omega/2} \int_0^{\omega/2} \ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|}\right) \sigma(\xi) \sigma(\xi') d\xi' d\xi - \int_0^{\omega/2} u_0 \sigma(\xi) d\xi \quad (2.5)$$

Με άλλα λόγια, το στάσιμο σημείο (stationary point) του συναρτησιακού F λαμβάνεται για τη σωστή επιφανειακή πυκνότητα σ της μικροταινίας μας. Με τον όρο στάσιμο σημείο (stationary point), αναφερόμαστε στην κατάσταση εκείνη του συναρτησιακού F , για την οποία η πρώτη μεταβολή (first variation) του δF μηδενίζεται. Όπως φανερώνει και το όνομά της, η μεταβολή ενός συναρτησιακού είναι η αλλαγή, που υφίσταται σαν αποτέλεσμα απειροστών αλλαγών των ανεξάρτητων μεταβλητών του, που καλούνται επίσης μεταβολές. Πρόκειται για μια έννοια ανάλογη του ολικού διαφορικού (total differential) των απλών συναρτήσεων.

Η απόδειξη της συσχέτισης ανάμεσα στην ορθή λύση και τη στασιμότητα, δεν είναι καθόλου δύσκολη. Έστω Σ η ορθή τιμή της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου της μικροταινίας. Τότε, μπορούμε να γράψουμε κάθε τιμή της σ γύρω από την ορθή, με τη μορφή

$$\sigma = \Sigma + \theta s \quad (2.6)$$

όπου s είναι κάποια συνάρτηση σφάλματος και θ μια παράμετρος. Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.6) στην (2.7), λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$F(\sigma) = F(\Sigma) + \theta \delta F(\Sigma) + \frac{1}{2} \theta^2 \delta^2 F(\Sigma) \quad (2.7)$$

Με $\delta^2 F(\Sigma)$ στην παραπάνω έκφραση συμβολίζουμε τη δεύτερη μεταβολή του συναρτησιακού (που μπορούμε να θεωρήσουμε σαν τη μεταβολή της πρώτης μεταβολής). Όσο για την πρώτη μεταβολή, αυτή γράφεται αναλυτικά σαν

$$\begin{aligned} \delta F(\sigma) &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_0^{\omega/2} \int_0^{\omega/2} \ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|}\right) h(\xi) \sigma(\xi') d\xi' d\xi \\ &\quad - \int_0^{\omega/2} V_0 h(\xi) d\xi \\ &= \int_0^{\omega/2} h(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|}\right) \sigma(\xi') d\xi' \right. \\ &\quad \left. - V_0 \right\} d\xi \quad (2.8) \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα στο εσωτερικό των αγκυλών είναι αυτό, που μας δίνει το δυναμικό U (βλέπε και τη σχέση 2.3). Συνεπώς, καθώς το υπολογίζουμε για $0 < \xi < \omega/2$, δηλαδή πάνω στην άνω μεταλλική λωρίδα της μικροταινίας, θα λαμβάνει πάντα την τιμή V_0 . Άρα, η ποσότητα μέσα στις αγκύλες θα μηδενίζεται, με αποτέλεσμα η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού F να είναι πάντα μηδενική. Επομένως, αποδείξαμε πως, το F είναι στάσιμο ($\delta F=0$), για τη σωστή τιμή της σ .

Αν θέλουμε να προχωρήσουμε λίγο ακόμα, θα πρέπει να αναφέρουμε πως, για να έχει το F , όχι μόνο στάσιμο σημείο, αλλά και ακρότατο (extremal), θα πρέπει η δεύτερη μεταβολή του να είναι θετική. Για την περίπτωση του συναρτησιακού της μικροταινίας, έχουμε

$$\delta^2 F(\sigma) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_0^{\omega/2} \int_0^{\omega/2} \ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|}\right) h(\xi)h(\xi')d\xi d\xi' \quad (2.9)$$

Δεν απαιτεί μεγάλη προσπάθεια από μέρους μας, να αναγνωρίσουμε πως, η σχέση (2.9) μας δίνει την ηλεκτροστατική ενέργεια (βλέπε και τη σχέση 2.4), που αντιστοιχεί σε επιφανειακή κατανομή φορτίου σ . Η ενέργεια αυτή είναι, προφανώς, θετική, άρα το συναρτησιακό F θα εμφανίζει, όχι μόνο στασιμότητα, αλλά και ακρότατο για τη σωστή κατανομή φορτίου σ .

2.1.2 Διακριτοποίηση με Γραμμικές Συναρτήσεις Παρεμβολής

Για να βρούμε, τώρα, την κατανομή αυτή, θα υιοθετήσουμε την τακτική, που ακολουθήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή την ανάπτυξη της s σε ένα άθροισμα συναρτήσεων βάσης. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε αναλυτικά τον τρόπο κατασκευής των συναρτήσεων αυτών για το πρόβλημά μας.

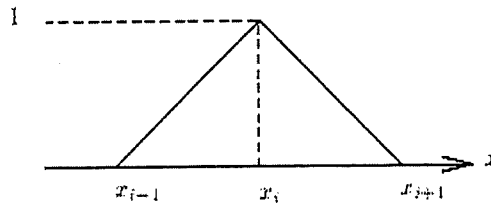
Η πρώτη μας ενέργεια είναι η διακριτοποίηση (discretization) του πεδίου ορισμού της σ . Αυτό σημαίνει πως, πρέπει να υποδιαιρέσουμε το διάστημα $0 \leq x \leq \omega/2$, σε ένα σύνολο M τμημάτων. Σε κάθε τέτοιο τμήμα θα εκφράζουμε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, σαν ένα γραμμικό συνδυασμό των τιμών σ_k που λαμβάνει η σ στα άκρα του εκάστοτε τμήματος. Για να το πετύχουμε αυτό, θα κάνουμε χρήση των γραμμικών συναρτήσεων παρεμβολής $t_i(x)$, που δίνονται από την ακόλουθη σχέση

$$t_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.10)$$

Οι συναρτήσεις παρεμβολής $t_i(x)$ αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης, με τη βοήθεια των οποίων θα εκφράσουμε την άγνωστη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ , σαν

$$\sigma(\xi) = \sum_{k=1}^M \sigma_k t_k(\xi) \tag{2.11}$$

Οι συναρτήσεις βάσης t_k , η γραφική παράσταση των οποίων φαίνεται στο Σχήμα 2.2, καλούνται, επίσης, τριγωνικές ή συναρτήσεις σκεπής (roof-top functions), για προφανείς λόγους.



Σχήμα 2.2: Η συνάρτηση βάσης $t_i(x)$.

Συντελεστές σ_k των συναρτήσεων βάσης t_k στο παραπάνω ανάπτυγμα (2.11) είναι οι τιμές της πυκνότητας φορτίου πάνω στα όρια ξ_k των υποδιαστημάτων, στα οποία χωρίζουμε την αγώγιμη λωρίδα της μικροταινίας.

Μετά την ανάπτυξη της σ με τη μορφή του αθροίσματος της σχέσης (2.11), το επόμενο βήμα μας είναι να την αντικαταστήσουμε στο συναρτησιακό (2.5), με αποτέλεσμα να πάρουμε τη διακριτή προσέγγισή του

$$F(\sigma) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sigma_k \sigma_j \int_0^{\omega/2} \int_0^{\omega/2} \ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|}\right) t_j(\xi') t_k(\xi) d\xi d\xi' - \sum_{k=1}^M \sigma_k \int_0^{\omega/2} u_0 t_k(\xi) d\xi \tag{2.12}$$

Για να αναζητήσουμε ένα ακρότατο (ελάχιστο) της παραπάνω προσέγγισης, αρκεί να προσδιορίσουμε τιμές των συντελεστών σ_k , που μηδενίζουν τις μερικές παραγώγους του F , ως προς τους συντελεστές αυτούς

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} = 0, k = 1, \dots, M \tag{2.13}$$

Η απαίτηση οι M παραπάνω μερικές παράγωγοι του F να μηδενίζονται, μας δίνει ένα γραμμικό σύστημα M εξισώσεων με M αγνώστους (σ_k), το οποίο σε μορφή πινάκων γράφεται σαν

$$[S][\sigma] = [V] \quad (2.14)$$

όπου με $[S]$ συμβολίζουμε ένα $M \times M$ τετραγωνικό πίνακα, του οποίου το S_{jk} στοιχείο δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$S_{jk} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \ln \left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|} \right) t_j(\xi') t_k(\xi) d\xi d\xi' \quad (2.15)$$

Αντίστοιχα, με $[V]$ υποδηλώνουμε ένα πίνακα δiάνυσμα $M \times 1$ (δηλαδή με M γραμμές και μια στήλη), το κάθε στοιχείο του οποίου μπορούμε να το υπολογίσουμε, βάσει της κάτωθι έκφρασης

$$V_k = \int_0^{a/2} u_0 t_k(\xi) d\xi \quad (2.16)$$

Αυτό που απομένει, είναι να προσδιορίσουμε τα στοιχεία των πινάκων $[S]$ και $[V]$ και να προχωρήσουμε στην αριθμητική επίλυση του συστήματος (2.14). Το τελικό προϊόν της επίλυσης αυτής είναι οι συντελεστές σ_k του αναπτύγματος (2.11). Η γνώση των συντελεστών αυτών μας επιτρέπει να βρούμε (κατά προσέγγιση) την πυκνότητα φορτίου, σε όποιο σημείο της αγωγίμης λωρίδας της μικροταινίας θέλουμε. Με μια απλή ολοκλήρωση των τιμών, βρίσκουμε και τη χωρητικότητα της μικροταινίας.

Η χρησιμότητα της διαδικασίας, που αναλύσαμε παραπάνω, δεν περιορίζεται μόνο σε στατικά προβλήματα, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και σε ηλεκτροδυναμικά προβλήματα. Επιπλέον, αν και για την περιγραφή του προβλήματος της μικροταινίας χρησιμοποιήσαμε μια ολοκληρωτική εξίσωση, η μέθοδος των μεταβολών ή μεθοδος της στασιμότητας είναι κατάλληλη και για τις καταστρώσεις προβλημάτων με τη βοήθεια μερικών διαφορικών εξισώσεων (partial equation differential equation formulations).

Μια μερική διαφορική εξίσωση, που αναφέρεται σε ηλεκτροδυναμικά συστήματα, είναι η εξίσωση του Helmholtz (ειδική περίπτωση της οποίας είναι η εξίσωση Laplace). Η μονοδιάστατη μορφή της εξίσωσης αυτής, για το ηλεκτρικό πεδίο $E_z(x)$, είναι η

$$\frac{d^2 E_z(x)}{dx^2} + k^2 E_z(x) = 0 \quad (2.17)$$

Αν διακριτοποιήσουμε το διάστημα της μεταβλητής x , στο οποίο αναζητούμε λύση και κάνουμε χρήση των γραμμικών συναρτήσεων παρεμβολής t_i σαν

συναρτήσεων βάσης, η εφαρμογή της μεθόδου των μεταβολών μας δίνει εξισώσεις της μορφής

$$2E_k - E_{k-1} - E_{k+1} + k^2 \Delta^2 \left(\frac{2}{3} E_k + \frac{1}{6} E_{k-1} + \frac{1}{6} E_{k+1} \right) = 0 \quad (2.18)$$

όπου Δ είναι το μήκος των τμημάτων, στα οποία υποδιαιρούμε το διάστημα ορισμού του $E_2(x)$, ενώ E_{k-1} , E_k και E_{k+1} είναι οι συντελεστές των συναρτήσεων βάσης για το πεδίο, στα σημεία $x_k - \Delta$, x_k και $x_k + \Delta$, αντίστοιχα.

Πριν κλείσουμε την παράγραφο αυτή, οφείλουμε να προσθέσουμε πως, πέρα από τη μέθοδο των μεταβολών, υπάρχει και ένας εναλλακτικός τρόπος αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων όπως η (2.17). Σύμφωνα με τον τρόπο αυτό, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της εξίσωσης με τη βοήθεια της έκφρασης κεντρικών διαφορών (central difference formula)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{\Delta^2} \quad (2.19)$$

Η χρήση της παραπάνω προσέγγισης στη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz για το ηλεκτρικό πεδίο, έχει σαν αποτέλεσμα την παραγωγή αλγεβρικών εξισώσεων,

$$2E_k - E_{k-1} - E_{k+1} + k^2 \Delta^2 E_k = 0 \quad (2.20)$$

που μοιάζουν αρκετά με τις (2.18), χωρίς, όμως, να είναι απολύτως ίδιες.

Ολοκληρώνοντας, αξίζει να παρατηρήσουμε πως, ο πίνακας συντελεστών του γραμμικού συστήματος, που συνιστούν οι εξισώσεις (2.20), είναι τριδιαγώνιος (tridiagonal). Αυτό σημαίνει πως, τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα αυτού, είναι εκείνα που ανήκουν στην κύρια διαγώνιο του και στις δύο παράπλευρες σε αυτή διαγώνιους. Πρόκειται για έναν πίνακα, που προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό τον διαγώνιο (πίνακα), κάτι που, όπως έχουμε αναφέρει και στο προηγούμενο κεφάλαιο, διευκολύνει σημαντικά τη διαδικασία αριθμητικής επίλυσής του.

2.2 Γραμμικοί Τελεστές και Χώροι Εσωτερικών Γινομένων

Τόσο την ολοκληρωτική εξίσωση (1.25), όσο και τη διαφορική (2.17), αλλά και καθένα από τα προβλήματα μοντελοποίησης που εξετάζουμε, μπορούμε να το εκφράσουμε, γενικά, με τη συμβολική μορφή

$$Lf = g. \quad (2.21)$$

όπου L είναι μία γραμμική απεικόνιση, g η διέγερση ή πηγή, ενώ με f συμβολίζουμε το πεδίο ή την απόκριση του προβλήματος. Το πρόβλημα καλείται ντετερμινιστικό, αν η λύση του χαρακτηρίζεται από μοναδικότητα,

δηλαδή μία μόνον απόκριση f συσχετίζεται με κάθε διέγερση g . Αν η απεικόνιση L και η πηγή g είναι γνωστές και απαιτείται ο καθορισμός του πεδίου f , που ικανοποιεί την (2.21), τότε έχουμε ένα πρόβλημα ανάλυσης. Τέτοιο ήταν το πρόβλημα της μικροταινίας, με το οποίο ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου. Στην περίπτωση που οι f και g είναι γνωστές και δεδομένες και το ζητούμενο είναι η εύρεση της απεικόνισης L , που τις συνδέει σύμφωνα με τη σχέση (2.21), το πρόβλημα καλείται πρόβλημα σύνθεσης. Στην κατηγορία των προβλημάτων σύνθεσης εμπίπτουν και τα λεγόμενα προβλήματα βελτιστοποίησης (optimization), στα οποία θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε επόμενο κεφάλαιο (στο τέταρτο).

Μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση L , σαν έναν κανόνα μετασχηματισμού μεταξύ συναρτήσεων, αφού συσχετίζει με κάθε συνάρτηση πηγής g , μία τουλάχιστον λύση f . Απεικονίζει, δηλαδή, κάθε f σε κάποια διέγερση g . Το σύνολο όλων των συναρτήσεων g , που μπορούν να εμφανιστούν σαν συναρτήσεις πηγής στο πρόβλημα αυτό, αποτελεί το πεδίο τιμών (range) R_L της απεικόνισης L . Όμοια, το σύνολο όλων των δυνατών λύσεων f της (2.21) καλείται πεδίο ορισμού D_L της L .

Τόσο το πεδίο ορισμού, όσο και το πεδίο τιμών, αποτελούν γραμμικούς ή διανυσματικούς χώρους, όχι κατ' ανάγκην ταυτόσημους. Αν, όμως, $R_L = D_L = \mathbb{I}\mathbb{E}$, τότε η L καλείται γραμμικός τελεστής πάνω στον $\mathbb{I}\mathbb{E}$. Για να χαρακτηρίσουμε ένα σύνολο συναρτήσεων $\mathbb{I}\mathbb{E}$ γραμμικό ή διανυσματικό χώρο, πρέπει για τα μέλη του να ισχύουν οι παρακάτω θεμελιώδεις ιδιότητες:

- Ο $\mathbb{I}\mathbb{E}$ πρέπει να εμπεριέχει ένα μηδενικό στοιχείο 0 , τέτοιο ώστε $\psi + 0 = \psi$, για κάθε $\psi \in \mathbb{I}\mathbb{E}$.
- Αν οι ψ_1 και ψ_2 ανήκουν στον $\mathbb{I}\mathbb{E}$ ($\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{I}\mathbb{E}$), τότε το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και για κάθε γραμμικό τους συνδυασμό, $k_1\psi_1 + k_2\psi_2$.
- Η πρόσθεση και η αφαίρεση πρέπει να είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές, για όλα τα μέλη του $\mathbb{I}\mathbb{E}$.

Ειδικότερα, για τα προβλήματα μοντελοποίησης που μας ενδιαφέρουν, οι συναρτήσεις πηγής g πρέπει, προφανώς, να χαρακτηρίζονται και από επιπλέον ιδιότητες. Για παράδειγμα, πρέπει να ορίζονται στη γεωμετρική περιοχή του φυσικού προβλήματος και να είναι διπλά ολοκληρώσιμες σε αυτή. Τέτοιου είδους μαθηματικές απαιτήσεις είναι απόρροιας φυσικών νόμων διατήρησης. Πιο συγκεκριμένα, στο πρόβλημα της μικροταινίας που μελετήσαμε, η διπλή ολοκληρωσιμότητα συσχετίζεται με την ανάγκη να είναι πεπερασμένη η αποθηκευμένη ηλεκτροστατική ενέργεια της διάταξης.

Μια ειδική κατηγορία γραμμικών χώρων, που βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό, είναι οι χώροι εσωτερικού γινομένου (inner product spaces). Ένας γραμμικός χώρος $\mathbb{I}\mathbb{E}$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου, αν σε κάθε ζεύγος συναρτήσεων $(\psi_1, \psi_2) \in \mathbb{I}\mathbb{E} \times \mathbb{I}\mathbb{E}$ μπορούμε να αντιστοιχήσουμε ένα βαθμωτό μέγεθος $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ (το εσωτερικό γινόμενο των

ψ_1 και ψ_2), τέτοιο ώστε, για κάθε $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathbb{E}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$\langle \alpha \psi_1, \psi_2 \rangle = \alpha \langle \psi_1, \psi_2 \rangle \quad (2.22)$$

$$\langle \psi_1 + \psi_2, \psi_3 \rangle = \langle \psi_1, \psi_3 \rangle + \langle \psi_2, \psi_3 \rangle \quad (2.23)$$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 \rangle \quad (2.24)$$

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle \geq 0 \text{ και } \langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 0 \Rightarrow \psi_1 = 0 \quad (2.25)$$

Αξίζει να σημειώσουμε πως, για το εσωτερικό γινόμενο ενός γραμμικού χώρου πάνω στο μιγαδικό επίπεδο, η ιδιότητα (2.24) πρέπει να αντικατασταθεί από την

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 \rangle^* \quad (2.26)$$

όπου $\langle \psi_2, \psi_1 \rangle^*$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του $\langle \psi_2, \psi_1 \rangle$.

Ένας πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται και Ευκλείδειος χώρος.

Ένα εσωτερικό γινόμενο μεταξύ συναρτήσεων, που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στον ηλεκτρομαγνητισμό, είναι το

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{\Omega} \psi_1 \psi_2^* d\Omega \quad (2.27)$$

όπου Ω είναι η γεωμετρική περιοχή του φυσικού προβλήματος, στο οποίο χρησιμοποιούμε το εσωτερικό αυτό γινόμενο.

Αν θεωρήσουμε το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων σαν γενίκευση του διανυσματικού εσωτερικού γινομένου της αναλυτικής γεωμετρίας, μπορούμε να πούμε ότι, το $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ είναι η προβολή (projection) της συνάρτησης ψ_1 πάνω στην ψ_2 . Η προβολή μίας συνάρτησης ψ πάνω στον ίδιο της τον εαυτό $\langle \psi, \psi \rangle$ μας βοηθά να ορίσουμε τη νόρμα εσωτερικού γινομένου ή φυσική νόρμα της ψ , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} \quad (2.28)$$

Η νόρμα εσωτερικού γινομένου μπορεί να θεωρηθεί ότι, μετρά το μέγεθος της συνάρτησης, στην οποία αναφέρεται και, με την έννοια αυτή, αντιστοιχεί στην ιδέα του διανυσματικού μήκους, το οποίο αποτελεί επίσης ένα μέτρο

μεγέθους. Αν και είναι δυνατό να οριστούν και άλλες συναρτησιακές νόρμες, ο όρος νόρμα έχει καθιερωθεί να αναφέρεται στη νόρμα εσωτερικού γινομένου.

Η χρήση στη συναρτησιακή ανάλυση όρων δανεισμένων από την αναλυτική γεωμετρία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς διευκολύνει τη διαισθητική αντίληψη εννοιών, που δεν είναι τόσο εύκολο να συλλάβει κανείς ανεξάρτητα για συναρτήσεις. Έτσι, μπορούμε να μιλήσουμε για τη γωνία (angle) μεταξύ δύο συναρτήσεων, όπως υπολογίζεται από το εσωτερικό τους γινόμενο και να πούμε ότι, οι ψ_1 και ψ_2 είναι ορθογώνιες (orthogonal), αν $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0$. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε σαν απόσταση (distance) μεταξύ των συναρτήσεων ψ_1 και ψ_2 τη νόρμα της διαφοράς τους $\|\psi_1 - \psi_2\|$

Το μέγεθος της απόστασης συναρτήσεων είναι ιδιαίτερα σημαντικό, γιατί μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια της συναρτησιακής σύγκλισης, η οποία παίζει πολύ σπουδαίο ρόλο στη μελέτη των προβολικών μεθόδων. Το σκεπτικό, με το οποίο εισάγεται η σύγκλιση συναρτήσεων, είναι το παρακάτω:

Αν η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών όρων μίας συναρτησιακής ακολουθίας $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ ολοένα και μειώνεται, τείνοντας οριακά στο μηδέν

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\psi_m - \psi_n\| = 0 \quad (2.29)$$

οι όροι της ακολουθίας αυτής για μεγάλα m και n πλησιάζουν μεταξύ τους όλο και πιο πολύ, προσεγγίζοντας στο όριο κάποια έσχατη συνάρτηση ψ , αρκεί η συνάρτηση αυτή να υφίσταται στο χώρο, όπου ανήκει η ακολουθία. Μία ακολουθία, της οποίας οι όροι ικανοποιούν τη σχέση (2.29), καλείται ακολουθία Cauchy. Η ακολουθία αυτή λέμε ότι συγκλίνει στην οριακή συνάρτηση ψ , αν η $\psi \in \mathbb{E}$, όπου \mathbb{E} είναι ο χώρος εσωτερικού γινομένου, στον οποίο περιέχονται οι όροι της ακολουθίας.

Αν ο \mathbb{E} περιλαμβάνει όλα τα δυνατά όρια των ακολουθιών Cauchy, που ανήκουν σ' αυτόν, τότε όλες οι ακολουθίες αυτές συγκλίνουν και ο \mathbb{E} λέμε ότι είναι πλήρης (complete). Αν, μάλιστα, είναι πλήρης ως προς τη φυσική του νόρμα, τότε ο \mathbb{E} καλείται χώρος Hilbert. Οι περισσότεροι συναρτησιακοί χώροι, που εμφανίζουν ενδιαφέρον στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό, είναι χώροι Hilbert.

2.3 Προβολική Κατάστροψη

Ένα κοινό στοιχείο των προβολικών και των μεταβολικών μεθόδων είναι ότι και οι δύο αποφεύγουν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα, που λύνουν, άμεσα στην αρχική του έκφραση και αναζητούν εναλλακτικές διατυπώσεις του. Η βασική ιδέα των προβολικών μεθόδων ειδικότερα, όπως άλλωστε υποδηλώνει και το όνομά τους, είναι να καταλήξουν σε μία νέα μορφή του προβλήματος, εξισώνοντας τις προβολές της (2.21) πάνω σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο σύνολο συναρτήσεων.

Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε πως, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί η συνάρτηση f λύση της (2.21), είναι να ισχύει η σχέση

$$\langle w, \mathcal{L}f \rangle = \langle w, g \rangle, \forall w \in R_{\mathcal{L}} \quad (2.30)$$

όπου $R_{\mathcal{L}}$ είναι το πεδίο τιμών της απεικόνισης \mathcal{L} . Η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω συνθήκης είναι σαφής και απλή. Στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, η ισότητα των προβολών δύο διανυσμάτων πάνω σε τρία ανεξάρτητα διανύσματα (όπως τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους Καρτεσιανούς άξονες συντεταγμένων) συνεπάγεται και αντίστροφα την ισότητα των ίδιων των διανυσμάτων. Μάλιστα, θα ισούνται και οι προβολές τους πάνω σε οποιοδήποτε διάνυσμα, αρκεί να ισχύει η ισότητα των προβολών τους πάνω σε τρία ανεξάρτητα διανύσματα.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τους συναρτησιακούς χώρους. Η ισότητα των μελών της (2.30) είναι εξασφαλισμένη για όλες τις συναρτήσεις w , αρκεί να ικανοποιείται για τις συναρτήσεις μιας βάσης του $R_{\mathcal{L}}$. Αν μία συνάρτηση ικανοποιεί την (2.30), τότε λέμε ότι ικανοποιεί ισχυρώς την (2.21) και αποτελεί μια ισχυρή (strong) λύση της. Το κύριο μειονέκτημα των ισχυρών λύσεων είναι ο πολύ δύσκολος (έως αδύνατος στην πράξη μερικές φορές) προσδιορισμός τους.

Ο λόγος γ' αυτό είναι οι αυστηρά περιοριστικές ιδιότητες που πρέπει να χαρακτηρίζουν τις ισχυρές λύσεις. Επιπλέον, αν και ο $R_{\mathcal{L}}$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου, δεν είναι, απαραίτητα, χώρος Hilbert (ή έστω πλήρης). Το γεγονός αυτό μας εμποδίζει να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης, που είναι καθοριστικής σημασίας στον πρακτικό υπολογισμό αριθμητικών συναρτησιακών προσεγγίσεων. Ένας τρόπος να παρακάμψουμε τις δυσκολίες αυτές είναι να διευρύνουμε κάπως το πρόβλημα, απαιτώντας ισότητα προβολών των μελών της (2.21) πάνω σε μία βάση του χώρου Hilbert \mathbb{H} που περιλαμβάνει το πεδίο τιμών $R_{\mathcal{L}}$ της απεικόνισης \mathcal{L} .

$$\langle w, \mathcal{L}\bar{f} \rangle = \langle w, g \rangle, \forall w \in \mathbb{H} \supseteq R_{\mathcal{L}} \quad (2.31)$$

Η συνάρτηση \bar{f} λέμε ότι, ικανοποιεί ασθενώς την (2.21). Είναι προφανές ότι, οι ασθενείς λύσεις είναι πολύ πιο εύκολες στην κατασκευή τους, από ό,τι οι ισχυρές.

Στη συνέχεια, πρέπει να περιορίσουμε με κάποιο τρόπο το πρόβλημα, ώστε να καταστεί δυνατή η επίλυσή του σε υπολογιστή. Η θεμελιώδης αρχή των προβολικών μεθόδων είναι να ικανοποιούν την (2.31) μόνο σε ένα M -διάστατο υπόχωρο \mathbb{H}_{RM} του \mathbb{H} , παρά σε ολόκληρο το πεδίο τιμών $R_{\mathcal{L}}$. Ο \mathbb{H}_{RM} είναι ένας Ευκλείδειος χώρος και η προκύπτουσα λύση, μετά τον περιορισμό του προβλήματος σε αυτόν, μπορεί να περιγραφεί σαν προσεγγιστική ασθενής λύση, ως προς τον \mathbb{H}_{RM} .

Έστω, τώρα ότι, το σύνολο συναρτήσεων $\{\beta_k | k=1, \dots, M\}$ αποτελεί μία βάση του \mathbb{H}_{RM} , δηλαδή κάθε συνάρτηση s του χώρου αυτού μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των β_k ,

$$s = \sum_{k=1}^M s_k \beta_k, \forall s \in \mathbb{H}_{RM} \quad (2.32)$$

όπου οι s_k είναι αριθμητικοί συντελεστές και όχι συναρτήσεις. Τότε μία προσεγγιστική λύση της (2.21), ως προς τον \mathbb{H}_{RM} , είναι η συνάρτηση $\bar{f}(M)$, που ικανοποιεί τις λύσεις

$$\langle \beta_j, \mathcal{L} \bar{f}(M) \rangle = \langle \beta_j, g \rangle, j=1, \dots, M \quad (2.33)$$

Μέχρι στιγμής, έχουμε προχωρήσει αρκετά, αλλά, ακόμα, δεν είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την $\bar{f}(M)$ από τις παραπάνω εξισώσεις. Για να το πετύχουμε αυτό, πρέπει να καταφύγουμε σε μία ακόμα προσέγγιση. Προσεγγίζουμε την $\bar{f}(M)$ με την $\bar{f}(MN)$, μία συνάρτηση περιορισμένη να ανήκει σε ένα N -διάστατο γραμμικό υπόχωρο του \mathbb{H} , $\mathbb{H}_{DN} \subset \mathbb{H}$. Αν μία βάση του \mathbb{H}_{DN} είναι το σύνολο $\{a_i | i=1, \dots, N\}$, τότε η προσεγγιστική λύση $\bar{f}(MN) \in \mathbb{H}_{DN}$ δίνεται από τη σχέση

$$\bar{f}(MN) = \sum_{i=1}^N f_{(M)i} a_i \quad (2.34)$$

όπου $f_{(M)i}$ είναι αριθμητικοί συντελεστές, που πρέπει να υπολογιστούν, για να προσδιορίσουμε την προβολική προσέγγιση $\bar{f}(MN)$.

Για να το πετύχουμε αυτό, αντικαθιστούμε την $\bar{f}(M)$ στην (2.33) με το ανάπτυγμα της $\bar{f}(MN)$, που δίνεται από τη σχέση (2.34) και παίρνουμε

$$\langle \beta_j, \mathcal{L} \sum_{i=1}^N f_{(M)i} a_i \rangle = \langle \beta_j, g \rangle, j=1, \dots, M \quad (2.35)$$

Για μία γραμμική απεικόνιση \mathcal{L} , η (2.35) παίρνει τη μορφή

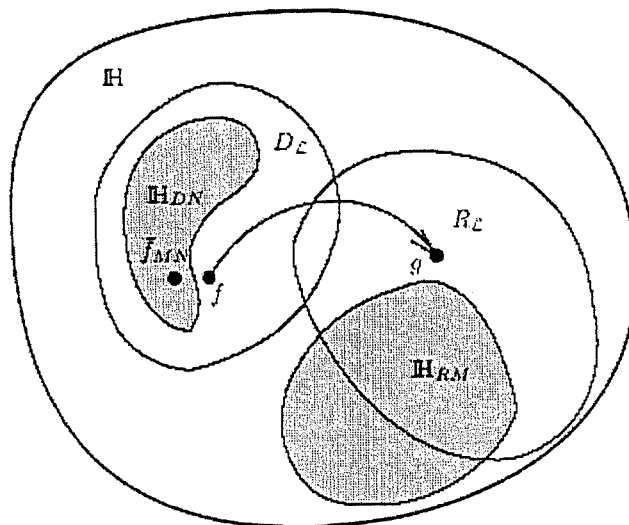
$$\sum_{i=1}^N \langle \beta_j, \mathcal{L} a_i \rangle f_{(M)i} = \langle \beta_j, g \rangle, j=1, \dots, M \quad (2.36)$$

Η (2.36) είναι, επιτέλους, η εξίσωση πινάκων που αναζητούσαμε. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος, που εκφράζει, μας δίνει τους N συντελεστές $f_{(M)}$. Οι συντελεστές αυτοί ορίζουν, μέσω της (2.34), την προσέγγιση $\bar{f}_{(MN)}$ της ασθενούς λύσης \bar{f} .

Η προσέγγιση αυτή, όμως, είναι εν γένει χρήσιμη, μόνον αν είναι συγκλίνουσα (convergent). Και αυτό γιατί, μόνον τότε μπορούμε να φέρουμε την προσεγγιστική ασθενή λύση, “όσο κοντά” θέλουμε στην ισχυρή, διευρύνοντας κατάλληλα τους χώρους \mathbb{H}_{DN} και \mathbb{H}_{RM}

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} \|\bar{f}_{(MN)} - f\| = 0 \tag{2.37}$$

Ο ορισμός των \mathbb{H}_{DN} και \mathbb{H}_{RM} , οι διευρύνσεις τους, που απαιτούνται για την επίτευξη σύγκλισης και ο ρυθμός της σύγκλισης αυτής είναι σύνθετα και πολύπλοκα θέματα μείζονος σημασίας, η ανάλυσή τους, όμως, βρίσκεται εκτός των στόχων της σύντομης αυτής παραγράφου.



Σχήμα 2.3: Η προσεγγιστική λύση μπορεί να αναζητηθεί σε ένα χώρο Hilbert, που περικλείει, τόσο το πεδίο ορισμού D_L , όσο και το πεδίο τιμών R_L της απεικόνισης L .

Το Σχήμα 2.3 μας βοηθά να κατανοήσουμε περισσότερο την ιδέα των προβολικών προσεγγίσεων. Για τη σαφέστερη ερμηνεία του, διευκρινίζουμε πως τα σημεία σε αυτό απεικονίζουν συναρτήσεις, ενώ οι συναρτησιακοί χώροι που

αντιστοιχούν σε σημειακά νέφη, αναπαρίστανται σαν τμήματα της συνολικής περιοχής του διαγράμματος.

Ο \mathbb{H} είναι ένας χώρος Hilbert που περικλείει, τόσο το πεδίο τιμών $R_{\mathcal{L}}$, όσο και το πεδίο ορισμού $D_{\mathcal{L}}$ της γραμμικής απεικόνισης \mathcal{L} . Η \mathcal{L} , όπως βλέπουμε, απεικονίζει κάθε σημείο του $D_{\mathcal{L}}$ σε κάποιο αντίστοιχο σημείο στο $R_{\mathcal{L}}$. Γιά τον προσδιορισμό μιας προσεγγιστικής ασθενούς λύσης, επιλέγουμε δύο πεπερασμένους υποχώρους μέσα στον \mathbb{H} που τους σχεδιάζουμε σκιασμένους στο Σχήμα 2.3, για να τους διακρίνουμε καλύτερα. Ο \mathbb{H}_{DN} λειτουργεί σαν υποκατάστατο του $D_{\mathcal{L}}$ και μέσα σε αυτόν αναζητούμε την προσεγγιστική ασθενή λύση. Ομοίως, ο υπόχωρος \mathbb{H}_{RM} αποτελεί προσεγγιστικό μοντέλο του πεδίου τιμών $R_{\mathcal{L}}$ και απαιτούμε ισότητα προβολών ως προς την βάση του γιά να καταλήξουμε στην προσεγγιστική ασθενή μορφή του προβλήματος.

Όπως παρατηρούμε από το Σχήμα 2.3, ο \mathbb{H}_{DN} πρέπει να αποτελεί οπωσδήποτε υποσύνολο του πεδίου ορισμού $D_{\mathcal{L}}$ της \mathcal{L} , $\mathbb{H}_{DN} \subseteq D_{\mathcal{L}}$, διαφορετικά ο όρος $\mathcal{L}g$ της εξίσωσης (2.36) δεν έχει νόημα. Αντίθετα, η μόνη προϋπόθεση, για να είναι καλά ορισμένο το εσωτερικό γινόμενο $\langle \beta_j, g \rangle$ της ίδιας σχέσης, είναι να ανήκουν και οι δύο όροι του στον ίδιο χώρο εσωτερικού γινομένου \mathbb{H} . Αυτό σημαίνει πως, το πεδίο τιμών $R_{\mathcal{L}}$ και το προσεγγιστικό του μοντέλο \mathbb{H}_{RM} δεν χρειάζεται ούτε καν να αλληλοεπικαλύπτονται. Στην περίπτωση αυτή, ή αν απλώς $g \in \mathbb{H}_{RM}$, η (2.36) θα βρεί την καλύτερη δυνατή προσέγγιση: αυτή που η προβολή της στον \mathbb{H}_{RM} την ικανοποιεί.

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, η διαφορά ανάμεσα στις ισχυρές και τις ασθενείς λύσεις έγκειται στους περιορισμούς, που πρέπει να ικανοποιούν. Οι περιορισμοί αυτοί ασκούν άμεση επίδραση στο είδος των προσεγγιστικών συναρτήσεων, που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, για να αναπτύξουμε τις λύσεις. Η ελευθερία επιλογής είναι σαφώς μεγαλύτερη στην περίπτωση των ασθενών λύσεων. Αυτό συμβαίνει, γιατί ο χώρος Hilbert \mathbb{H} είναι, γενικά, μεγαλύτερος από το πεδίο τιμών $R_{\mathcal{L}}$ της απεικόνισης \mathcal{L} . Για το λόγο αυτό, είναι απολύτως δυνατό να κατασκευάσουμε μία προσεγγιστική λύση, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις με ασθενέστερες απαιτήσεις συνέχειας και λιγότερους συνοριακούς περιορισμούς από την ισχυρή λύση. Η προσέγγιση αυτή είναι μία συνήθης πρακτική στην εφαρμογή, τόσο της μεθόδου των ροπών, όσο και των πεπερασμένων στοιχείων, όπου ομαλές συνεχείς λύσεις, προκύπτουν από αναπτύγματα συναρτήσεων, οι οποίες είναι μόνον τμηματικά ομαλές. Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελούν οι τριγωνικές συναρτήσεις βάσεις (ή συναρτήσεις σκεπής), που χρησιμοποιήσαμε κατά τη μοντελοποίηση της μικροταινίας (παράγραφος 2.1.2).

2.4 Η Μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων

Η τεχνική Galerkin αποτελεί ειδική περίπτωση μίας πολύ γενικότερης προσέγγισης στην επίλυση προβλημάτων της μορφής (2.21), της μεθόδου των Σταθμικών Υπολοίπων (Weighted Residuals). Η βασική αρχή της μεθόδου

αυτής είναι αρκετά απλή. Το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της είναι να ξαναγράψουμε την (2.21) με τη μορφή

$$\mathcal{L}(f) - g = r \quad (2.38)$$

Σχηματίζουμε με τον τρόπο αυτό το υπόλοιπο (residual) r , του οποίου επιδιώκουμε την ελαχιστοποίηση.

Στη συνέχεια, προσεγγίζουμε τη ζητούμενη λύση f , με ένα γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων βάσης a_i του \mathbb{H}_D , όπως κάναμε και στην παράγραφο 2.3

$$f(N) = \sum_{i=1}^N f_{(N)i} a_i \quad (2.39)$$

Αντικαθιστούμε το ανάπτυγμα (2.31) στην εξίσωση υπολοίπου (2.38) και παίρνουμε την παρακάτω προσεγγιστική της μορφή

$$\sum_{i=1}^N f_{(N)i} \mathcal{L} a_i - g = r \quad (2.40)$$

Κατόπιν, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $f_{(N)i}$ που ελαχιστοποιούν το υπόλοιπο r . Επειδή ο όρος ελαχιστοποίηση είναι κάπως γενικός και αόριστος, υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της μεθόδου των Σταθμικών Υπολοίπων, ανάλογα με την έννοια, που του δίνεται κάθε φορά.

Μία από τις περισσότερο διαδεδομένες παραλλαγές της είναι αυτή των Προβολικών Σταθμικών Υπολοίπων. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, απαιτούμε από το υπόλοιπο r να έχει μηδενικές προβολές πάνω σε κάθε μέλος ενός συνόλου M συναρτήσεων β_j .

$$\sum_{i=1}^N \langle \beta_j, \mathcal{L} a_i \rangle f_{(MN)i} - \langle \beta_j, g \rangle = 0, j = 1, \dots, M \quad (2.41)$$

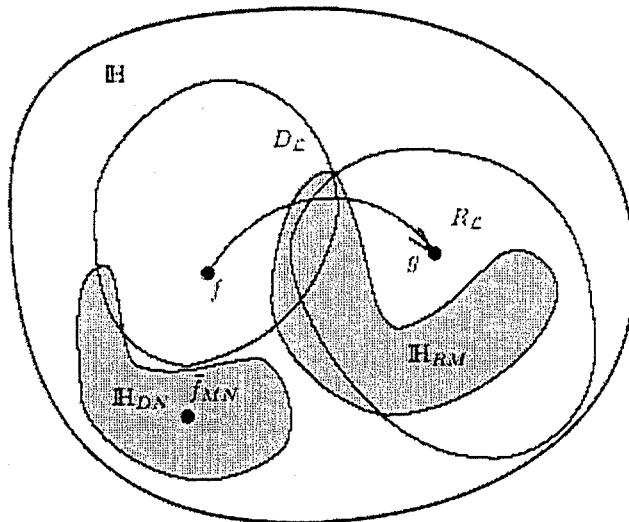
Έχει καθιερωθεί οι συναρτήσεις β_j να καλούνται συναρτήσεις βάρους ή δοκιμής (weighting or testing functions). Όπως καθίσταται προφανές, συγκρίνοντας τις (2.36) και (2.41), η γενική προβολική μέθοδος ταυτίζεται με τη μέθοδο των σταθμικών υπολοίπων, στην περίπτωση της προβολικής ελαχιστοποίησης.

Αν η απεικόνιση \mathcal{L} δεν είναι συμμετρική, καλό είναι, όπως έγινε και στην ανάπτυξη της μεθόδου Galerkin, πιθανόν με χρήση της δεύτερης ταυτότητας του Green, να την αντικαταστήσουμε με μία γενικότερη συμμετρική της μορφή \mathcal{L}' .

$$\sum_{i=1}^N \langle \beta_j, \mathcal{L}' a_i \rangle f_{(MN)i} - \langle \beta_j, g \rangle = 0, j = 1, \dots, M \quad (2.42)$$

Η παραπάνω ασθενής μορφή είναι σαφώς γενικότερη της αντίστοιχης της μεθόδου Galerkin, καθώς κατά την κατάστρωση της δεν έχουμε επιβάλλει την απαίτηση ταύτισης των προσεγγιστικών χώρων των πεδίων ορισμού και τιμών, \mathbb{H}_{DN} και \mathbb{H}_{RM} . Στο Σχήμα 2.4, μπορούμε να δούμε τις σχέσεις των χώρων αυτών μεταξύ τους, καθώς και με τα πεδία ορισμού και τιμών που προσεγγίζουν. Όπως βλέπουμε σε αυτό, οι \mathbb{H}_{DN} και \mathbb{H}_{RM} , όχι μόνο δεν χρειάζεται να ταυτίζονται, αλλά ούτε καν να αλληλοεπικαλύπτονται μερικώς.

Οι προβολικές τεχνικές και ιδίως η μέθοδος των σταθμικών υπολοίπων προσφέρουν ενδιαφέρουσες δυνατότητες αυτοελέγχου και εκτιμήσεως των σφαλμάτων που εισάγουν. Οι πίνακες συντελεστών των συστημάτων, στα οποία καταλήγουν έχουν M γραμμές και N στήλες. Η συνήθης πρακτική είναι να επιλέγεται $M=N$, οπότε ο πίνακας συντελεστών, που προκύπτει, είναι τετραγωνικός. Η επιλογή όμως αυτή δεν είναι καθόλου υποχρεωτική. Επιλέγοντας $M>N$ μπορούμε να λύσουμε το προκύπτον μη τετραγωνικό σύστημα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, εξασφαλίζοντας παράλληλα πολύτιμη πληροφορία για τη συμπεριφορά των σφαλμάτων της μεθόδου μας. Στο ζήτημα αυτό επανερχόμαστε στην παράγραφο 2.7, όπου παρουσιάζουμε τη μέθοδο των βοηθητικών πηγών.



Σχήμα 2.4: Η μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων. Οι προσεγγιστικοί χώροι \mathbb{H}_{DN} και \mathbb{H}_{RM} μπορούν να έχουν ακόμα και κενή τομή.

2.5 Τεχνικές Point Matching

Μία εντελώς διαφορετική οικογένεια μεθόδων σταθμικών υπολοίπων είναι αυτή των μεθόδων point matching. Κατά την εφαρμογή των μεθόδων αυτών, απαιτούμε από το υπόλοιπο r να μηδενίζεται ακριβώς σε ένα επιλεκτο σύνολο γεωμετρικών σημείων P_j της περιοχής του προβλήματος, που επιλύουμε. Μία μέθοδος point matching έχει σαν αποτέλεσμα το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\sum_{i=1}^N (\mathcal{L}a_i)|_P, \check{f}_{(MN)_i} = g(P_j) \quad (2.43)$$

Η συνάρτηση $\check{f}_{(MN)_i}$, ασφαλώς και δεν είναι η ίδια με την προβολική εκτίμηση $\bar{f}_{(MN)}$ των προηγούμενων παραγράφων, παρά το γεγονός ότι και οι δύο επιχειρούν να προσεγγίσουν την ίδια άγνωστη ακριβή λύση.

Η τεχνική του point matching έχει το εμφανές πλεονέκτημα της υπολογιστικής απλότητας, αφού αποφεύγει τον υπολογισμό προβολών, που - κατά κανόνα - σημαίνει εκτέλεση σύνθετων ολοκληρώσεων, ενίοτε και αριθμητικά. Το μόνο, που απαιτεί, είναι ο προσδιορισμός των δύο μελών της εξίσωσης που επιλύει, πάνω στα σημεία P_j , υπολογισμός σαφώς απλούστερος.

Το τίμημα, όμως, της απλότητας αυτής είναι τα σοβαρά μειονεκτήματα της τεχνικής της ταξιοθεσίας, που συζητούνται ευθύς αμέσως. Καταρχήν, οι συναρτήσεις βάσης a_i πρέπει να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της \mathcal{L} στην ισχυρή της μορφή. Το γεγονός αυτό προκαλεί περισσότερα προβλήματα στους διαφορικούς παρά στους ολοκληρωτικούς τελεστές και, για το λόγο αυτό, η ταξιοθεσία είναι περισσότερο δημοφιλής στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι η αβέβαιη ακρίβεια της μεθόδου, αφού δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τίποτα για τη συμπεριφορά του σφάλματος σε γεωμετρικά σημεία, που δεν αποτελούν μέλη του συνόλου P_j . Τέλος, το σύστημα, στο οποίο καταλήγει η εφαρμογή της μεθόδου, δεν είναι συνήθως συμμετρικό και αυτό εισάγει σημαντικότερες δυσκολίες στην επίλυσή του.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, οφείλουμε να άρουμε μία παρεξήγηση σχετική με το νόημα της μεθόδου point matching. Ορισμένοι συγγραφείς έχουν κατά καιρούς υποστηρίξει ότι, η point matching τεχνική είναι απλώς μία ειδική περίπτωση των προβολικών μεθόδων, με συναρτήσεις δοκιμής τις Dirac δέλτα συναρτήσεις, $\beta_j = \delta(P_j)$. Ο ισχυρισμός αυτός είναι τελείως αβάσιμος. Οι Dirac δέλτα συναρτήσεις δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, ούτε ανήκουν σε κάποιο χώρο Hilbert με εσωτερικό γινόμενο της μορφής που εμφανίζεται στη σχέση (2.36). Επομένως, έννοιες προβολής, απόστασης και σύγκλισης, δανεισμένες από τους χώρους Hilbert, δεν είναι διαθέσιμες για την περιγραφή του point matching. Είναι, συνεπώς, φανερό ότι, τόσο η θεωρία, όσο και η πρακτική της μεθόδου αυτής είναι τελείως διαφορετικές από τη θεωρία και την πρακτική των προβολικών μεθόδων και, σε καμμία περίπτωση, το point matching δεν αποτελεί ειδική τους μορφή.

2.6 Υπολογιστικές Μέθοδοι Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

Στην περίπτωση που, η γραμμική απεικόνιση L στην έκφραση $Lf = g$ είναι ένας ολοκληρωτικός ή ολοκληρωτικο-διαφορικός τελεστής, τότε λέμε ότι, το σύστημά μας περιγράφεται από μια ολοκληρωτική εξίσωση. Με τον όρο αυτό, αναφερόμαστε σε κάθε εξίσωση, που εμπλέκει άγνωστη ποσότητα μέσα σε κάποιο ολοκλήρωμα. Απλά παραδείγματα ολοκληρωτικών εξισώσεων αποτελούν οι μετασχηματισμοί Fourier, Laplace και Hankel.

Έχουμε ήδη καταστρώσει μια ολοκληρωτική εξίσωση στο πρώτο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα αναφερόμαστε στη σχέση (1.25), που είναι μια εξίσωση Fredholm πρώτου τύπου. Εκείνη η έκφραση αφορούσε ένα στατικό πρόβλημα. Στη συνέχεια θα στρέψουμε την προσοχή μας στις ολοκληρωτικές διατυπώσεις ηλεκτροδυναμικών φαινομένων.

Στο πνεύμα αυτό, στην επόμενη παράγραφο θα ασχοληθούμε με το απλούστερο πρακτικό πρόβλημα της θεωρίας κεραιών, ένα χώρο όπου παραδοσιακά κυριαρχούν οι ολοκληρωτικές τεχνικές. Το πρόβλημα αυτό είναι ο προσδιορισμός της ρευματικής κατανομής πάνω στην αγωγή επιφάνεια μιας λεπτής κυλινδρικής κεραίας. Ο πρώτος ερευνητής, που διατύπωσε και έλυσε ολοκληρωτική εξίσωση για ένα τέτοιο πρόβλημα ακτινοβολίας, υπήρξε ο Rocklington το 1897 [1].

Στο σημείο αυτό, πρέπει να παρατηρήσουμε πως επιλέξαμε, να αναφερθούμε στο πρόβλημα της κυλινδρικής κεραίας, γιατί η απλότητά του το καθιστά πρόσφορο για παρουσίαση. Παράλληλα ο αριθμητικός χειρισμός πιο σύνθετων προβλημάτων είναι παρόμοιος, αν και, όπως είναι φυσικό, η ηλεκτρομαγνητική τους διατύπωση είναι πιο απαιτητική.

Για να μην δώσουμε την εσφαλμένη εντύπωση πως, η ολοκληρωτική κατάστρωση προσφέρεται μόνο για το ειδικό πρόβλημα, που θα αναλύσουμε στη συνέχεια, αξίζει στο σημείο αυτό να κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε μερικές μόνον από τις πρακτικές εφαρμογές των ολοκληρωτικών μεθόδων στην ανάλυση συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας. Πέρα από τη χρήση τους από τους Harrington [2] και Rao [3] σε ηλεκτροστατικά προβλήματα για τον υπολογισμό Δαπλασιανών δυναμικών και τη μοντελοποίηση κυλινδρικών κεραιών αλλά και σκεδαστών από τους Richmond [4] και Mei [5], οι ολοκληρωτικές εξισώσεις έχουν αξιοποιηθεί, μεταξύ άλλων, στη βελτιστοποίηση κεραιών (Landstorfer 1985 [6]) και στο θέμα της ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας του επικοινωνιακού εξοπλισμού πλοίων (Perini 1982 [7]). Επιπλέον, εκτός από τη μοντελοποίηση κυλινδρικών διατάξεων, οι ολοκληρωτικές τεχνικές έχουν αποδείξει την αξία τους και στα απαιτητικά προβλήματα σκέδασης και ακτινοβολίας σωμάτων που προκύπτουν από περιστροφή (bodies of revolution, Glisson 1980 [8]) και σωμάτων με αυθαίρετη γεωμετρία (arbitrary shape geometry, Rao 1966 [138]). Τέλος, με ολοκληρωτικές εξισώσεις έχουν προσομοιωθεί αρκετά είδη γραμμών μεταφοράς [9], και έχουν αναλυθεί από προβλήματα ανοιγμάτων (aperture problems [10]) έως βιομαγνητικά προβλήματα [11].

2.6.1 Κατάστρωση της Ολοκληρωτικής Εξίσωσης Μοντελοποίησης Κυλινδρικής Κεραίας

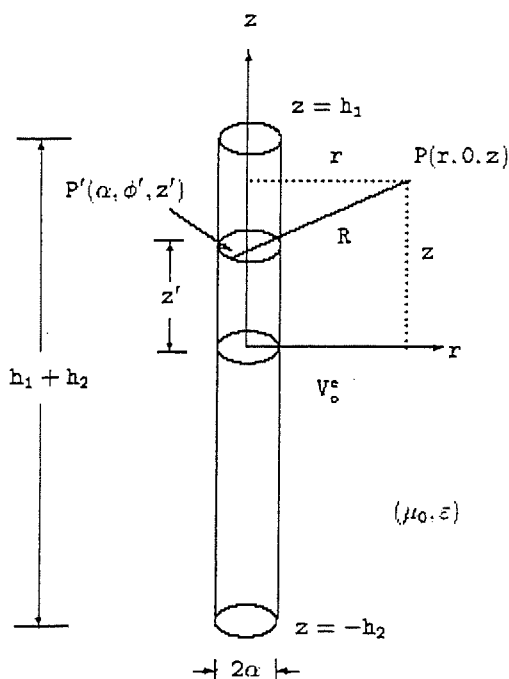
Η εισαγωγή της έννοιας της αντίδρασης (reaction) έγινε από τον Rumsey [19], με σκοπό την απλοποίηση της κατάστρωσης προβλημάτων συνοριακών τιμών στον ηλεκτρομαγνητισμό. Η αντίδραση μεταξύ δύο μονοχρωματικών πηγών a και b της ίδιας συχνότητας, που αποτελούνται από τα ηλεκτρικά ρεύματα \mathbf{J}_a and \mathbf{J}_b και τα μαγνητικά \mathbf{M}_a and \mathbf{M}_b , ορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης

$$\langle a, b \rangle = \iiint_{V_b} (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b - \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b) dV \quad (2.44)$$

όπου τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, που ακτινοβολούν οι πηγές a και b , συμβολίζονται με \mathbf{E}_a , \mathbf{H}_a και \mathbf{E}_b , \mathbf{H}_b , αντίστοιχα. Ο χώρος ολοκλήρωσης V_b είναι η περιοχή, που περιέχει τις ρευματικές κατανομές \mathbf{J}_b και \mathbf{M}_b .

Η χρήση του συμβόλου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ για την αντίδραση δεν είναι αυθαίρετη. Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.2, το ίδιο σύμβολο χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση εσωτερικού γινομένου συναρτήσεων. Και, όπως πρώτος επισήμανε ο Harrington [25], το μέγεθος της αντίδρασης αποτελεί ιδανική επιλογή για εσωτερικό γινόμενο στην κατάστρωση προβολικών μεθόδων σε προβλήματα μοντελοποίησης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας.

Η αντίδραση είναι ένα συμμετρικό γινόμενο και δεν θα πρέπει να τη συγχέουμε με το λεγόμενο Hilbert εσωτερικό γινόμενο, που πολλές φορές υποδηλώνεται με το ίδιο σύμβολο, αλλά εμπλέκει το μιγαδικό συζυγή της μίας από τις δύο συναρτήσεις, που συνδέει. Η διαφορά μεταξύ των δύο γινομένων είναι ουσιώδης. Το Hilbert εσωτερικό γινόμενο περιγράφει ισχύ, ενώ η αντίδραση σχετίζεται με την αρχή της αμοιβαιότητας (reciprocity). Μόνο για πραγματικές συναρτήσεις τα δύο γινόμενα ταυτίζονται.



Σχήμα 2.5: Μία κυλινδρική διπολική κεραία.

Στο Σχήμα 2.5 βλέπουμε μία γυμνή κυλινδρική κεραία. Είναι ευθύγραμμη, έχει μήκος (h_1+h_2) και κυκλική διατομή ακτίνας a . Είναι τοποθετημένη σε χώρο με μιγαδική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_0 - j(\sigma/\omega)$ και για τη διέγερσή της εφαρμόζουμε το δυναμικό διέγερσης V_0^e κατά μήκος απειροστού διακένου στο $z=0$.

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος ισοδυναμίας του Schelkunoff, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον αγωγίμο κύλινδρο με το περιβάλλον μέσο, αν εισάγουμε στην επιφάνειά του τις ακόλουθες ισοδύναμες ρευματικές κατανομές

$$\mathbf{J}_S = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (2.46)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στην S . Αν ορίσουμε τις \mathbf{J}_S και \mathbf{M}_S , όπως φαίνεται στις (2.45) και (2.46), το ολικό πεδίο στο εσωτερικό της κυλινδρικής κεραίας μηδενίζεται.

Για να λύσουμε το πρόβλημα ακτινοβολίας της κεραίας, αντικαθιστούμε τις πραγματικές άγνωστες πηγές \mathbf{J}_S και \mathbf{M}_S με προσεγγιστικές μορφές τους, που τις

προσαρμόζουμε, έτσι ώστε οι αντιδράσεις τους σε καθορισμένες πηγές δοκιμής να είναι οι σωστές. Η προσαρμογή αυτή μας εξασφαλίζει ότι οι προσεγγιστικές πηγές θα φαίνονται ίδιες με τις πραγματικές, σύμφωνα με τις φυσικές παρατηρήσεις, που είναι περισσότερο χαρακτηριστικές για το πρόβλημα που εξετάζουμε.

Οι προσεγγιστικές ρευματικές κατανομές, που χρησιμοποιούμε, έχουν τη μορφή αναπτυγμάτων καταλλήλων συναρτήσεων βάσης. Η προσαρμογή τους γίνεται προσδιορίζοντας τους άγνωστους συντελεστές των αναπτυγμάτων. Για τον προσδιορισμό αυτό, παίρνουμε τις αντιδράσεις των προσεγγιστικών κατανομών σε συγκεκριμένες πηγές δοκιμής και απαιτούμε να λαμβάνουν τις σωστές τιμές.

Έστω \mathbf{J}_i οι ηλεκτρικές πηγές δοκιμής, που τοποθετούμε στην επιφάνεια S της κεραίας. Με \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i συμβολίζουμε το ηλεκτρικό και μαγνητικό, αντίστοιχα, πεδίο, που ακτινοβολούν οι πηγές αυτές στο γύρω χώρο. Από το θεώρημα της αμοιβαιότητας έχουμε ότι η αντίδραση των πηγών \mathbf{J}_S και \mathbf{M}_S στις πηγές δοκιμής \mathbf{J}_i είναι ίση με την αντίδραση των \mathbf{J}_i στις \mathbf{J}_S και \mathbf{M}_S

$$\iint_S (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_S - \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{M}_S) dS = \iint_S \mathbf{E}_S \cdot \mathbf{J}_i dS \quad (2.47)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.47) ισχύει για τις πραγματικές πηγές \mathbf{J}_S και \mathbf{M}_S και απαιτούμε να την ικανοποιούν και οι προσεγγιστικές τους μορφές. Παρακάτω θεωρούμε ότι, η κεραία που εξετάζουμε είναι τέλεια αγωγίμη και κατά συνέπεια $\mathbf{M}_S = 0$. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, η εφαπτομενική στην S συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}_S θα μηδενίζεται παντού πάνω στην επιφάνεια της κεραίας, εκτός από την περιοχή του απειροστού διακένου διέγερσης. Η εισαγωγή της αριστεράς αυτής φυσικής πληροφορίας για το πρόβλημα στην (2.47) έχει σαν αποτέλεσμα τον πλήρη και αναλυτικό καθορισμό του δεξιού μέλους της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Την εξίσωση αυτή μπορούμε να την απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο, καταφεύγοντας στις πολύ γνωστές προσεγγίσεις λεπτού σύρματος (thin wire approximations). Τις προσεγγίσεις λεπτού σύρματος μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε, όταν η ακτίνα της κεραίας είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος στον γύρω χώρο και το μήκος της κεραίας πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα της. Στα πλαίσια των προσεγγίσεων αυτών, αγνοούμε τις ολοκληρώσεις πάνω στις βάσεις της κυλινδρικής κεραίας, καθώς και την περιφερειακή συνιστώσα J_ϕ της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος, ενώ θεωρούμε ότι η αξονική συνιστώσα J_z είναι ανεξάρτητη από την κυλινδρική συντεταγμένη ϕ . Με βάση τις παραπάνω παραδοχές, η ολοκληρωτική εξίσωση της αντίδρασης για μία κεραία λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right) \frac{e^{-jkR}}{R} I_1(z') d\phi' dz' \right) I_S(z) d\phi dz = V_0^e I_1(0) \quad (2.48)$$

όπου

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi - \phi'}{2}\right)} \quad (2.49)$$

Στην παράγραφο που ακολουθεί, περιγράφουμε την αριθμητική επίλυση της (2.48).

2.6.2 Επίλυση με τη Μέθοδο των Ροπών

Η αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι ένα θέμα που έχει μελετηθεί πολύ. Μια μεγάλη ποικιλία μεθόδων επίλυσης έχουν αναπτυχθεί, όπως είναι η μέθοδος του Nyström και οι επαναληπτικές (iterative) τεχνικές. Στον ηλεκτρομαγνητισμό, χωρίς καμμία αμφιβολία, η περισσότερο δημοφιλής τεχνική είναι η μέθοδος των ροπών (method of moments) [20].

Για να είμαστε ιστορικά ακριβείς, η μέθοδος είχε αρχικά εφαρμοστεί σε ειδικά προβλήματα από τους Mei και Van Bladel [21], Andreassen [22], Richmond [23] και Waterman [24]. Εντούτοις, η πατρότητά της δίκαια αποδίδεται στον Harrington, καθώς αυτός ήταν που, πρώτος [25] ενοποίησε τις περιορισμένες ειδικές μορφές της μεθόδου και έδωσε μία γενικευμένη περιγραφή της. Έθεσε με τον τρόπο αυτό τα θεμέλια για την αλματώδη ανάπτυξη, που γνώρισε η μέθοδος τις τελευταίες δεκαετίες.

Η μέθοδος των ροπών είναι ουσιαστικά μία προβολική μέθοδος. Για να λύσουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα με τη βοήθειά της, πρέπει πρώτα να εκφράσουμε το άγνωστο μέγεθος του προβλήματος σαν ένα γραμμικό συνδυασμό καταλλήλων συναρτήσεων βάσης. Στην περίπτωση που θέλουμε να αναλύσουμε την ακτινοβολία κεραίας, η ζητούμενη ποσότητα είναι το ρεύμα

$$I_S(z) = \sum_{n=1}^N A_n F_n(z) \quad (2.50)$$

που ρέει πάνω στην επιφάνεια της. Στο παραπάνω ανάπτυγμα, A_n είναι άγνωστοι συντελεστές που πρέπει να προσδιορίσουμε, ενώ με $F_n(z)$ συμβολίζουμε τις συναρτήσεις βάσης.

Οι συναρτήσεις βάσης, που χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο στον ηλεκτρομαγνητισμό, μπορούν να καταχθούν σε δύο γενικές κατηγορίες. Η πρώτη αποτελείται από τις λεγόμενες ολικές συναρτήσεις (entire domain functions), που ορίζονται και είναι μη μηδενικές σε ολόκληρο το χώρο που μοντελοποιούμε. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις αποκαλούμενες τμηματικές (subdomain or subsectional) συναρτήσεις βάσης που, όπως υποδηλώνει και το όνομά τους, είναι μη μηδενικές μόνον πάνω σε ένα κομμάτι του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που προσεγγίζουμε. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν, μεταξύ άλλων, οι πολύ γνωστές συναρτήσεις παλμού (piecewise constant ή pulse functions) και οι τμηματικά γραμμικές ή τριγωνικές συναρτήσεις (piecewise linear ή triangle functions).

Από τα δύο είδη συναρτήσεων βάσης, οι τμηματικές χρησιμοποιούνται συχνότερα στην πράξη. Αυτό συμβαίνει γιατί, σε αντίθεση με τις ολικές, μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς a priori γνώση της φύσης της συνάρτησης, που πρόκειται να αναπαραστήσουν. Αν, όμως, η γνώση αυτή είναι στην διάθεσή μας, τότε οι ολικές συναρτήσεις εμφανίζουν ένα πλεονέκτημα, καθώς μας δίνουν τη δυνατότητα να έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα με χρήση λιγότερων όρων και κατά συνέπεια αγνώστων στο ανάπτυγμα. Μια πιο εκτεταμένη συζήτηση για τις τμηματικές και ολικές συναρτήσεις γίνεται στην [13, Παρ. 3.1].

Στην τεχνική που παρουσιάζουμε στην παράγραφο αυτή, χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τμηματικές συναρτήσεις βάσης και, πιο συγκεκριμένα, τις συναρτήσεις τεμαχισμένου ημιτόνου (piecewise sinusoids). Οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται από τη σχέση

$$F_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin(k(z - z_{n-1}))}{\sin(k\Delta z)}, & z_{n-1} \leq z \leq z_n \\ \frac{\sin(k(z_{n+1} - z))}{\sin(k\Delta z)}, & z_n \leq z \leq z_{n+1} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.51)$$

όπου $\Delta z = z_n - z_{n-1} = z_{n+1} - z_n$ είναι το μήκος των διαστημάτων, στα οποία υποδιαιρούμε την κεραία. Αν και στην πράξη χρησιμοποιούμε, κατά κανόνα, ισομήκη διαστήματα, κάτι τέτοιο δεν είναι γενικά απαραίτητο.

Τη μορφή των συναρτήσεων τεμαχισμένου ημιτόνου μπορούμε να τη δούμε στο Σχήμα 2.6. Όπως βλέπουμε εκεί, οι συναρτήσεις τεμαχισμένου ημιτόνου εμφανίζουν, ως ένα βαθμό, ομοιότητα με την ημιτονοειδή κατανομή, που χαρακτηρίζει τις ρευματικές κατανομές κυλινδρικών κεραιών (γυμνών και μονωμένων). Επιπλέον, η χρήση τους εγγυάται το μηδενισμό του ρεύματος στα άκρα της κεραίας.

Ένα άλλο πολύ βασικό τους πλεονέκτημα είναι ότι, μας επιτρέπουν να εκτελέσουμε αναλυτικά δύο από τις ολοκληρώσεις που εμφανίζονται στην (2.48), όταν ως k στην (2.51) επιλέξουμε τον κυματριθμό του περιβάλλοντος μέσου. Κάτι τέτοιο συνεπαγεται πολύ σημαντικό κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο, όπως και περιορισμό των αριθμητικών σφαλμάτων. Ακόμα, οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες, και αυτό είναι χαρακτηριστικό του οποίου την αξία θα εκτιμήσουμε αργότερα. Τέλος, κατανέμοντας τις συναρτήσεις τεμαχισμένου ημιτόνου, με τρόπο τέτοιο ώστε να σχηματίζεται μία αλληλοεπικαλυπτόμενη διάταξη πάνω στην επιφάνεια της κυλινδρικής κεραίας, εξασφαλίζουμε αυτόματα τη συνέχεια του ρεύματος $I_S(z)$.

Τα τεμαχισμένα ημίτονα $F_n(z)$ επιλέγουμε και σαν συναρτήσεις δοκιμής. Αυτό σημαίνει, ότι η μέθοδος των ροπών, που προτείνουμε, αποτελεί ειδική εφαρμογή της μεθόδου Galerkin, αφού οι συναρτήσεις δοκιμής ταυτίζονται με τις συναρτήσεις βάσης. Ένα από τα σημαντικά πλεονεκτήματα, που προσφέρει η

μέθοδος Galerkin είναι πως, το μέγεθος της αντίδρασης παρουσιάζει στασιμότητα (stationary reaction) και η μέθοδος των ροπών χαρακτηρίζεται από μεταβολικές (variational) ιδιότητες. Αυτό σημαίνει πως, σφάλματα πρώτης τάξεως στον υπολογισμό της ρευματικής κατανομής έχουν σαν αποτέλεσμα λάθη το πολύ δευτέρας τάξεως στον προσδιορισμό της αντίδρασης. Επομένως, αν η εσωτερική αντίσταση της κεραίας υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την αντίδραση, θα εμφανίζει κι αυτή στασιμότητα και θα υπολογίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια από τη ρευματική κατανομή.

Για να προσδιορίσουμε τους άγνωστους συντελεστές A_n , αντικαθιστούμε το ανάπτυγμα (2.50) στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.48) και απαιτούμε την ικανοποίησή της, για N διαφορετικές συναρτήσεις δοκιμής F_n . Με τον τρόπο αυτό, παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} A_n = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.53)$$

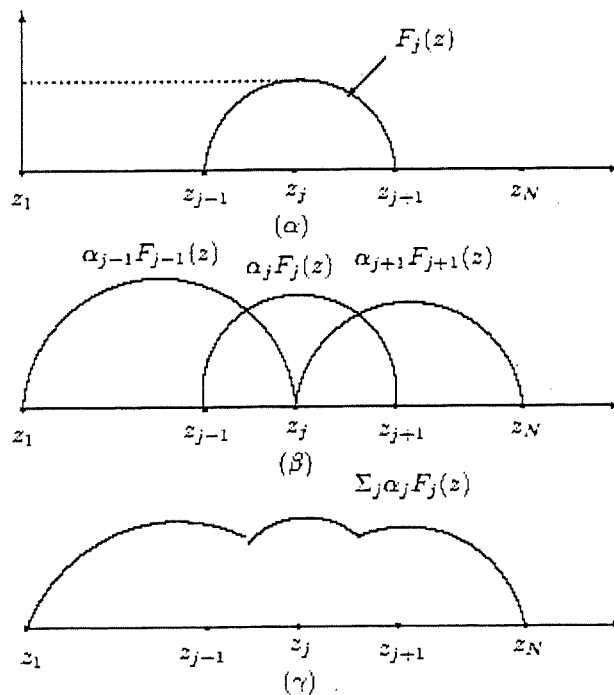
όπου

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{8\pi^2} \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} F_m(z') d\phi' dz' \right) F_n(z) d\phi dz \quad (2.53)$$

και

$$V_m = \begin{cases} V_0^e F_m(0), & z_{m-1} \leq 0 \leq z_{m+1} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.54)$$

Ο αναλυτικός προσδιορισμός των στοιχείων των πινάκων Z_{mn} και V_m γίνεται στην παράγραφο 3.3 του επόμενου κεφαλαίου.



Σχήμα 2.6: Τμηματικές συναρτήσεις τεμαχισμένου ημιτόνου: (α) Γενική μορφή. (β) Σύνολο διαδοχικών αλληλοεπικαλυπτόμενων συναρτήσεων. (γ) Γραμμικός συνδυασμός.

2.7 Η Μέθοδος των Βοηθητικών Πηγών

Η Μέθοδος των Βοηθητικών Πηγών (Method of Auxiliary Sources / MAS) αποτελεί μια προηγμένη και πολλά υποσχόμενη υπολογιστική τεχνική επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών, εναλλακτική της κλασικής μεθόδου επιφανειακών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Διαθέτει σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι της τελευταίας, κυρίως όσον αφορά στην αριθμητική ευστάθεια, υπολογιστική ακρίβεια και ευκολία στην υλοποίηση, ενώ επιπλέον, αν και αριθμητική, η MAS ενέχει και στοιχεία φυσικής αντίληψης και φυσικής κατανόησης του εκάστοτε προβλήματος μοντελοποίησης.

2.7.1 Συγγενείς Μέθοδοι

Η MAS αναπτύχθηκε σταδιακά για πολλά χρόνια στη Δημοκρατία της Γεωργίας (πρώην Σοβιετική Ένωση) από μαθηματικούς και φυσικούς ερευνητές, στους οποίους οφείλει και την ονομασία της [30-56], ενώ τα τελευταία χρόνια έχει ξεκινήσει σημαντική συνεργασία και με Έλληνες ερευνητές στην ερευνητική

αυτή περιοχή [57-72]. Η ίδια μέθοδος αναπτύχθηκε ανεξάρτητα και από άλλες ερευνητικές ομάδες ανά τον κόσμο και με διαφορετικές ονομασίες, όπως "The Current Model Method" [73-81] ή "The Discrete Singularity Method" [82-84], κυρίως για την επίλυση προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης από αγωγίμες και διηλεκτρικές επιφάνειες. Η κοινή ιδέα σε όλες αυτές τις μεθόδους είναι ότι, το πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν διατυπώνεται με αγνώστους τις συνεχείς επιφανειακές κατανομές ισοδύναμων ρευμάτων που ρέουν στις ίδιες επιφάνειες, όπου επιβάλλονται οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, αλλά με αγνώστους διακριτά, νοητά ρεύματα, τις «βοηθητικές πηγές» (auxiliary sources / AS), που κείνται σε κάποια απόσταση από τα φυσικά σύνορα του προς μοντελοποίηση συστήματος.

Πράγματι, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο 2.6, στις κλασικές τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων, εφαρμόζοντας το θεώρημα Ισοδυναμίας του Schelkunoff (Equivalence Principle), το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός ομογενούς, ιστροπικού και γραμμικού χωρίου μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια του γνωστού επιβαλλόμενου εξωτερικού πεδίου (δηλαδή της διέγερσης) και αγνώστων ισοδύναμων ηλεκτρικών και μαγνητικών συνεχών ρευμάτων, κατανεμημένων πάνω στην επιφάνεια του φυσικού συνόρου του υπό εξέταση χωρίου. Η χρησιμοποίηση των ισοδύναμων αυτών ρευμάτων είναι απαραίτητη για τη μοντελοποίηση της πεδιακής ασυνέχειας κατά μήκος της επιφάνειας του συνόρου. Έτσι, εκφράζοντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ως προς το επιβαλλόμενο εξωτερικό πεδίο και τις συνεχείς ισοδύναμες ρευματικές κατανομές, προκύπτουν οι διάφοροι τύποι επιφανειακών ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες, γενικά, επιλύονται αριθμητικά, εφαρμόζοντας τη Μέθοδο των Ροπών (MoM).

Αντιθέτως, η MAS δεν παρέχει ιδιαίτερη ερμηνεία και περιγραφή των ρευματικών ασυνεχειών στα σύνορα, αλλά ανασκευάζει/περιγράφει απευθείας τα άγνωστα πεδία σε κάθε περιοχή με τη βοήθεια AS, μετατοπισμένων ως προς τα φυσικά σύνορα του εκάστοτε χωρίου. Οι AS επιλέγονται, έτσι ώστε τα πεδία τους να είναι στοιχειώδεις αναλυτικές λύσεις του προς επίλυση προβλήματος συνοριακών τιμών. Τότε, τα πεδία σε κάθε χωρίο εκφράζονται σαν υπερθέσεις αυτών των στοιχειωδών αναλυτικών λύσεων, με άγνωστα βάρη, που προσδιορίζονται αριθμητικά επιβάλλοντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες σε διακριτά σημεία (collocation points / CP) πάνω στο φυσικό σύνορο του εκάστοτε χωρίου.

Βέβαια, η ιδέα της περιγραφής/προσέγγισης μιας πεδιακής κατανομής με τη βοήθεια γραμμικού συνδυασμού αναλυτικά γνωστών πεδιακών συναρτήσεων δεν συναντάται αποκλειστικά και μόνο στη MAS. Τόσο η «Προσέγγιση λεπτού σύρματος» (Thin wire approximation), που μοντελοποιεί την άγνωστη ρευματική κατανομή πάνω στην κεραία ως νηματοειδές ρεύμα, που ρέει κατά τον άξονα της κεραίας, όσο και η κλασική λύση του Μίε για μια σφαίρα, με αγνώστους διακριτές πολυπολικές πηγές (multipole sources) στο κέντρο της σφαίρας, έχουν εννοιολογικές ομοιότητες με τη MAS, περιορίζονται, όμως, σε συγκεκριμένες γεωμετρίες. Το καινοτόμο στοιχείο, που καθιστά δυνατή την επίλυση γενικευμένων γεωμετριών, είναι η χρήση πολλαπλών διακριτών θέσεων για τις πηγές. Η ιδέα αυτή χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία στην Ηλεκτροστατική

για πολλά χρόνια, με το όνομα «Μέθοδος Προσομοίωσης Φορτίου» (Charge Simulation Method) [85]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, νοητά, διακριτά, γραμμικά φορτία κατανέμονται σε πολλαπλές διακριτές θέσεις έξω από το χωρίο, όπου ζητείται να υπολογιστεί το ηλεκτροστατικό πεδίο. Τα δυναμικά των νοητών αυτών φορτίων είναι ειδικές λύσεις των εξισώσεων Poisson και Laplace και τα πλάτη τους καθορίζονται από την ικανοποίηση των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών σε διακριτά σημεία του φυσικού συνόρου του χωρίου. Κατ' αντιστοιχία, στην Ηλεκτροδυναμική, διάφορες αριθμητικές τεχνικές, οι οποίες έχουν τη βάση τους στη «Μέθοδο Εκτεταμένης Συνοριακής Συνθήκης» (Extended Boundary Condition Method / EBCM) [86] και είναι, συνήθως, γνωστές σαν «Τεχνικές Γενικευμένων Πολυπόλων» (Generalized Multipole Techniques / GMT's) ή «Τεχνικές Πολλαπλών Πολυπόλων» (Multiple Multipole Techniques / MMT's), προσομοιώνουν ηλεκτρομαγνητικά πεδία με τη βοήθεια κυλινδρικών και σφαιρικών πολυπολικών κυματικών συναρτήσεων, μέχρι κάποια συγκεκριμένη τάξη και σε διακριτές πολλαπλές θέσεις [87-94]. Αν και αναπτύχθηκε ανεξάρτητα, η MAS θα μπορούσε να θεωρηθεί ειδική περίπτωση της GMT, όπου ενεργοποιούνται μόνον πόλοι μηδενικής τάξης, συγκροτώντας ένα σύνολο νοητών πηγών, οι οποίες έχουν, όμως, φυσική ερμηνεία και είναι αναλυτικά απλούστερες αυτών της GMT.

Οι δυνατότητες της MAS μελετήθηκαν αρκετά διεξοδικά κατά τις τελευταίες δεκαετίες και η ακρίβειά της βελτιώθηκε σημαντικά, κυρίως ως προς την επίλυση προβλημάτων σκέδασης. Πρόσφατες εξελίξεις στην περιοχή της MAS περιλαμβάνουν την υβριδοποίησή της με τη MoM [64-68], την επίλυση προβλημάτων αντίστροφης σκέδασης¹ [57], [60], [79], [95], σκέδασης από επιφάνειες εμπέδησης και από διηλεκτρικά επικαλυμμένους αγωγούς, που μοντελοποιούνται με τη λεγόμενη Πρότυπη Συνοριακή Συνθήκη Εμπέδησης (Standard Impedance Boundary Condition / SIBC) [63], σκέδασης από ακμές [63], [77] και σκέδασης από μηχανές αεριοθούμενου αεροπλάνου [72]. Επιπλέον, έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον η ανάπτυξη μιας εναλλακτικής μορφής της MAS, της Τροποποιημένης (Modified) MAS (MMAS), για την επίλυση «λεπτών» (πεπλατυσμένων) διατάξεων και ανοικτών χωρίων [69-72]. Η ουσία της τροποποίησης στη MMAS, όπως παρουσιάζεται στην παράγραφο 2.7.6, συνίσταται στο γεγονός ότι, οι άγνωστες ποσότητες, ως προς τις οποίες καταστρώνεται το πρόβλημα, δεν είναι τα πεδία, που δημιουργούν οι νοητές ρευματικές AS, αλλά τα ρεύματα αυτά καθαυτά και τα φορτία πάνω στις βοηθητικές επιφάνειες.

2.7.2 Περιγραφή της «Κλασικής» Μεθόδου των Βοηθητικών Πηγών

Στην πιο ευρέως διαδεδομένη, έως σήμερα, εκδοχή της MAS, που στο εξής θα αναφέρεται ως «κλασική» MAS, επιλέγονται ως AS, για τα μεν διδιάστατα (2D) προβλήματα, νηματοειδή ρεύματα άπειρου μήκους, των οποίων τα πεδία είναι ανάλογα Hankel συναρτήσεων (2D συνάρτηση Green - βλέπε Παράρτημα,

¹ Και η GMT έχει πρόσφατα εφαρμοστεί σε προβλήματα αντίστροφης σκέδασης [94].

παράγραφος 2.7.7), για τα δε τρισδιάστατα (3D) προβλήματα, ζεύγη διπόλων Hertz, κάθετων μεταξύ τους και, ταυτόχρονα, εφαπτόμενων στη βοηθητική επιφάνεια, των οποίων τα πεδία είναι ανάλογα της 3D συνάρτησης Green. Οι AS κατανέμονται ομοιογενώς πάνω στις βοηθητικές επιφάνειες, που είναι σύμμορφες προς τις πραγματικές επιφάνειες (τα φυσικά σύνορα). Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε κάθε χωρίο εκφράζονται σαν υπερθέσεις των πεδίων των AS, με άγνωστους συντελεστές βάρους, που προσδιορίζονται αριθμητικά, μέσω της επιβολής της κατάλληλης συνοριακής συνθήκης σε διακριτά CP πάνω στο φυσικό σύνορο του εκάστοτε χωρίου (point-matching). Η κατανομή των CP είναι, επίσης, ομοιογενής και ο αριθμός τους, συνήθως, ίσος προς αυτόν των AS, αν και ενίοτε είναι προτιμητέος ο υπερπροσδιορισμός του συστήματος γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή η θεώρηση περισσότερων CP από ό,τι AS και, στη συνέχεια, η επίλυση του συστήματος με το βέλτιστο δυνατό τρόπο (π.χ. υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων) [92].

Για πληρέστερη κατανόηση της αρχής της MAS, στα Σχήματα 2.7 και 2.8 παρουσιάζονται δύο γενικευμένα προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης ενός εξωτερικά επιβαλλόμενου γνωστού ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}^{inc} από έναν τέλειο ηλεκτρικό αγωγό (perfect electric conductor / PEC) και ένα ομογενές και ιστροπικό διηλεκτρικό αντικείμενο, αντίστοιχα. Και οι δύο σκεδαστές δεν περιέχουν ακμές.

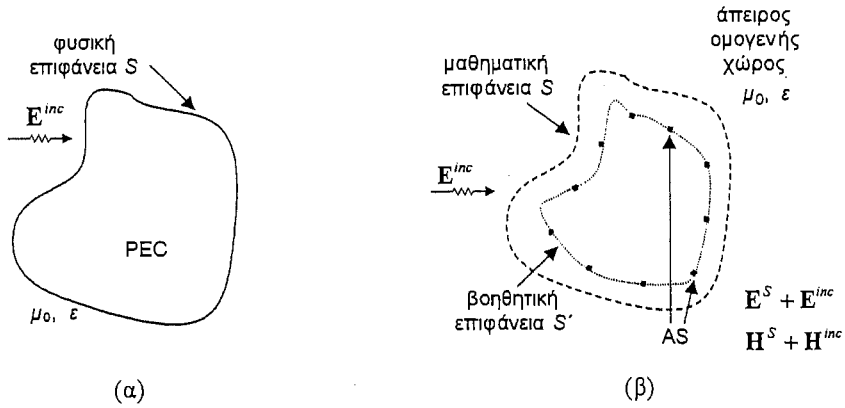
Στην πρώτη περίπτωση, ο PEC εξωτερικής επιφάνειας S βρίσκεται μέσα σε άπειρο ομογενή ιστροπικό και γραμμικό χώρο, διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 (Σχήμα 2.7(α)). Οι AS θεωρείται ότι ακτινοβολούν *χωρίς την παρουσία του PEC* μέσα σε άπειρο ομογενή ιστροπικό και γραμμικό χώρο διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 και βρίσκονται πάνω σε βοηθητική επιφάνεια S' που περικλείεται από την (νοητή) S (Σχήμα 2.7(β)), οπότε, το άγνωστο σκεδαζόμενο πεδίο \mathbf{E}^s περιγράφεται, σαν

$$\mathbf{E}^s = \sum_n \mathbf{E}_n^s = \sum_n \overline{\overline{\mathbf{G}}}_n \cdot \mathbf{a}_n \quad (2.55)$$

όπου \mathbf{E}^s είναι το πεδίο της n -στής AS, με $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_n$ γνωστές αναλυτικές λύσεις της αντίστοιχης κυματικής εξίσωσης² και \mathbf{a}_n άγνωστα βάρη. Επιβάλλοντας την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (μηδενισμός του εφαπτόμενου στη S ηλεκτρικού πεδίου) σε διακριτά CP πάνω στην (νοητή) S , προκύπτει ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων ως προς \mathbf{a}_n , η λύση του οποίου δίνει τα άγνωστα βάρη και, κατά συνέπεια, το άγνωστο σκεδαζόμενο πεδίο \mathbf{E}^s .

² Η σχέση (2.55), καθώς και οι επακόλουθες σχέσεις (2.56)-(2.57), δίνονται στην πλέον γενική μορφή 3D προβλημάτων, όπου οι άγνωστοι συντελεστές βάρους \mathbf{a}_n είναι διανύσματα και οι γνωστές αναλυτικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_n$ (συναρτήσεις Green) είναι δυάδες.

Για θέματα ύπαρξης και μοναδικότητας της MAS λύσης παραπέμπουμε στην [76].



Σχήμα 2.7: (α) PEC σκεδαστής, λείας εξωτερικής επιφάνειας S , φωτιζόμενος από γνωστό εξωτερικό πεδίο \mathbf{E}^{inc} μέσα σε άπειρο ομογενή ιστροπικό και γραμμικό χώρο διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 .

(β) Ισοδύναμο MAS μοντέλο: ο PEC σκεδαστής δεν υπάρχει, οι AS ακτινοβολούν μέσα σε άπειρο ομογενή ιστροπικό και γραμμικό χώρο διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 και βρίσκονται πάνω σε βοηθητική επιφάνεια S' , που περικλείεται από την (νοητή) S , ενώ τα CP, στα οποία ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη, βρίσκονται πάνω στην (νοητή) S .

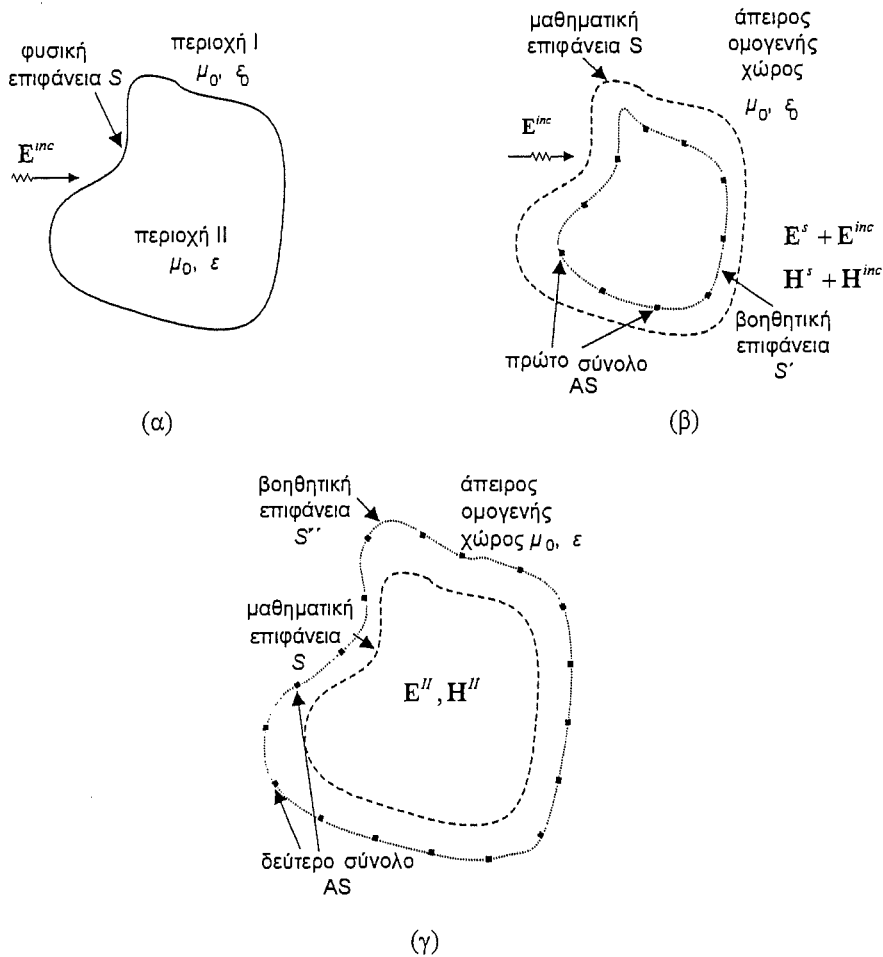
Στη δεύτερη περίπτωση, ο ομογενής ιστροπικός και γραμμικός διηλεκτρικός σκεδαστής διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ , μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 και εξωτερικής επιφάνειας S βρίσκεται μέσα σε άπειρο ελεύθερο χώρο (Σχήμα 2.8(α)). Για την κατάστρωση της MAS λύσης, χρειάζονται, τώρα, δύο σύνολα AS: ένα σύνολο AS, που ακτινοβολούν χωρίς την παρουσία του διηλεκτρικού σκεδαστή μέσα σε άπειρο ελεύθερο χώρο και βρίσκονται πάνω σε βοηθητική επιφάνεια S' , που περικλείεται από την (νοητή) S (Σχήμα 2.8(β)) και ένα δεύτερο σύνολο AS, που ακτινοβολούν και πάλι χωρίς την παρουσία του διηλεκτρικού σκεδαστή, αλλά μέσα σε άπειρο χώρο γεμάτο από το υλικό του διηλεκτρικού σκεδαστή και βρίσκονται πάνω σε βοηθητική επιφάνεια S'' , που περικλείει την (νοητή) S (Σχήμα 2.8(γ)). Τότε, το άγνωστο σκεδαζόμενο πεδίο \mathbf{E}^s στην περιοχή I δίνεται από το άθροισμα των πεδίων του πρώτου συνόλου AS, σαν

$$\mathbf{E}^s = \sum_n \mathbf{E}_n^s = \sum_n \overline{\mathbf{G}}_n^I \cdot \mathbf{a}_n^I \quad (2.56)$$

όπου \mathbf{E}_n^s είναι το πεδίο της n -στής AS του πρώτου συνόλου, με \mathbf{a}_n^I άγνωστους συντελεστές βάρους και $\overline{\mathbf{G}}_n^I$ γνωστές αναλυτικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης, που πρέπει να ικανοποιεί το \mathbf{E}^s , ενώ το άγνωστο πεδίο \mathbf{E}'' στην περιοχή II δίνεται από το άθροισμα των πεδίων του δεύτερου συνόλου AS, σαν

$$\mathbf{E}'' = \sum_n \mathbf{E}_n'' = \sum_n \overline{\mathbf{G}}_n'' \cdot \mathbf{a}_n'' \quad (2.57)$$

όπου \mathbf{E}'' είναι το πεδίο της n -στής AS του δεύτερου συνόλου, με \mathbf{a}_n'' άγνωστους συντελεστές βάρους και $\overline{\mathbf{G}}_n''$ γνωστές αναλυτικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης που πρέπει να ικανοποιεί το \mathbf{E}'' . Επιβάλλοντας σε διακριτά CP πάνω στην (νοητή) S την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών για το εφαπτομενικό στην S πεδίο, προκύπτει ένα συζευγμένο γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων, ως προς \mathbf{a}_n^I και \mathbf{a}_n'' , η λύση του οποίου δίνει τους άγνωστους συντελεστές βάρους και, κατά συνέπεια, τα άγνωστα πεδία \mathbf{E}^s και \mathbf{E}'' . Στην παράγραφο 2.7.5, παρουσιάζεται αναλυτικά η μαθηματική διατύπωση και η διαδικασία αριθμητικής επίλυσης ενός διδιάστατου προβλήματος σκέδασης.



Σχήμα 2.8: (α) Ομογενής ιστροπικός και γραμμικός διηλεκτρικός σκεδαστής, διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ , μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 και λείας εξωτερικής επιφάνειας S , φωτιζόμενος από γνωστό εξωτερικό πεδίο E^{inc} μέσα σε άπειρο ελεύθερο χώρο.

(β) Ισοδύναμο MAS μοντέλο για την περιγραφή του σκεδαζόμενου πεδίου στην περιοχή I: ο διηλεκτρικός σκεδαστής δεν υπάρχει, οι AS ακτινοβολούν μέσα σε άπειρο ελεύθερο χώρο και βρίσκονται πάνω σε βοηθητική επιφάνεια S' , που περικλείεται από την (νοητή) S , ενώ τα CP, στα οποία ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες, βρίσκονται πάνω στην (νοητή) S .

(γ) Ισοδύναμο MAS μοντέλο για την περιγραφή του πεδίου στην περιοχή II: ο διηλεκτρικός σκεδαστής δεν υπάρχει, οι AS ακτινοβολούν μέσα σε άπειρο ομογενή ιστροπικό και γραμμικό χώρο διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 και βρίσκονται πάνω σε βοηθητική επιφάνεια S'' , που περικλείει την (νοητή) S , ενώ τα CP, στα οποία ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες, βρίσκονται πάνω στην (νοητή) S .

2.7.3 Πλεονεκτήματα σε Σχέση με τη Μέθοδο των Ροπών

Όπως είναι φανερό, το ξεχωριστό και καινοτόμο χαρακτηριστικό της MAS, που την καθιστά πολύ αποδοτική και ακριβή ως υπολογιστική τεχνική, είναι η μη μηδενική απόσταση μεταξύ σημείων παρατήρησης και σημείων πηγής (δηλαδή, μεταξύ AS και CP). Αυτή η μετατόπιση ως προς τα φυσικά σύνορα εξαλείφει, στην πράξη, τα προβλήματα ανωμάλων/ιδιαζόντων σημείων της συνάρτησης Green ενός τυπικού πυρήνα MoM, συγκροτώντας ένα σύνολο λείων συναρτήσεων πάνω στα φυσικά σύνορα. Επιπλέον, η MAS είναι εννοιολογικά πολύ απλή και, επομένως, είναι και εξαιρετικά εύκολη στην υλοποίησή της: επιλέγοντας έναν πεπερασμένο αριθμό AS και CP, προκύπτει αυτόματα σύστημα γραμμικών εξισώσεων σε μητρική μορφή, αντί για ολοκληρωτικές εξισώσεις, χωρίς να είναι αναγκαία η χρήση επιπλέον MoM μετασχηματισμού. Πρόσθετο πλεονέκτημα της MAS αποτελεί το γεγονός ότι, εφόσον κάθε στοιχειώδης λύση στο σύνολο είναι γνωστή αναλυτικά, δεν χρειάζεται να καταφύγει κανείς στην ολοκλήρωση ρευματικών κατανομών για τον προσδιορισμό πεδιακών μεγεθών, σε κανένα στάδιο της MAS προσομοίωσης: ούτε κατά τον υπολογισμό των στοιχείων του πυρήνα, ούτε κατά την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων, ούτε κατά τον υπολογισμό άλλων κατανομών (π.χ. διαγραμμάτων ακτινοβολίας), που βοηθούν στην οπτικοποίηση κλπ.

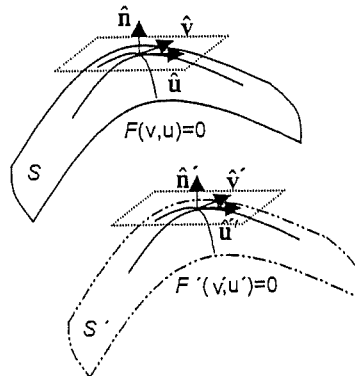
Τέλος, εξετάζοντας την υπολογιστική πολυπλοκότητα της MAS, μπορεί να αποδειχθεί ότι, η μέθοδος παρουσιάζει πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος, όσον αφορά στον υπολογιστικό χρόνο, εξαιτίας του ταχύτερου υπολογισμού των στοιχείων του πυρήνα του γραμμικού συστήματος. Ανάλογα με ορισμένες παραμέτρους (π.χ. ηλεκτρικές διαστάσεις, τάξη ολοκλήρωσης στον MoM πυρήνα κλπ.), η πολυπλοκότητα της MAS μπορεί να είναι σημαντικά μικρότερη από αυτή της MoM. Αν, μάλιστα, το πρόβλημα μοντελοποίησης είναι τέτοιο, ώστε η διακριτοποίηση της MAS να είναι μικρότερη από αυτή της MoM, τότε η MAS είναι πάντα πολύ πιο αποδοτική. Ακόμα, όμως, και στην περίπτωση, που η διακριτοποίηση της MAS είναι πυκνότερη, υπάρχει, γενικά, ένα κατάφλι στο μέγεθος της γεωμετρίας, κάτω από το οποίο το υπολογιστικό κόστος της MAS είναι μικρότερο από αυτό της MoM. Τα θέματα αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά στην [63].

2.7.4 Επιλογή του Τύπου, της Θέσης και του Αριθμού των Βοηθητικών Πηγών - Σύγκλιση και Ευστάθεια

Η επιλογή του τύπου των AS είναι πολύ κρίσιμη κατά την υλοποίηση της MAS. Καταρχήν, οποιοδήποτε σύνολο AS είναι αποδεκτό, αρκεί τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που δημιουργούνται από τις πηγές αυτές να είναι αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Maxwell. Όπως ήδη αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.7.2, στην κλασική MAS, για μεν τα 2D προβλήματα επιλέγονται, συνήθως, ως ακτινοβολούσες AS νηματοειδή ρεύματα άπειρου μήκους, των οποίων τα πεδία είναι ανάλογα Hankel συναρτήσεων (2D συνάρτηση Green, βλ. Παράρτημα, παράγραφος 2.7.7), όπως

$$\mathbf{E}_n(\boldsymbol{\rho}) = a_n H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n|) \hat{\mathbf{z}} \quad (2.58)$$

όπου υποτίθεται $+j\omega t$ αρμονική χρονική εξάρτηση, $\mathbf{E}_n(\boldsymbol{\rho})$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο της n -στής AS στη θέση $\boldsymbol{\rho}$, a_n είναι ο άγνωστος συντελεστής βάρους για τη n -στή AS, $H_0^{(2)}$ είναι η συνάρτηση Hankel μηδενικής τάξης και δεύτερου είδους, k είναι ο κυματαριθμός στο μέσο μέσα στο οποίο ακτινοβολούν οι AS, $\boldsymbol{\rho}_n$ είναι το διάνυσμα θέσης της n -στής AS και $\hat{\mathbf{z}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον εγκάρσιο άξονα του 2D προβλήματος. Για τα δε 3D προβλήματα, επιλέγονται, συνήθως, στην κλασική MAS ως ακτινοβολούσες AS ζεύγη στοιχειωδών διπόλων. Αν υποθέσουμε ότι, η φυσική επιφάνεια S της υπό εξέταση διάταξης εκφράζεται από την παραμετρική εξίσωση $F(v,u)=0$ και $\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των καμπυλών σταθερής παραμέτρου, τα οποία είναι ταυτοχρόνως εφαπτομενικά στην S και κάθετα μεταξύ τους, ακολουθώντας μια κλασική MAS κατάστροψη του προβλήματος, σε κάποια απόσταση από την S , ορίζουμε μια σύμμορφη προς την S βοηθητική επιφάνεια S' , η οποία εκφράζεται από την παραμετρική εξίσωση $F'(v',u')=0$ και σε κάθε «βοηθητικό» σημείο πάνω στην S' , οι AS είναι ζεύγη στοιχειωδών διπόλων, των οποίων τα πεδία είναι ανάλογα της 3D συνάρτησης Green. Τα μέλη κάθε ζεύγους είναι κάθετα μεταξύ τους και ταυτοχρόνως εφαπτομενικά στην S' , ώστε να μπορέσει με τον τρόπο αυτό να ληφθεί υπόψη η ασυνέχεια του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος της S' . Στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζεται τμήμα της φυσικής επιφάνειας S και της βοηθητικής επιφάνειας S' . Πέραν, βέβαια, των «κλασικών» τύπων AS, που μόλις περιγράφηκαν για 2D και 3D προβλήματα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλοι τύποι AS, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του εκάστοτε προβλήματος, π.χ. τον τύπο της διέγερσης, τη γεωμετρία κλπ.



Σχήμα 2.9: Τρισδιάστατη MAS υλοποίηση: τμήμα της φυσικής επιφάνειας S και της βοηθητικής επιφάνειας S' με βοηθητικές πηγές στοιχειωδή δίπολα κατά μήκος των εφαπτομενικών στην S' $\hat{\mathbf{v}}'$ και $\hat{\mathbf{u}}'$.

Άλλα σημαντικά θέματα κατά την υλοποίηση της MAS είναι η θέση και ο αριθμός των AS, καθώς και ο αριθμός και η κατανομή των CP πάνω στο φυσικό

σύνορο. Τα θέματα αυτά, γενικά, εξαρτώνται από τη διέγερση (προσπίπτον πεδίο σε προβλήματα σκέδασης ή τροφοδοσία σε προβλήματα ακτινοβολίας), τη γεωμετρία και τις ηλεκτρικές διαστάσεις και επηρεάζουν σημαντικά την απόδοση της MAS. Αν και η μέθοδος είναι μαθηματικά αυστηρή, πολλές φορές καταφεύγουμε σε εμπειρικούς τρόπους εκτίμησης σημαντικών παραμέτρων, όπως η θέση των AS στο χώρο³. Θεωρητικά, η διατύπωση της MAS επιτρέπει οποιονδήποτε αριθμό και θέση AS και οποιονδήποτε αριθμό και κατανομή CP. Όμως, κατά την υλοποίηση της κλασικής MAS, οι ακτινοβολούσες AS (νηματοειδή ρεύματα ή δίπολα Hertz) κατανέμονται, συνήθως, ομοιογενώς πάνω στις νοητές βοηθητικές επιφάνειες, οι οποίες είναι, συνήθως, σύμμορφες προς τις πραγματικές επιφάνειες (δηλαδή τα φυσικά σύνορα). Παρόλα αυτά, έχει αποδειχτεί ότι, σε αρκετές περιπτώσεις, είναι πολύ χρήσιμη, τόσο μια ανομοιογενής κατανομή AS, όσο και η επιλογή μη σύμμορφων βοηθητικών επιφανειών. Κλασικά παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων αποτελούν οι ακμές σε προβλήματα σκέδασης και η περιοχή διέγερσης σε προβλήματα ακτινοβολίας.

Επίσης, η απόσταση μεταξύ βοηθητικής επιφάνειας και πραγματικής επιφάνειας, ιδιαίτερα σε συνδυασμό και με την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών AS, επηρεάζει σημαντικά την απόδοση της MAS λύσης. Έχει αποδειχτεί ότι, ο ρυθμός σύγκλισης και η ακρίβεια ενός κώδικα MAS εξαρτάται από τη σχετική θέση των AS, ως προς τα ιδιάζοντα σημεία ή σημεία ανωμαλίας (δηλαδή τα σημεία απειρισμού) του πραγματικού πεδίου, που περιγράφουν αυτές οι AS [58-60], [78], [96]. Η μη ύπαρξη σημείων ανωμαλίας του πεδίου μεταξύ βοηθητικής επιφάνειας και πραγματικής επιφάνειας εγγυάται τη σύγκλιση της MAS λύσης. Αντίθετα, εάν υπάρχουν ιδιάζοντα σημεία του πεδίου μεταξύ βοηθητικής επιφάνειας και πραγματικής επιφάνειας, τότε η MAS λύση δεν συγκλίνει απαραίτητα. Παρόλα αυτά, πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι [78], ακόμη και σε αυτήν την τελευταία περίπτωση, όπου δεν υπάρχει μαθηματικά αποδεκτή λύση, μπορεί να ακολουθηθεί μια κλασική MAS διατύπωση του προβλήματος και, ενδεχομένως, να καταστεί δυνατό να προκύψουν αποτελέσματα αρκετά ακριβή, για συγκεκριμένες εφαρμογές που χρειαζόμαστε ως μηχανικοί, πριν η MAS λύση εισέλθει σε περιοχή αριθμητικών ασταθειών. Η ιδανικά βέλτιστη λύση -με την έννοια του ελάχιστου αριθμού χρησιμοποιούμενων AS- προκύπτει, αν οι AS τοποθετηθούν *ακριβώς* πάνω στις θέσεις των ιδιαζόντων σημείων του πεδίου, που αυτές καλούνται να περιγράψουν [58-60]. Η παρατήρηση αυτή αποδεικνύει ότι, όπως ήδη αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου 2.7, η MAS, αν και αριθμητική τεχνική, ενέχει, ως ένα βαθμό, και στοιχεία φυσικής αντίληψης και φυσικής κατανόησης του εκάστοτε προβλήματος μοντελοποίησης, χαρακτηριστικό που έχει, προφανώς, μεγάλη αξία για την εξέταση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας (σύνθετες ή/και ηλεκτρικά μεγάλες διατάξεις), όπου η κλασική MAS απαιτεί τεράστιο αριθμό AS. Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα δεν είναι, βέβαια, γνωστή εκ των προτέρων η ακριβής θέση των σημείων ανωμαλίας και, επιπλέον, η θέση αυτή, συχνά, εξαρτάται από τη

³ Αντίστοιχοι εμπειρικοί κανόνες έχουν προταθεί και για την GMT [93].

συχνότητα⁴. Επομένως, έχει ιδιαίτερη αξία η περαιτέρω εξέταση του όλου θέματος, με την πιθανή χρήση οπτικής θεωρίας ειδώλων και αναλυτικών τεχνικών βελτιστοποίησης, οι οποίες έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί με επιτυχία στο παρελθόν σε συγκεκριμένες γεωμετρίες, όπως κυλίνδρους κυκλικής διατομής, με βάση την αναλυτική συνέχιση μιγαδικών συναρτήσεων [78] και τη θεωρία καυστικών επιφανειών [58].

Όλα τα παραπάνω θέματα ακρίβειας και βελτιστοποίησης της MAS γίνονται ακόμη πιο κατανοητά, μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων, που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 4.

Όσον αφορά, τώρα, στα CP, ο αριθμός τους λαμβάνεται, συνήθως, ίσος προς αυτόν των AS, αν και σε κάποιες περιπτώσεις είναι προτιμητέος ο υπερπροσδιορισμός του συστήματος γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή η θεώρηση περισσότερων CP από ό,τι AS και, στη συνέχεια, η επίλυση του συστήματος με το βέλτιστο δυνατό τρόπο (π.χ. υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων) [92].

Σε κάθε περίπτωση, το μέγεθος που, καταρχήν, εξετάζεται είναι το σφάλμα στην ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των AS και/ή των CP και αυτό γιατί, προφανώς, μεταξύ των CP μπορεί η απόκλιση να είναι μεγάλη (βλέπε, για παράδειγμα, την παράγραφο 2.7.5.3).

2.7.5 Εφαρμογή σε Διδιάστατα Προβλήματα: Σκέδαση από Διηλεκτρικό Κύλινδρο

2.7.5.1 Περιγραφή του Προβλήματος και της Διαδικασίας Επίλυσής του

Στην παράγραφο αυτή, εφαρμόζουμε τη Μέθοδο των Βοηθητικών Πηγών για την επίλυση του προβλήματος TM σκέδασης από ομοιογενή διηλεκτρικό κύλινδρο αυθαίρετα ομαλής διατομής. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 2.7.2, χρησιμοποιούμε δύο σύνολα από βοηθητικές νηματοειδείς πηγές ρεύματος, προκειμένου να εξομοιώσουμε το πραγματικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εντός και εκτός του διηλεκτρικού κυλίνδρου. Συγκεκριμένα, το σκεδαζόμενο από τον κύλινδρο πεδίο εξομοιώνεται από ένα σύνολο πηγών τοποθετημένων στο εσωτερικό του κυλίνδρου, ενώ το πεδίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου εξομοιώνεται από ένα σύνολο πηγών που είναι τοποθετημένες εξωτερικά του κυλίνδρου.

Έστω ένας απείρου μήκους διηλεκτρικός κύλινδρος αυθαίρετης διατομής, του οποίου ο άξονας είναι παράλληλος στο $-z$ άξονα του ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων. Η διατομή του κυλίνδρου, καθώς και ένα σχετιζόμενο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων απεικονίζονται στο Σχήμα 2.10(α). Ο κύλινδρος είναι τοποθετημένος στον ελεύθερο χώρο (με μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και

⁴ Σε προβλήματα EM σκέδασης, για παράδειγμα, τα σημεία ανωμαλίας του σκεδαζόμενου πεδίου εξαρτώνται από τη συχνότητα λειτουργίας, από τη γεωμετρία του σκεδαστή και από την ομαλότητα του προσπίπτοντος εξωτερικού πεδίου στην επιφάνεια του σκεδαστή.

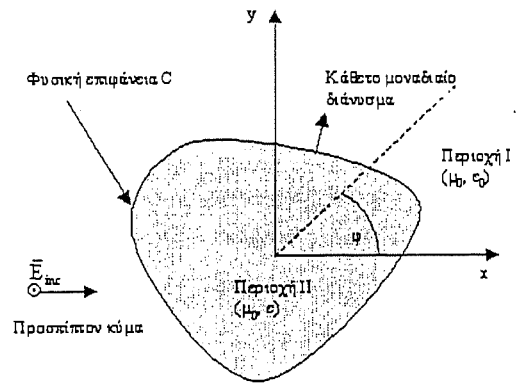
διηλεκτρική σταθερά ϵ_0) και αποτελείται από ομοιογενές διηλεκτρικό υλικό με μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και διηλεκτρική σταθερά ϵ . Γενικά, το ϵ είναι μιγαδικός αριθμός, ώστε να λαμβάνονται υπόψη οι απώλειες του υλικού. Για διευκόλυνση, η περιοχή στο εξωτερικό του κυλίνδρου θα αναφέρεται ως περιοχή I, η περιοχή στο εσωτερικό του κυλίνδρου θα αναφέρεται ως περιοχή II, ενώ η επιφάνεια του κυλίνδρου, που είναι το σύνορο μεταξύ των δύο περιοχών θα αναφέρεται ως C.

Έστω ότι, στον κύλινδρο προσπίπτει ένα TM ηλεκτρομαγνητικό κύμα, του οποίου οι πεδιακές συνιστώσες δίνονται από τις σχέσεις

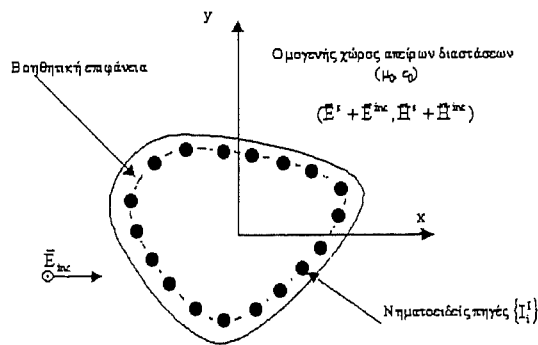
$$\mathbf{E}^{inc} = \hat{\mathbf{u}}_z E_z^{inc}(x, y) \quad (2.59)$$

$$\mathbf{H}^{inc} = \hat{\mathbf{u}}_x H_x^{inc}(x, y) + \hat{\mathbf{u}}_y H_y^{inc}(x, y) \quad (2.60)$$

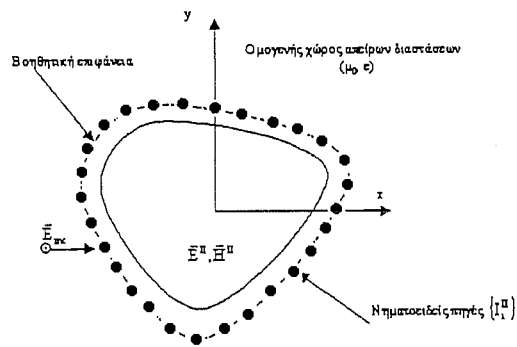
όπου έχουμε υποθέσει χρονική εξάρτηση $e^{j\omega t}$. Τα $\hat{\mathbf{u}}_x$, $\hat{\mathbf{u}}_y$ και $\hat{\mathbf{u}}_z$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις x , y και z , αντίστοιχα. Επειδή το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}^{inc} έχει συνιστώσα μόνο στη διεύθυνση z και είναι χωρικά ανεξάρτητο από το z και εφόσον η διατομή και τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του κυλίνδρου δεν μεταβάλλονται κατά τη διεύθυνση z , το πρόβλημα, που εξετάζουμε, είναι δύο διαστάσεων και μπορεί να επιλυθεί σε ένα επίπεδο σταθερού z . Στόχος είναι ο προσδιορισμός του σκεδαζόμενου από τον κύλινδρο πεδίου, δηλαδή του πεδίου που προκύπτει αν από το συνολικό πεδίο, που υφίσταται στον ελεύθερο χώρο, αφαιρεθεί το προσπίπτον πεδίο, καθώς και ο προσδιορισμός του πεδίου εντός του κυλίνδρου. Έχοντας υπολογίσει τα πεδία αυτά, ο υπολογισμός άλλων παραμέτρων του προβλήματος, όπως το Radar Cross Section και το ρεύμα πόλωσης που επάγεται στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, μπορούν να υπολογιστούν με απλό τρόπο.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 2.10: (α) Γεωμετρία κυλινδρικού διηλεκτρικού σκεδαστή (διδιάστατο πρόβλημα, TM προσπίπτον κύμα).

(β) Ισοδύναμο MAS μοντέλο για την περιγραφή του σκεδαζόμενου πεδίου στην περιοχή I.

(γ) Ισοδύναμο MAS μοντέλο για την περιγραφή του πεδίου στην περιοχή II.

Προχωρώντας στην κατάστρωση της MAS λύσης, δημιουργούμε δύο ισοδύναμες καταστάσεις, σε σχέση με τις πραγματικές των περιοχών I και II. Στην περιοχή I (Σχήμα 2.10(β)), το σκεδαζόμενο από τον κύλινδρο πεδίο περιγράφεται από ένα σύνολο νηματοειδών βοηθητικών πηγών σταθερού ηλεκτρικού ρεύματος, που είναι τοποθετημένες σε μια κλειστή (βοηθητική) επιφάνεια, η οποία περικλείεται στη C. Οι νηματοειδείς αυτές πηγές ακτινοβολούν στον ελεύθερο χώρο, είναι παράλληλες στον z άξονα, εκτείνονται στο άπειρο και έχουν άγνωστα σταθερά πλάτη ηλεκτρικού ρεύματος $\{I_i'\}$ ($i=1,2,3,\dots$). Στο Σχήμα 2.10(β), $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ είναι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που οφείλεται στις νηματοειδείς πηγές και $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$ είναι το πεδίο του προσπίπτοντος κύματος. Το συνολικό πεδίο $(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^{inc})$ στην περιοχή I είναι μια προσέγγιση του πραγματικού πεδίου της περιοχής I. Παρόμοια, στην ισοδύναμη κατάσταση για την περιοχή II, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10(γ), το πεδίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου περιγράφεται από το πεδίο που δημιουργείται από το σύνολο των νηματοειδών βοηθητικών πηγών, που είναι τοποθετημένες σε μια κλειστή βοηθητική επιφάνεια, η οποία περικλείει το φυσικό σύνορο C. Οι νηματοειδείς αυτές πηγές ακτινοβολούν σε ομοιογενή χώρο, του οποίου τα χαρακτηριστικά είναι ίδια με αυτά του κυλίνδρου, είναι παράλληλες στον z άξονα, εκτείνονται στο άπειρο και έχουν άγνωστα σταθερά πλάτη ηλεκτρικού ρεύματος $\{I_i''\}$ ($i=1,2,3,\dots$). Το πεδίο $(\mathbf{E}'' , \mathbf{H}'')$, το οποίο οφείλεται στις πηγές αυτές (Σχήμα 2.10(γ)), είναι προσέγγιση του πραγματικού πεδίου, που δημιουργείται στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Πρέπει να σημειωθεί ότι, τα σημεία τοποθέτησης των βοηθητικών πηγών, τόσο στο εσωτερικό του κυλίνδρου όσο και στο εσωτερικό του, δεν έχουν, ακόμα, προσδιοριστεί. Κατ' αρχήν είναι αυθαίρετα. Το θέμα της επιλογής της θέσης των βοηθητικών πηγών, προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση και ευστάθεια στην αριθμητική λύση, θα συζητηθεί αργότερα, στην παράγραφο 2.7.5.3.

Η σχέση μεταξύ των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων $(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^{inc})$ και $(\mathbf{E}'' , \mathbf{H}'')$ στις δύο ισοδύναμες καταστάσεις, που απεικονίζονται στα Σχήματα 2.10(β) και 2.10 (γ), αντίστοιχα, υπαγορεύεται από την ικανοποίηση της οριακής συνθήκης στην επιφάνεια του κυλίνδρου στο πραγματικό πρόβλημα, που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.10(α). Συγκεκριμένα, οι εφαιπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου πρέπει να είναι συνεχείς στην επιφάνεια C του κυλίνδρου. Η επιβολή της ικανοποίησης των οριακών συνθηκών, οδηγεί στις εξισώσεις

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^s - \mathbf{E}'') = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{inc} \text{ στο όριο } C \quad (2.61)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^s - \mathbf{H}'') = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{inc} \text{ στο όριο } C \quad (2.62)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του κυλίνδρου C και με φορά προς την περιοχή I, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10 (α).

Εάν μπορούσαν να προσδιοριστούν σύνολα από πηγές, τέτοια ώστε οι οριακές συνθήκες (2.61) και (2.62) να ικανοποιούνταν ακριβώς σε όλα τα σημεία της επιφάνειας C , το $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ θα ήταν το πραγματικό σκεδαζόμενο από τον κύλινδρο πεδίο και το $(\mathbf{E}''', \mathbf{H}''')$ θα ήταν το πραγματικό πεδίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Προκειμένου να επιτύχουμε μια προσεγγιστική αριθμητική λύση για το πρόβλημα, θεωρούμε πεπερασμένα σύνολα από πηγές, έστω N' πηγές στην ισοδύναμη κατάσταση για την περιοχή I και N'' πηγές στην ισοδύναμη κατάσταση για την περιοχή II. Τα ακτινοβολούμενα από τις πηγές πεδία αποτελούν μια πεπερασμένη βάση, πάνω στην οποία θα αναπτυχθούν οι προσεγγιστικές λύσεις των πεδίων στις αντίστοιχες περιοχές. Κατά συνέπεια, οι δύο οριακές συνθήκες (2.61) και (2.62) είτε επιβάλλονται αυστηρά σε $N^C = (N' + N'')/2$ επιλεγμένα σημεία επάνω στην επιφάνεια C ή, εναλλακτικά, επιβάλλονται, με την έννοια του ελάχιστου τετραγωνικού σφάλματος, σε $N^C > (N' + N'')/2$ επιλεγμένα σημεία της επιφάνειας C . Το αποτέλεσμα είναι μια εξίσωση πινάκων, η οποία, στη συνέχεια, μπορεί να επιλυθεί ως προς τα άγνωστα πλάτη των βοηθητικών πηγών $\{I_i'\}$ και $\{I_i''\}$.

2.7.5.2 Μαθηματική Διατύπωση και Επίλυση

Στην περιοχή I, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$, το οποίο δημιουργείται στο σημείο παρατήρησης (x, y) και σε ένα επίπεδο σταθερού z , από τις νηματοειδείς πηγές ρεύματος $\{I_i'\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N'$), που ακτινοβολούν στον ελεύθερο χώρο, δίνεται από τις σχέσεις

$$\mathbf{E}^s = \hat{\mathbf{u}}_z \sum_{i=1}^{N'} E_{iz}^s \quad (2.63)$$

$$\mathbf{H}^s = \hat{\mathbf{u}}_x \sum_{i=1}^{N'} H_{ix}^s + \hat{\mathbf{u}}_y \sum_{i=1}^{N'} H_{iy}^s \quad (2.64)$$

Σύμφωνα και με το Παράρτημα της παραγράφου 2.7.7, στη σχέση (2.63)

$$E_{iz}^s = -\frac{k_0 \eta_0 I_i'}{4} H_0^{(2)}(k_0 \rho_i') \quad (2.65)$$

είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο παρατήρησης (x, y) στην περιοχή I, που οφείλεται στη νηματοειδή πηγή ρεύματος I_i' , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_i', y_i') στο εσωτερικό της επιφάνειας C . Επίσης, η_0 και k_0 είναι, αντίστοιχα, η εμπέδηση και ο κυματαριθμός του ελεύθερου χώρου, $H_0^{(2)}(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους και μηδενικής τάξης και

$$\rho_i' = \sqrt{(x - x_i')^2 + (y - y_i')^2} \quad (2.66)$$

είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου πηγής και του σημείου παρατήρησης, το οποίο εξετάζουμε. Στη σχέση (2.64),

$$H_{ix}^s = \frac{k_0 I_i^l (y_i^l - y)}{4j\rho_i^l} H_1^{(2)}(k_0 \rho_i^l) \quad (2.67)$$

και

$$H_{iy}^s = \frac{k_0 I_i^l (x_i^l - x)}{4j\rho_i^l} H_1^{(2)}(k_0 \rho_i^l) \quad (2.68)$$

είναι οι x και y συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου στο σημείο παρατήρησης (x,y) στην περιοχή I. Το μαγνητικό αυτό πεδίο οφείλεται στη νηματοειδή πηγή ρεύματος I_i^l , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_i^l, y_i^l) στο εσωτερικό της επιφάνειας C. Στην περίπτωση αυτή, $H_1^{(2)}(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους και πρώτης τάξης.

Αντίστοιχα, στην περιοχή II, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $(\mathbf{E}^{\prime\prime}, \mathbf{H}^{\prime\prime})$, το οποίο δημιουργείται στο σημείο παρατήρησης (x,y) και σε ένα επίπεδο σταθερού z , από τις νηματοειδείς πηγές ρεύματος $\{I_i^{\prime\prime}\}$ ($i=1,2,3,\dots,N^{\prime\prime}$), που ακτινοβολούν σε μέσο με παραμέτρους μ_0 και ε , δίνεται από τις σχέσεις

$$\mathbf{E}^{\prime\prime} = \hat{\mathbf{u}}_z \sum_{i=1}^{N^{\prime\prime}} E_{iz}^{\prime\prime} \quad (2.69)$$

και

$$\mathbf{H}^{\prime\prime} = \hat{\mathbf{u}}_x \sum_{i=1}^{N^{\prime\prime}} H_{ix}^{\prime\prime} + \hat{\mathbf{u}}_y \sum_{i=1}^{N^{\prime\prime}} H_{iy}^{\prime\prime} \quad (2.70)$$

Σύμφωνα και με το Παράρτημα της παραγράφου 2.7.7, στη σχέση (2.69)

$$E_{iz}^{\prime\prime} = -\frac{k\eta I_i^{\prime\prime}}{4} H_0^{(2)}(k\rho_i^{\prime\prime}) \quad (2.71)$$

είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο παρατήρησης (x,y) στην περιοχή II, που οφείλεται στη νηματοειδή πηγή ρεύματος $I_i^{\prime\prime}$, η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο $(x_i^{\prime\prime}, y_i^{\prime\prime})$ στο εξωτερικό της επιφάνειας C. Επίσης, η και k είναι, αντίστοιχα, η εμπέδηση και ο κυματαριθμός του μέσου της περιοχής II και

$$\rho_i'' = \sqrt{(x - x_i'')^2 + (y - y_i'')^2} \quad (2.72)$$

είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου πηγής και του σημείου παρατήρησης, το οποίο εξετάζουμε. Στη σχέση (2.70),

$$H_{ix}'' = \frac{kI_i'' (y_i'' - y)}{4j\rho_i''} H_1^{(2)}(k\rho_i'') \quad (2.73)$$

και

$$H_{iy}'' = \frac{kI_i'' (x_i'' - x)}{4j\rho_i''} H_1^{(2)}(k\rho_i'') \quad (2.74)$$

είναι οι x και y συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου στο σημείο παρατήρησης (x,y) στην περιοχή II. Το μαγνητικό αυτό πεδίο οφείλεται στη νηματοειδή πηγή ρεύματος I_i'' , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_i'', y_i'') στο εξωτερικό της επιφάνειας C.

Ακολουθώντας τη διαδικασία επίλυσης, όπως αυτή περιγράφηκε στην παράγραφο 2.7.5.1, καταλήγουμε, από τις οριακές συνθήκες (2.61) και (2.62), σε μια εξίσωση πινάκων, της μορφής

$$[Z][I] = [V] \quad (2.75)$$

όπου

$$[Z] = \begin{bmatrix} [Z_e''] & [Z_e''] \\ [Z_h'] & [Z_h''] \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} [I'] \\ [I''] \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_e \\ V_h \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Στην παραπάνω εξίσωση (2.75), έχουμε «δανειστεί» ορολογία/συμβολισμούς από τη θεωρία κυκλωμάτων. Ο $[Z]$ είναι ένας πίνακας με $2N^C$ γραμμές και $(N^I + N^H)$ στήλες και καλείται γενικευμένη μήτρα εμπεδήσεων, το $[I]$ είναι ένα διάνυσμα-στήλη με $(N^I + N^H)$ στοιχεία, το οποίο καλείται γενικευμένο διάνυσμα των αγνώστων ρευμάτων και, $[V]$ είναι ένα διάνυσμα-στήλη με $2N^C$ στοιχεία, το οποίο καλείται γενικευμένο διάνυσμα των πηγών τάσης. Στη σχέση (2.76), $[Z_e']$

είναι ένας πίνακας με N^C γραμμές και N^I στήλες, του οποίου το στοιχείο (l,i) είναι η ένταση E_{iz}^S του ηλεκτρικού πεδίου, που οφείλεται στην επίδραση της νηματοειδούς πηγής μοναδιαίου πλάτους I_i^I , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_l, y_l) πάνω στην επιφάνεια C . Όμοια, $[Z_e^{II}]$ είναι ένας πίνακας με N^C γραμμές και N^{II} στήλες, του οποίου το στοιχείο (l,i) είναι η αντίθετη τιμή της έντασης E_{iz}^{II} του ηλεκτρικού πεδίου, που οφείλεται στην επίδραση της νηματοειδούς πηγής μοναδιαίου πλάτους I_i^{II} , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_l, y_l) πάνω στην επιφάνεια C . Ο $[Z_h^I]$ είναι ένας πίνακας με N^C γραμμές και N^I στήλες, του οποίου το στοιχείο (l,i) είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της έντασης του μαγνητικού πεδίου, που οφείλεται στην επίδραση της νηματοειδούς πηγής μοναδιαίου πλάτους I_i^I , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_l, y_l) πάνω στην επιφάνεια C . Όμοια, $[Z_h^{II}]$ είναι ένας πίνακας με N^C γραμμές και N^{II} στήλες, του οποίου το στοιχείο (l,i) είναι η αντίθετη τιμή της εφαπτομενικής συνιστώσας της έντασης του μαγνητικού πεδίου, που οφείλεται στην επίδραση της νηματοειδούς πηγής μοναδιαίου πλάτους I_i^{II} , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_l, y_l) πάνω στην επιφάνεια C . Στη σχέση (2.77), $[I^I]$ είναι ένα διάνυσμα-στήλη με N^I στοιχεία, του οποίου το i -στό στοιχείο είναι η τιμή I_i^I . Όμοια, $[I^{II}]$ είναι ένα διάνυσμα-στήλη με N^{II} στοιχεία, του οποίου το i -στό στοιχείο είναι η τιμή I_i^{II} . Τέλος, στη σχέση (2.78), $[V_e]$ και $[V_h]$ είναι διανύσματα στήλες με N^C στοιχεία, των οποίων τα l -στά στοιχεία είναι το αντίθετο της τιμής της E_z^{inc} και το αντίθετο της εφαπτομενικής συνιστώσας της έντασης του μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, στο σημείο παρατήρησης (x_l, y_l) πάνω στη C .

Έχοντας καταστρώσει την εξίσωση πινάκων (2.75), οι άγνωστοι συντελεστές των νηματοειδών βοηθητικών πηγών μπορούν να προσδιοριστούν, είτε αντιστρέφοντας τον πίνακα $[Z]$, στην περίπτωση που αυτός είναι τετραγωνικός (τα σημεία εφαρμογής της οριακής συνθήκης είναι $N^C = (N^I + N^{II})/2$, οπότε,

$$[I] = [Z]^{-1} [V] \quad (2.79)$$

είτε, στην περίπτωση που $N^C > (N^I + N^{II})/2$, από τη σχέση

$$[I] = ([\tilde{Z}] * [Z])^{-1} [Z] [V] \quad (2.80)$$

όπου $[\tilde{Z}]$ είναι ο ανάστροφος του $[Z]$, $[Z^{-1}]$ είναι ο αντίστροφος του $[Z]$ και $*$ συμβολίζει το συζυγή μιγαδικό.

2.7.5.3 Έλεγχος της Ακρίβειας και της Ευστάθειας

Όπως έχει προαναφερθεί, αν προσδιοριστούν πεδία, τα οποία δημιουργούνται από τις ακτινοβολούσες σε χώρο χωρίς σκεδαστές βοηθητικές πηγές στις αντίστοιχες περιοχές και τα πεδία αυτά ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell και τις οριακές συνθήκες (2.61) και (2.62), τότε τα πεδία αυτά είναι τα πραγματικά πεδία στις δύο περιοχές. Στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης με τη Μέθοδο των Βοηθητικών Πηγών, όμως, οι οριακές συνθήκες ελέγχονται σε πεπερασμένο αριθμό σημείων πάνω στην επιφάνεια C , οπότε η προκύπτουσα αριθμητική λύση αποτελεί προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Προκειμένου, επομένως, να ποσοτικοποιηθεί η ακρίβεια της αριθμητικής λύσης, ελέγχουμε το κατά πόσον οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται σε διάφορα σημεία της επιφάνειας του διηλεκτρικού σκεδαστή, ορίζοντας τα αντίστοιχα σφάλματα για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, σαν

$$\Delta E_{bc} = \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^S + \mathbf{E}^{inc} - \mathbf{E}^{II})|_C}{|\mathbf{E}^{inc}|_{\max}} \quad (2.81)$$

και

$$\Delta H_{bc} = \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^S + \mathbf{H}^{inc} - \mathbf{H}^{II})|_C}{|\mathbf{H}^{inc}|_{\max}} \quad (2.82)$$

Προφανώς, οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται ακριβώς, μόνο στα N^C σημεία επάνω στην επιφάνεια C . Σε ενδιάμεσα σημεία πάνω στην επιφάνεια C , παρατηρούμε αποκλίσεις. Όσο «καλύτερα» ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στα ενδιάμεσα σημεία, τόσο πιο ακριβής μπορεί να χαρακτηριστεί η αριθμητική λύση.

Για να έχουμε ευσταθή λύση, δηλαδή η μέθοδος να συγκλίνει, θα πρέπει όταν αυξάνουμε τον αριθμό των βοηθητικών πηγών, το μέγιστο σφάλμα της οριακής συνθήκης στα ενδιάμεσα σημεία της επιφάνειας C συνεχώς να μικραίνει. Όπως ήδη αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.7.4, η τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών είναι ένας σημαντικός παράγοντας καθορισμού του ρυθμού σύγκλισης της μεθόδου. Από αριθμητικά αποτελέσματα για το συγκεκριμένο παράδειγμα του διηλεκτρικού σκεδαστή [73] αποδεικνύεται ότι, η αριθμητική λύση συγκλίνει πολύ γρήγορα στην περίπτωση που, οι πηγές είναι τοποθετημένες σε επιφάνειες σύμμορφες με τη φυσική επιφάνεια C και η απόστασή τους από αυτή κυμαίνεται σε ένα συγκεκριμένο εύρος. Αντιθέτως, ο ρυθμός σύγκλισης μειώνεται σημαντικά, αν οι πηγές είναι τοποθετημένες πολύ μακριά από την επιφάνεια C του κυλίνδρου, δηλαδή βρίσκονται πολύ κοντά στο κέντρο του, ή είναι τοποθετημένες πολύ κοντά στην επιφάνεια C .

Πρέπει να τονιστεί ότι δεν έχει βρεθεί ακόμη κανόνας, που να προσδιορίζει τη βέλτιστη τοποθέτηση και το βέλτιστο αριθμό των βοηθητικών πηγών. Παρόλα αυτά, είναι φανερό ότι, για να επιτύχουμε το ίδιο επίπεδο ακρίβειας, θα

απαιτούνται όλο και περισσότερες βοηθητικές πηγές, όσο αυξάνουν οι ηλεκτρικές διαστάσεις και η διηλεκτρική σταθερά του κυλίνδρου.

2.7.6 Περιγραφή της Τροποποιημένης Μεθόδου των Βοηθητικών Πηγών

Όπως αναφέρθηκε ήδη, στην κλασική MAS για 3D προβλήματα, μια συνήθης επιλογή AS είναι ζεύγη ηλεκτρικών στοιχειωδών διπόλων, των οποίων τα πεδία παρουσιάζουν σημαντική αναλυτική απλότητα. Όταν η κλασική MAS εφαρμόζεται σε «λεπτές» (πεπλατυσμένες) διατάξεις και ανοικτά χωρία, η απόσταση μεταξύ της πραγματικής επιφάνειας S και της βοηθητικής επιφάνειας S' είναι, αναπόφευκτα, πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος κύματος. Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που δημιουργούνται από τα «βοηθητικά» δίπολα, όταν αυτά υπολογίζονται πάνω σε κάθε CP, είναι της τάξης R^{-3} , R^{-2} και R^{-1} , όπου ως R δηλώνεται η απόσταση μεταξύ ενός «βοηθητικού» σημείου και ενός CP. Τότε, ο κυρίαρχος όρος στην πεδιακή κατανομή είναι της τάξης R^{-3} και R^{-2} , γεγονός που εισάγει σημαντικές αριθμητικές αστάθειες στην κλασική MAS λύση.

Αυτό το πρόβλημα αστάθειας μπορεί να αντιμετωπιστεί, αν η MAS λύση καταστρωθεί με αγνώστους, όχι τις διπολικές ροπές, αλλά τις πυκνότητες ρεύματος και φορτίου πάνω στις βοηθητικές επιφάνειες [69]. Θεωρώντας $+j\omega t$ αρμονική χρονική εξάρτηση, το εφαπτομενικό στην S ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_{tan} μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του διανυσματικού δυναμικού \mathbf{A}_{tan} και του βαθμωτού δυναμικού ϕ , όπως

$$\mathbf{E}_{tan} = -j\omega\mathbf{A}_{tan} - (\nabla\phi)_{tan} \quad (2.83)$$

όπου τα \mathbf{A}_{tan} και ϕ δημιουργούνται από κατανομές ρεύματος \mathbf{J} και φορτίου ρ , αντίστοιχα, πάνω στην S' , όπως

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{J}e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}R}}{R} dS' \quad (2.84)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{S'} \frac{\rho e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}R}}{R} dS' \quad (2.85)$$

με ϵ διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μ τη μαγνητική διαπερατότητα του ομογενούς μέσου μέσα στο οποίο ακτινοβολούν οι AS και τα \mathbf{J} και ρ συνδέονται μεταξύ τους με το νόμο συνέχισης ρεύματος.

$$-j\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.86)$$

Για να περιοριστούν οι αριθμητικές αστάθειες της κλασικής MAS λύσης, αλλά συγχρόνως να διατηρηθεί η εννοιολογική απλότητα της MAS, διακριτοποιούνται οι \mathbf{J} και ρ κατανομές πάνω στην S' . Μια πιθανή υλοποίηση αυτής της διακριτοποίησης παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.11. Έτσι, τα

επιφανειακά ολοκληρώματα στις σχέσεις (2.84) και (2.85) αντικαθίστανται από πεπερασμένα αθροίσματα και ο νόμος συνέχισης ρεύματος (2.87) επίσης διακριτοποιείται, όπως

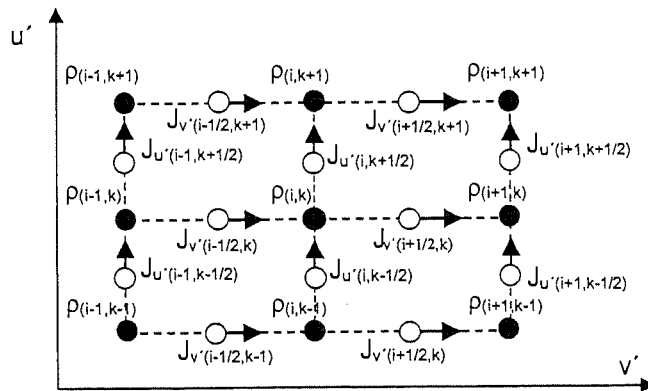
$$-j\omega\rho_{(i,k)} = \frac{J_{v'(i+1/2,k)} - J_{v'(i-1/2,k)}}{\Delta v'} + \frac{J_{u'(i,k+1/2)} - J_{u'(i,k-1/2)}}{\Delta u'} \quad (2.87)$$

Επομένως, οι μόνες ανεξάρτητες άγνωστες μεταβλητές είναι οι J_v και J_u εφαπτομενικές στην S' ρευματικές συνιστώσες. Ένα ομοιογενές πλέγμα, όμοιο με αυτό που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.11, δημιουργείται και στη φυσική επιφάνεια S και η κλίση του βαθμωτού δυναμικού ϕ διακριτοποιείται με αντίστοιχο τρόπο. Συγκεκριμένα, αν οι δείκτες (p,q) αποδοθούν σε ένα σημείο στην S (το οποίο αντιστοιχεί στο «βοηθητικό» σημείο (i,k) πάνω στην S'), τότε οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην S δίνονται από τις σχέσεις

$$E_{v(p-1/2,q)} = -j\omega A_{v(p-1/2,q)} - \frac{\phi_{(p-1,q)} - \phi_{(p,q)}}{\Delta u} \quad (2.88)$$

$$E_{u(p,q+1/2)} = -j\omega A_{u(p,q+1/2)} - \frac{\phi_{(p,q+1)} - \phi_{(p,q)}}{\Delta u} \quad (2.89)$$

Άρα, σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάστηκε, εφόσον ο τελεστής ∇ δεν περιλαμβάνεται στις ολοκληρωτές συναρτήσεις, οι «προβληματικοί» όροι στις προς υπολογισμό ποσότητες περιορίζονται σε τάξεις R^{-1} , γεγονός που μειώνει σημαντικά τις αριθμητικές αστάθειες.

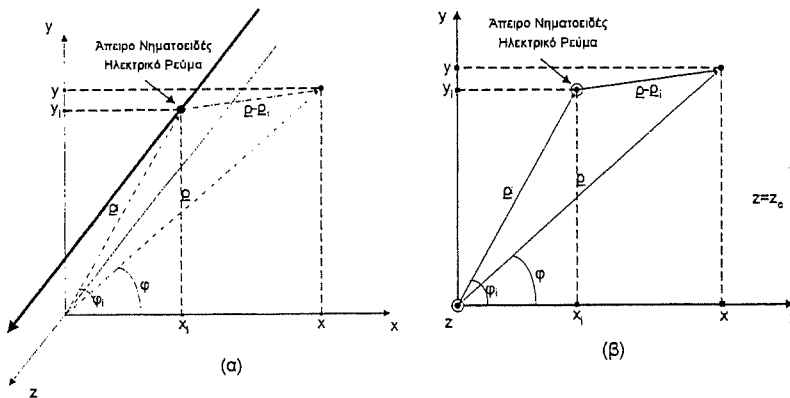


Σχήμα 2.11: Τρισδιάστατη MMAS υλοποίηση: ομοιογενές πλέγμα και άγνωστα μεγέθη στη βοηθητική επιφάνεια S' .

Η MMAS διατύπωση που μόλις εκτέθηκε αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση στην όλη ιδέα, η οποία έχει ήδη αρχίσει να χρησιμοποιείται στην ανάλυση σύμμορφων μικροταινιακών στοιχειοκεραίων [70-72]. Είναι προφανές ότι, η μέθοδος επιδέχεται σοβαρή περαιτέρω μελέτη, κυρίως όσον αφορά στον τρόπο υλοποίησης της διακριτοποίησης των J και ρ πάνω στην S' . Χρήσιμες ιδέες σε αυτή την κατεύθυνση (και απαραίτητες για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων) αποτελούν η χρήση ανομοιόμορφου πλέγματος (π.χ. για την εξέταση ακμών ή την προσομοίωση της τροφοδοσίας κεραίων) και η υλοποίηση άλλου τύπου διακριτοποίησης (π.χ. παλμικών συναρτήσεων βάσης⁵ [72] αντί δέλτα συναρτήσεων βάσης⁶).

2.7.7 Παράρτημα: Ακτινοβολία Σταθερού Νηματοειδούς Ηλεκτρικού Ρεύματος Απείρου Μήκους

Τα σταθερά νηματοειδή ηλεκτρικά ρεύματα απείρου μήκους μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ως ένας τύπος βοηθητικών πηγών, κατά την υλοποίηση της MAS σε διδιάστατα προβλήματα. Για το λόγο αυτό, είναι χρήσιμο να υπολογιστούν αναλυτικά τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, που ακτινοβολούνται από τέτοιες γραμμικές πηγές σε ένα ομογενές μέσο απείρων διαστάσεων.



Σχήμα 2.12: Νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα απείρου μήκους.

Η γεωμετρία του νηματοειδούς σταθερού ηλεκτρικού ρεύματος απείρου μήκους φαίνεται στο Σχήμα 2.12(α), όπου υποθέτουμε ότι ακτινοβολεί σε άπειρο και ομογενές μέσο. Το μήκος του εκτείνεται άπειρα κατά μήκος του z -άξονα ενός καρτεσιανού xyz συστήματος συντεταγμένων (με αντίστοιχο κυλινδρικό σύστημα $\rho\phi z$) και η θέση της στο xy -επίπεδο ορίζεται από το διάνυσμα θέσης

$$\rho_i = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} \quad (2.90)$$

⁵ Εδώ χρησιμοποιείται ορολογία MoM.

⁶ Η ιδέα αυτή εφαρμόστηκε πρόσφατα και στην κλασική MAS [94].

Επομένως, η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{J}_i(x, y) = J_{iz}(x, y)\hat{\mathbf{z}} = I_i\delta(x - x_i)\delta(y - y_i)\hat{\mathbf{z}} \quad (A/m^2) \quad (2.91)$$

όπου $\delta(x)$ είναι η συνάρτηση δέλτα. Σκοπός μας είναι να καθορίσουμε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο παρατήρησης

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (2.92)$$

Επειδή η πηγή είναι ομοιόμορφη κατά μήκος της z διεύθυνσης και ανεξάρτητη του z , το πρόβλημα είναι διδιάστατο και μπορεί να αναλυθεί σε οποιοδήποτε $z=z_c$ σταθερό επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.12(b). Το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό \mathbf{A}_i έχει, επίσης, μοναδική συνιστώσα στη z διεύθυνση και, για $e^{+j\omega t}$ χρονική εξάρτηση, δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}_i(x, y) = A_{iz}(x, y)\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{J}_i(x, y) \frac{e^{-jkR}}{R} dr' \quad (Wb/m) \quad (2.93)$$

όπου τα όρια της ολοκλήρωσης εκτείνονται σε όλο το άπειρο ομογενές μέσο, k και μ είναι ο κυματαριθμός και η μαγνητική διαπερατότητα αντίστοιχα, και

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z_c - z')^2} \quad (2.94)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.91) και (2.94) στην (2.93) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα, βρίσκουμε ότι

$$A_{iz}(x, y) = \frac{\mu}{4\pi} I_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z_c-z')^2}}}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z_c-z')^2}} dz' \quad (Wb/m) \quad (2.95)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί, με χρήση της σχέσης

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{-ja\sqrt{t^2+u^2}}}{\sqrt{t^2+u^2}} = -j\pi H_0^{(2)}(at), \quad (2.96)$$

όπου

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - jY_0(x) \quad (2.97)$$

είναι η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους μηδενικής τάξης και $J_0(x)$ και $Y_0(x)$ είναι οι συναρτήσεις Bessel και Neumann, αντίστοιχα, μηδενικής τάξης. Επομένως, προκύπτει ότι

$$\mathbf{A}_i(x, y) = A_{iz}(x, y)\hat{\mathbf{z}} = -j\frac{\mu}{4}I_i H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i|)\hat{\mathbf{z}} \quad (Wb/m) \quad (2.98)$$

με

$$|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (2.99)$$

Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί από το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A}_i και το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό V_i , σαν

$$\mathbf{E}_i = -j\omega\mathbf{A}_i - \nabla V_i \quad (V/m) \quad (2.100)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη του Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_i + j\omega\epsilon\mu V_i = 0 \quad (2.101)$$

όπου ϵ είναι η διηλεκτρική σταθερά του άπειρου ομογενούς μέσου, η (2.100) δίνει

$$\mathbf{E}_i = -j\omega\mathbf{A}_i - j\frac{1}{\omega\epsilon\mu}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_i) \quad (V/m) \quad (2.102)$$

Αφού το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό \mathbf{A}_i έχει μόνο z -συνιστώσα και είναι ανεξάρτητο του z , έχει μηδενική απόκλιση και η (2.102), λόγω της (2.98), γίνεται

$$\mathbf{E}_i = -j\omega\mathbf{A}_i = E_{iz}\hat{\mathbf{z}} = -j\frac{\omega\mu}{4}I_i H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i|)\hat{\mathbf{z}} = -\frac{k\eta}{4}I_i H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i|)\hat{\mathbf{z}} \quad (V/m) \quad (2.103)$$

όπου $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Όμοια, το μαγνητικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{A}_i) = H_{iz}\hat{\mathbf{x}} + H_{iy}\hat{\mathbf{y}} = -\frac{-jk}{4|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i|} I_i H_1^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i|)(y_i - y)\hat{\mathbf{x}} + (x_i - x)\hat{\mathbf{y}} \quad (A/m) \quad (2.104)$$

όπου, για τον υπολογισμό των παραγώγων, χρησιμοποιήθηκε η σχέση

$$\frac{d}{dx}[H_0^{(2)}(x)] = -H_1^{(2)}(x) \quad (2.105)$$

και $H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - jY_1(x)$ είναι η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους και πρώτης τάξης.

Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (2.103) και (2.104), οι συνιστώσες των πεδίων είναι ανάλογες με μια συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους, της οποίας το όρισμα είναι ανάλογο της απόστασης $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i|$ από την πηγή μέχρι το σημείο παρατήρησης (βλέπε Σχήμα 2.12). Επιπλέον, από την εξίσωση (2.104) φαίνεται ότι, οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το νηματοειδές ρεύμα. Αυτό γίνεται ακόμα πιο εμφανές από την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{H}_i = -j\frac{k}{4} I_i H_1^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i|) \{\hat{\mathbf{z}} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i)\} \quad (A/m) \quad (2.106)$$

Λόγω της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των συναρτήσεων Hankel

$$H_0^{(2)}(x) \sim 1 - j\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma}{2}x\right),$$

και

$$H_1^{(2)}(x) \sim \frac{x}{2} + j\frac{2}{\pi x}, \text{ για } x \rightarrow 0 \quad (2.107)$$

όπου $\gamma=1.781$ είναι η σταθερά του Euler, είναι φανερό ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που ακτινοβολείται από το απείρου μήκους νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα, παρουσιάζει ιδιομορφία (απειρίζεται) στο σημείο της πηγής (δηλαδή για $\boldsymbol{\rho} \rightarrow \boldsymbol{\rho}_i$). Επιπλέον, εάν χρησιμοποιηθούν οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Hankel για μεγάλα όριασμα

$$H_0^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j(x - \frac{\pi}{4})}$$

και

$$H_1^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j(x - \frac{3\pi}{4})}, \text{ για } x \rightarrow \infty \quad (2.108)$$

οι εξισώσεις (2.103) και (2.106) δίνουν

$$\mathbf{E}_i \sim \eta I_i \sqrt{\frac{jk}{8\pi}} \frac{e^{-jk|\rho-\rho_i|}}{\sqrt{|\rho-\rho_i|}} \{\hat{\mathbf{z}} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i)\} \quad (V/m) \quad (2.109)$$

και

$$\mathbf{H}_i \sim I_i \sqrt{\frac{jk}{8\pi}} \frac{e^{-jk|\rho-\rho_i|}}{\sqrt{|\rho-\rho_i|}} \{\hat{\mathbf{z}} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i)\} \quad (A/m) \quad (2.110)$$

αντίστοιχα. Οι σχέσεις (2.109) και (2.110), σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή, αναπαριστούν ένα κυλινδρικό κύμα, το οποίο οδεύει προς τα έξω και δεν εξαρτάται από την αξιμουθιακή ως προς το κέντρο της πηγής γωνία. Είναι ένα εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα ως προς την ακτινική διεύθυνση από την πηγή, με κυματική εμπέδηση

$$Z^p = \frac{\mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}}{-\mathbf{H}_i \cdot \{\hat{\mathbf{z}} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i)\}} = \eta \quad (\Omega) \quad (2.110)$$

Βιβλιογραφία για τις συναρτήσεις Bessel υπάρχει στα βιβλία [97] και [98].

2.8 Υπολογιστικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Ένας από τους πιο διαδεδομένους μαθηματικούς τρόπους περιγραφής ενός φαινομένου ή συστήματος είναι μέσω διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή εξισώσεων, που εμπλέκουν παραγώγους των διαφόρων αγνώστων φυσικών μεγεθών. Αυτό είναι άμεση απόρροια του γεγονότος πως, οι περισσότεροι φυσικοί νόμοι (συμπεριλαμβανομένων και των νόμων του ηλεκτρομαγνητισμού) έχουν τη μορφή σχέσεων μεταξύ των ρυθμών μεταβολής των ποσοτήτων που αφορούν.

Τέτοιου τύπου είναι η εξίσωση του Laplace, στην οποία αναφερθήκαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Όπως είδαμε εκεί, στην εξίσωση εκείνη εμφανίζονται δευτέρας τάξεως μερικές παράγωγοι των χωρικών συντεταγμένων. Ο συνδυασμός μιας διαφορικής εξίσωσης, όπως η Laplace, με τις οριακές συνθήκες (Dirichlet, Neumann, ή μικτές), που πρέπει να ικανοποιούνται στα σύνορα του συστήματος, που αναλύουμε, καλείται πρόβλημα συνοριακών τιμών (boundary value problem).

Η επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών, που αναφέρονται σε συστήματα μετάδοσης πληροφορίας, μπορεί να γίνει αναλυτικά μόνο για ένα περιορισμένο αριθμό περιπτώσεων, που χαρακτηρίζονται από απλότητα, συμμετρία και ομοιογένεια. Στην πλειονηφία των περιπτώσεων, είμαστε υποχρεωμένοι να καταφύγουμε σε αριθμητικές τεχνικές για να βρούμε λύσεις σε προβλήματα συνοριακών τιμών. Έχουμε ήδη αναφερθεί σε τέτοιες τεχνικές (τη μέθοδο των ροπών, και τη MAS) σε προηγούμενες παραγράφους. Οι τεχνικές εκείνες στηρίζονταν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Στις υπόλοιπες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου, θα στραφούμε σε αριθμητικές τεχνικές επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών, που βασίζονται σε διαφορικές εκφράσεις.

Αρχικά, θα κάνουμε εκτενή αναφορά στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στο πεδίο της συχνότητας (frequency domain). Θα περιγράψουμε τη μέθοδο στην πλέον γενική της, για τον ηλεκτρομαγνητισμό, μορφή. Αυτό σημαίνει πως θα δείξουμε τον τρόπο χειρισμού διανυσματικών πεδίων, σε ανοικτές (unbounded) τρισδιάστατες γεωμετρίες και υψηλές συχνότητες. Σχεδόν όλα τα προβλήματα μοντελοποίησης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας μπορούν να αναχθούν (ή να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις) των προβλημάτων συνοριακών τιμών, που θα αναλύσουμε.

Για λόγους πληρότητας, αλλά και σύγκρισης, θα δώσουμε δύο εναλλακτικές καταστρώσεις της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η πρώτη είναι μεταβολική και χρησιμοποιεί διανυσματικές συναρτήσεις βάσης (τα λεγόμενα ακμικά στοιχεία, edge elements) για τη διακριτοποίηση του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου του προς επίλυση προβλήματος. Η δεύτερη κατάστρωση είναι προβολική και στηρίζεται σε βαθμωτές συναρτήσεις βάσης (κομβικά στοιχεία, node elements) για την αναπαράσταση του ολικού μαγνητικού πεδίου του αναλυόμενου συστήματος.

Κλείνοντας το δεύτερο κεφάλαιο, θα παραθέσουμε μια σύντομη παρουσίαση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (Finite Difference Time Domain, FDTD). Εκεί θα δούμε τόσο τις βασικές αρχές της μεθόδου, όσο και τρόπους, με τους οποίους μπορούμε να τις εφαρμόσουμε στην πράξη.

2.8.1 Πεπερασμένα Στοιχεία με Διανυσματικές Συναρτήσεις Βάσης για Προβλήματα Σκέδασης

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων σαν τεχνική επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων περιγράφηκε για πρώτη φορά από τον Courant [100]. Η εισαγωγή της μεθόδου στην περιοχή του ηλεκτρομαγνητισμού έγινε από τον Silvester [101], που την εφάρμοσε στην ανάλυση ομογενών κυματοδηγών.

Την ίδια κιόλας χρονιά (1969), οι Ahmed και Daly [102] επέκτειναν τη χρήση των πεπερασμένων στοιχείων και στους ανομοιογενείς κυματοδηγούς. Στο πεδίο αυτό δραστηριοποιήθηκαν πολλοί διακεκριμένοι ερευνητές, όπως οι Csendes [103], Hano [104] και Koshiba [105], ενώ αξιοσημείωτη είναι και η συνεισφορά του Konrad [124]}, που πρώτος έδωσε μια διανυσματική μεταβολική κατάστρωση για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε ανισοτροπικά μέσα. Εκτός από

τους μικροκυματικούς κυματοδηγούς, τα πεπερασμένα στοιχεία βρήκαν γρήγορα εφαρμογή και στην μοντελοποίηση των οπτικών ινών από τους Ikeuchi [106], Mabaya [107] και Yeh [108], αλλά και στην ανάλυση γραμμών μεταφοράς από τους Daly [109] και Khebir [110]. Το πεδίο της ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας είναι ένας άλλος χώρος, όπου τα πεπερασμένα στοιχεία έδωσαν λύση σε πολλά προβλήματα, όπως αυτό του crosstalk σε πλακέτες τυπωμένων κυκλωμάτων (Khan 1989 [111]). Επίσης, τα πεπερασμένα στοιχεία αποδείχτηκαν ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση ημιαγωγικών διατάξεων, όπως πρώτοι έδειξαν οι Barnes και Lomax [112] (1977), και ο Adachi [113] (1979). Τέλος, ενδεικτικό των μεγάλων δυνατοτήτων της μεθόδου είναι το γεγονός πως, εφαρμόστηκε με επιτυχία σε ιδιαίτερα δύσκολα προβλήματα, όπως αυτό της σκέδασης (Volakis και Chatterjee [122]), αλλά και της έκθεσης του ανθρωπίνου οργανισμού σε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (Paulsen [114], Lynch [115]).

Η εφαρμογή της μεθόδου συνίσταται στην υποδιαίρεση της γεωμετρικής περιοχής του προβλήματος σε ένα σύνολο μη αλληλοεπικαλυπτόμενων περιοχών απλού σχήματος, που καλούνται στοιχεία. Στο εσωτερικό των στοιχείων αυτών, το πεδίο εκφράζεται συναρτήσει των τιμών του σε καθορισμένες θέσεις, με τη βοήθεια καταλλήλων παρεμβολικών συναρτήσεων βάσης.

Η μέθοδος προσφέρει μεγάλη ελευθερία στην επιλογή του σχήματος και του μεγέθους των στοιχείων, που χρησιμοποιεί. Μάλιστα, στοιχεία του ίδιου πλέγματος είναι δυνατό να διαφέρουν στο μέγεθος, ακόμα και κατά μία τάξη μεγέθους. Κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο κατά την επίλυση προβλημάτων ανομοιογενών ως προς την ηλεκτρική επιτρεπτότητα, όπως είναι για παράδειγμα τα προβλήματα υπερθερμίας, στα οποία απαιτείται ιδιαίτερα υψηλή ανάλυση στο εσωτερικό του ανθρωπίνου σώματος, αλλά πολύ χαμηλότερη στο γύρω χώρο. Επίσης, τα πεπερασμένα στοιχεία είναι αρκετά εύπλαστα και μπορούν εύκολα να προσαρμόζονται στις διαχωριστικές επιφάνειες δύσκολων γεωμετριών, όπως είναι, για παράδειγμα, αυτές των ανθρωπίνων οργάνων. Στα θέματα αυτά γεωμετρικής μοντελοποίησης, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων υπερτερεί ξεκάθαρα έναντι της ανταγωνιστικής τεχνικής των πεπερασμένων διαφορών.

Ένα άλλο μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, ιδίως σε σύγκριση με τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων, είναι η μεγάλη υπολογιστική αποδοτικότητα της. Αυτή οφείλεται στην υψηλή αραιότητα που χαρακτηρίζει τους πίνακες των γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου. Η αποθήκευση μόνο των μη μηδενικών στοιχείων των πινάκων αυτών και η χρήση επαναληπτικών τεχνικών επίλυσης συστημάτων που εμπλέκουν σε πράξεις αποκλειστικά τα στοιχεία αυτά, έχει σαν αποτέλεσμα πολύ μεγάλα κέρδη σε μνήμη και υπολογιστικό χρόνο.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει όμως και κάποια μειονεκτήματα. Το σημαντικότερο είναι ίσως η μεγάλη δυσκολία ανάπτυξης πηγαίου κώδικα που την υλοποιεί, καθώς στηρίζεται σε αρκετά σύνθετες διαδικασίες. Επίσης, απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή όταν την εφαρμόζουμε για προβλήματα σκέδασης και ακτινοβολίας, και ενδέχεται σε ορισμένες περιπτώσεις να εμφανίσει μη φυσικές λύσεις, αν δεν λάβουμε ειδική πρόνοια για

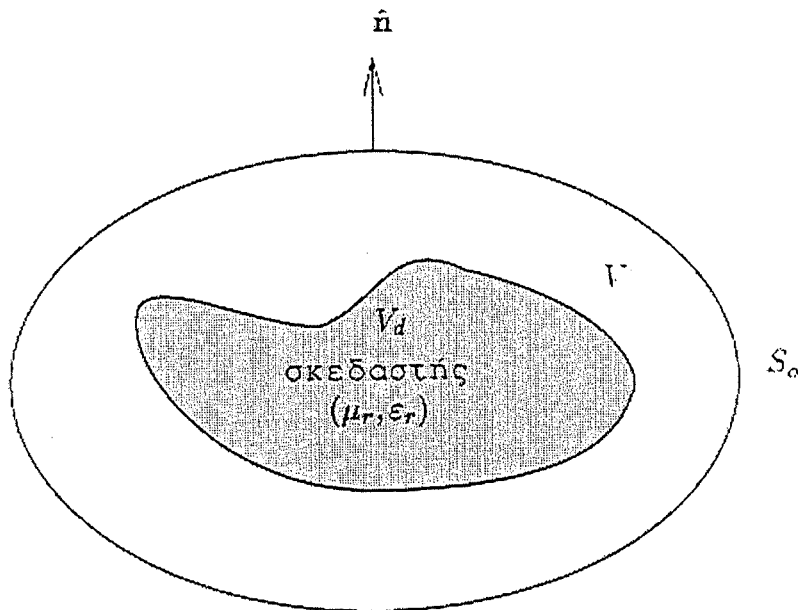
αυτές. Όλα βέβαια τα προαναφερθέντα προβλήματα είναι αντιμετωπίσιμα, αλλά η αντιμετάπιση τους αυξάνει, όπως είναι φυσικό, τη δυσκολία υλοποίησης της μεθόδου.

2.8.1.1 Το Μεταβολικό Συναρτησιακό

Στο Σχήμα 2.13 απεικονίζουμε ένα διηλεκτρικό σκεδαστή. Τερματίζουμε τεχνητά τον ελεύθερο χώρο, γύρω από αυτόν, χρησιμοποιώντας τη φανταστική επιφάνεια S_0 . Το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , μέσα και γύρω από το σκεδαστή, ικανοποιεί τη διανυσματική κυματική εξίσωση

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{J} - \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \mathbf{M} \right) \quad (2.111)$$

όπου ϵ_r , μ_r είναι η σχετική διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μαγνητική διαπερατότητα του υλικού του σκεδαστή και k_0 ο κυματαριθμός του ελεύθερου χώρου. Με \mathbf{J} και \mathbf{M} συμβολίζουμε τις ηλεκτρικές και μαγνητικές πηγές, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.13: Διηλεκτρικός σκεδαστής περικλειόμενος από τεχνητή επιφάνεια S_0 .

Αντί να λύσουμε κατευθείαν την κυματική εξίσωση, είναι προτιμότερο, για λόγους αριθμητικής ευστάθειας και ακρίβειας, να πάρουμε την ασθενή μορφή της (weak form). Αυτό το επιτυγχάνουμε, πολλαπλασιάζοντας πρώτα την (2.111) με μία κατάλληλη συνάρτηση βάρους και στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας το γινόμενο, που προκύπτει. Μία εναλλακτική, αλλά ισοδύναμη, προσέγγιση είναι

να χρησιμοποιήσουμε μία μεταβολική αρχή (variational principle), που είναι γνωστή για το πρόβλημά μας. Τόσο η Galerkin μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων, όσο και η χρήση της μεταβολικής αρχής καταλήγουν στο ίδιο ακριβώς αλγεβρικό σύστημα για την περίπτωση της διανυσματικής εξίσωσης που εξετάζουμε. Εκμεταλευόμενοι αυτή την ισοδυναμία και, για παρουσιάσουμε και τη φιλοσοφία των μεταβολικών τεχνικών, θα εγκαταλείψουμε προσωρινά την προβολική ορολογία στο υπόλοιπο του κεφαλαίου και θα καταστρώσουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, θεωρώντας την ουσιαστικά σαν ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Η ποσότητα, που ελαχιστοποιούμε, είναι το ακόλουθο μεταβολικό συναρτησιακό [116]

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{E}) = & \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right\} dV \\
 & + \int_{V_s} \mathbf{E} \cdot \left\{ j\omega \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \mathbf{M} \right) \right\} dV \\
 & + j\omega \mu_0 \oint_{S_0} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) dS
 \end{aligned} \quad (2.112)$$

Όταν έχουμε να λύσουμε προβλήματα με γεωμετρίες μεγάλων διαστάσεων, είναι προτιμότερο να επανεκφράσουμε το συναρτησιακό (2,112) σε όρους του σκεδαζόμενου πεδίου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση των σφαλμάτων διάδοσης πλέγματος (mesh propagation errors) [117] και διευκολύνει την εφαρμογή των οριακών συνθηκών στην S_0 .

Θέτουμε επομένως

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^S \quad (2.113)$$

και

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{inc} + \mathbf{H}^S \quad (2.114)$$

όπου με \mathbf{E}^{inc} συμβολίζουμε το προσπίπτον στο σκεδαστή πεδίο και με \mathbf{E}^S το σκεδαζόμενο. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη ότι, $\mathbf{M}=0$ και ότι, η ισοδύναμη ρευματική πηγή δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{J}_e = j\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}^{inc} \quad (2.115)$$

μπορούμε να γράψουμε το μεταβολικό συναρτησιακό F με τη μορφή

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{E}^S) = & \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}^S) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^S) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^S \cdot \mathbf{E}^S \right\} dV \\
 & - \int_{V_s} \left\{ k_0^2 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}^{inc} \cdot \mathbf{E}^S \right\} dV \\
 & + j\omega \mu_0 \oint_{S_0} \mathbf{E}^S \cdot (\mathbf{H}^S \times \hat{\mathbf{n}}) dS + f(\mathbf{E}^S)
 \end{aligned} \quad (2.116)$$

Στην παραπάνω σχέση, το $f(\mathbf{E}^S)$ είναι συνάρτηση αποκλειστικά του προσπίπτοντος πεδίου και, κατά συνέπεια, ο όρος αυτός μηδενίζεται μόλις πάρουμε την πρώτη μεταβολή του (variation).

Για το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}^S ισχύει η δυναδική μορφή της (2.116)

$$F(\mathbf{H}^S) = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \mathbf{H}^S) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^S) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H}^S \cdot \mathbf{H}^S \right\} dV \\ + j\omega\epsilon_0 \oint_{S_0} \mathbf{H}^S \cdot (\mathbf{E}^S \times \hat{\mathbf{n}}) dS + f(\mathbf{H}^S) \quad (2.117)$$

2.8.1.2 Απορροφητικές Οριακές Συνθήκες

Η βασική δυσκολία στην εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα με περιοχές απεριόριστης έκτασης, όπως είναι τα προβλήματα σκέδασης και ακτινοβολίας, έγκειται στο γεγονός ότι, η μέθοδος αυτή, όπως άλλωστε όλες οι μέθοδοι που βασίζονται σε διαφορικές εξισώσεις, διατυπώνεται πάντα με τη μορφή προβλήματος οριακών συνθηκών. Για την αντιμετώπιση της δυσκολίας αυτής, είτε θεωρούμε ότι τα εξωτερικά στοιχεία του πλέγματος εκτείνονται στο άπειρο (άπειρα στοιχεία) [118], είτε αποκόπτουμε τον υπολογιστικό χώρο, εισάγοντας ένα τεχνητό σύνορο.

Πάνω στο σύνορο αυτό, εφαρμόζουμε τις λεγόμενες Απορροφητικές Οριακές Συνθήκες ή ΑΟΣ (Absorbing Boundary Conditions). Σκοπός τους είναι να εξαλείψουν τις ανακλάσεις από το τεχνητό σύνορο, που δεν έχουν φυσικό νόημα. Υπάρχουν δύο τύποι Απορροφητικών Οριακών Συνθηκών, οι Ολικές και οι Τοπικές.

Οι ολικές ΑΟΣ είναι ακριβείς και, θεωρητικά, επιτρέπουν την τοποθέτηση του τεχνητού συνόρου, ακόμα και πάνω στην εξωτερική επιφάνεια του σκεδαστή, που εξετάζουμε. Έχουν, όμως, το μειονέκτημα ότι, οδηγούν σε πλήρεις και μη συμμετρικούς υποπίνακες, που καταστρέφουν την αραιά δομή του συστήματος των πεπερασμένων στοιχείων. Το χαρακτηριστικό τους αυτό, έχει περιορίσει πολύ την χρήση τους στις τρεις διαστάσεις.

Από την άλλη, οι τοπικές ΑΟΣ, διατηρούν την αραιότητα του πίνακα των πεπερασμένων στοιχείων, είναι όμως προσεγγιστικές. Μία μεγάλη ποικιλία από τέτοιες συνθήκες έχουν προταθεί κατά καιρούς στη βιβλιογραφία, ξεκινώντας από εκείνες των Bayliss-Turkel [119] και των Engquist-Majda [120]. Ανάμεσα στις πιό πρόσφατες είναι αυτές των Webb-Kanellopoulos [121] και των Chatterjee-Volakis [122].

Όλες οι τοπικές ΑΟΣ εκφράζονται σαν μία προσεγγιστική σχέση, ανάμεσα στα πεδία \mathbf{E}^S και \mathbf{H}^S , πάνω στην επιφάνεια S_0 . Η σχέση αυτή, στις περισσότερες περιπτώσεις, προκύπτει από ένα ανάπτυγμα του πεδίου σε αντίστροφες δυνάμεις του r , όπου r είναι η ακτινική απόσταση από το κέντρο της S_0 . Αν η ΑΟΣ εκμηδενίζει τους $(2m+1)$ πρώτους όρους του ανάπτυγματος αυτού, τη

χαρακτηρίζουμε m τάξης. Η μηδενικής τάξης ΑΟΣ είναι η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$-j\omega\mu_0\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^s = -jk_0\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^s \quad (2.118)$$

Μια ΑΟΣ, που χρησιμοποιείται συχνά, κατά την υλοποίηση κώδικα πεπερασμένων στοιχείων, είναι η δευτέρας τάξεως ΑΟΣ, των Kanelloroulois-Webb [121]

$$-j\omega\mu_0\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^s = a\mathbf{E}_t^s + \beta\nabla\times\left\{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}^s)_n\right\} + \beta\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{E}_t^s) \quad (2.119)$$

Στην παραπάνω σχέση, $a = jk_0$ και $\beta = 1/(2jk_0 + 2/r)$, ενώ οι δείκτες t και n υποδηλώνουν εφαπτομενικές και κάθετες, αντίστοιχα, συνιστώσες στην S_0 . Οι συνθήκες (2.118) και (2.119) μπορούν αρχικά να αναπτυχθούν για σφαιρικό εξωτερικό σύνορο, αλλά έχει διαπιστωθεί, ότι είναι αποτελεσματικές, ακόμα και όταν S_0 είναι τμηματικά επίπεδη, έτσι ώστε να προσαρμόζεται καλύτερα στην εξωτερική επιφάνεια του σκεδαστή. Στην περίπτωση αυτή, στο συντελεστή β πρέπει να δώσουμε την τιμή $\beta = 1/(2jk_0)$.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της (2.119) είναι πως, περιέχει μόνο άρτιας τάξης παραγώγους. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ότι, έχει σαν αποτέλεσμα, ο πίνακας των πεπερασμένων στοιχείων, που προκύπτει από την εφαρμογή της, να είναι συμμετρικός. Κάτι τέτοιο συνεπάγεται, όχι μόνο μεγάλη οικονομία σε απαιτήσεις μνήμης, αλλά και σημαντικά κέρδη σε υπολογιστικό χρόνο κατά την επίλυση του συστήματος.

Αντικαθιστώντας την (2.119) στην (2.116), το συναρτησιακό για το σκεδαζόμενο πεδίο παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} F(\mathbf{E}^s) = & \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} (\nabla\times\mathbf{E}^s) \cdot (\nabla\times\mathbf{E}^s) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}^s \cdot \mathbf{E}^s \right\} dV \\ & - \int_{V_r} \left\{ k_0^2 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}^{inc} \cdot \mathbf{E}^s \right\} dV \\ & + \frac{1}{2} \oint_{S_0} \left\{ a(\mathbf{E}_t^s \times \mathbf{E}_t^s) + \beta(\nabla\times\mathbf{E}^s)_n \cdot (\nabla\times\mathbf{E}^s)_n \right. \\ & \left. - \beta(\nabla\cdot\mathbf{E}_t^s)(\nabla\cdot\mathbf{E}_t^s) \right\} dS \\ & + f(\mathbf{E}^s) \end{aligned} \quad (2.120)$$

Η παρουσία του όρου επιφανειακής απόκλισης (surface divergence) στο επιφανειακό ολοκλήρωμα της (2.120) απαιτεί την επιβολή κάθετης συνέχειας του πεδίου πάνω στην S_0 . Στην περίπτωση που δεν επιβάλλεται κάθετη συνέχεια στην S_0 , το σφάλμα, που εισάγεται στον υπολογισμό του πεδίου, έχει δείχθει

[123] ότι, είναι της ίδιας τάξης με αυτό, που προκύπτει από την παράλειψη του όρου της επιφανειακής απόκλισης από την ανάλυση.

Το στάσιμο σημείο του συναρτησιακού F της (2.120) μας δίνει

$$\int_V \left\{ \delta \mathbf{E}^s \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}^s) - k_0^2 \epsilon_r \delta \mathbf{E}^s \cdot \mathbf{E}^s - k_0^2 (\epsilon_r - 1) \delta \mathbf{E}^s \cdot \mathbf{E}^{inc} \right) \right\} dV = 0 \quad (2.121)$$

που είναι η κυματική εξίσωση για το σκεδαζόμενο πεδίο, και

$$\oint_{S_0} \left\{ \delta \mathbf{E}^s \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^s \times \hat{\mathbf{n}}) + \beta (\nabla \times \delta \mathbf{E}^s)_n (\nabla \times \mathbf{E}^s)_n + a (\delta \mathbf{E}_r^s) \mathbf{E}_r^s - \beta (\nabla \cdot \delta \mathbf{E}_r^s) (\nabla \cdot \mathbf{E}_r^s) \right\} dS = 0 \quad (2.122)$$

που είναι η δευτέρας τάξεως ΑΟΣ των Kannelopoulos-Webb.

2.8.1.3 Πλαστοί ρυθμοί

Ένα άλλο πρόβλημα, που εμφανίζεται κατά την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στον ηλεκτρομαγνητισμό, είναι αυτό των πλαστών ή νόθων ρυθμών (spurious modes). Οι πλαστοί ρυθμοί είναι αριθμητικές λύσεις της διανυσματικής κυματικής εξίσωσης, που δεν έχουν καμμία αντιστοιχία στη φυσική πραγματικότητα. Αυτές οι λύσεις είναι απλώς λανθασμένες απαντήσεις και δεν θα πρέπει να τις συγχέουμε με τους πειραματικούς πλαστούς ρυθμούς, που είναι ανεπιθύμητοι αλλά φυσικά υπάρχοντες ρυθμοί. Ένα άλλο όνομα, που μερικές φορές χρησιμοποιείται για τους αριθμητικούς πλαστούς ρυθμούς, είναι διανυσματικά παράσιτα (vector parasites).

Η αρχική πεποίθηση σχετικά με τους πλαστούς ρυθμούς ήταν πως, το πρόβλημα αυτό οφειλόταν στον ελαττωματικό τρόπο επιβολής της σωληνοειδούς φύσης του πεδίου, κατά τη διαδικασία διακριτοποίησης. Η ιδέα αυτή αναπτύχθηκε σε μία σειρά από δημοσιεύσεις, με πρώτη αυτή του Konrad [124], που ακολουθήθηκε από τις [125] και [126]. Σαν αποτέλεσμα, είναι πολύ διαδεδομένη η αντίληψη πως, οι πλαστοί ρυθμοί προκαλούνται από την μη σωληνοειδή φύση των προσεγγίσεων των πεδίων από πεπερασμένα στοιχεία. Όμως, υπάρχει πλέον ένας μεγάλος όγκος βιβλιογραφίας [127], που δείχνει ότι, η αρχική σκέψη σχετικά με την αιτία των πλαστών ρυθμών δεν ήταν σωστή.

Η αληθινή αιτία των πλαστών ρυθμών, είναι η εσφαλμένη προσέγγιση του μηδενικού χώρου του τελεστή περιστροφής. Για να το κατανοήσουμε καλύτερα αυτό, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, οι λύσεις της διανυσματικής κυματικής εξίσωσης

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad (2.123)$$

πρέπει, είτε να συσχετίζονται με μία σωληνοειδή ροή \mathbf{D} , είτε να είναι στατικές. Πράγματι, αν πάρουμε τις αποκλίσεις των δύο μελών της (2.123) και λάβουμε υπόψη μας ότι, η απόκλιση της περιστροφής κάθε διανύσματος είναι μηδενική, προκύπτει η σχέση

$$k_0^2 \nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad (2.124)$$

Επομένως, είτε $k_0 = 0$, πράγμα που συνεπάγεται ότι $\omega = 0$, είτε $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, όπου \mathbf{D} είναι η ηλεκτρική ροή, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$. Κατά συνέπεια, η επιβολή μηδενικής απόκλισης της ροής στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δεν είναι απαραίτητη. Όπως είναι φανερό από την (2.124), οι λύσεις της (2.123), είτε έχουν σωληνοειδή ροή, είτε είναι στατικές. Με άλλα λόγια, η μηδενική απόκλιση της ροής είναι ενσωματωμένη στην (2.123), για όλες τις λύσεις εκτός από τις στατικές.

Αυτό σημαίνει πως, πρέπει να ψάξουμε στις dc ή στατικές λύσεις της (2.124), για την πηγή των πλαστών ρυθμών. Οι στατικές αυτές λύσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή της κλίσης μίας βαθμωτής συνάρτησης δυναμικού ϕ , σαν

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (2.125)$$

Τα στατικά ηλεκτρικά πεδία αποτελούν το μηδενικό χώρο του τελεστή περιστροφής, αφού $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \nabla \phi = 0$. Αντικαθιστώντας την (2.125) στην (2.123), διαπιστώνουμε ότι, τα ηλεκτρικά πεδία, που προκύπτουν από την (2.125), αποτελούν ιδιοδιανύσματα της κυματικής εξίσωσης με ιδιοτιμή μηδέν

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \nabla \phi = 0 = k_0^2 \varepsilon_r \nabla \phi \quad (2.126)$$

Αν το διάνυσμα ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} το προσεγγίζουμε, χρησιμοποιώντας τα συνήθη κομβικά στοιχεία όπως αυτά του Kongrad [124], τότε, στη γενική περίπτωση, είναι αδύνατο να βρούμε ένα βαθμωτό δυναμικό ϕ , που να ικανοποιεί τη σχέση (2.125). Αυτό συμβαίνει γιατί, για να είναι οι συνιστώσες του \mathbf{E} συνεχείς, το ϕ πρέπει να είναι συνάρτηση τετραγωνικού πολυωνυμικού βαθμού και να έχει συνεχείς παραγώγους ως προς x , y και z , δηλαδή να χαρακτηρίζεται από C^1 συνέχεια. Όμως, αποδεικνύεται [128] ότι, τετραγωνικά C^1 τμηματικά πολυώνυμα δεν υπάρχουν σε ένα αυθαίρετο πλέγμα. Τέτοια πολυώνυμα είναι δυνατά μόνο σε πλέγματα πολύ ειδικής μορφής.

Κατά συνέπεια, μόνο στα πλέγματα αυτά προσεγγίζεται σωστά ο μηδενικός χώρος του τελεστή περιστροφής και υπολογίζονται ακριβώς μηδενικές όλες οι $k=0$ ιδιοτιμές. Σε αυθαίρετα πλέγματα, ο μηδενικός χώρος της περιστροφής διακριτοποιείται πολύ αποτυχημένα, με αποτέλεσμα οι μηδενικές ιδιοτιμές της κυματικής εξίσωσης να προσεγγίζονται λανθασμένα από μεγάλους αριθμούς. Τα ιδιοδιανύσματα, που αντιστοιχούν σ' αυτές τις εσφαλμένα προσεγγισμένες

ιδιοτιμές, αποτελούν τους πλαστούς ρυθμούς, που εμφανίζονται στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων.

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι, το πρόβλημα των πλαστών ρυθμών είχε διαφύγει της προσοχής ερευνητών, που είχαν ασχοληθεί παλαιότερα με το συνδυασμό των μεθόδων των πεπερασμένων και οριακών στοιχείων για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης [129]. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι, διερευνούσαν τις λύσεις μακρινού πεδίου, που ήταν σωστές. Το πρόβλημα των πλαστών ρυθμών όμως γίνεται εμφανές μόνο στο εγγύς πεδίο. Η εξήγηση του φαινομένου αυτού είναι πως, οι πλαστοί ρυθμοί αποτελούν λανθασμένα προσεγγισμένες στατικές λύσεις και οι στατικές λύσεις δεν ακτινοβολούν. Μόνον οι μη στατικές λύσεις, που προσεγγίζονται σωστά, συνεισφέρουν στο μακρινό πεδίο.

2.8.1.4 Τα ακμικά στοιχεία

Οι μέθοδοι αντιμετώπισης του προβλήματος των πλαστών ρυθμών μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν μέθοδοι, που τροποποιούν το συναρτησιακό των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό το επιτυγχάνουν, κάνοντας χρήση των λεγόμενων συναρτήσεων ποινής (penalty functions). Η τροποποίηση που επιφέρουν στο συναρτησιακό με τον τρόπο αυτό, ισοδυναμεί με την πρόσθεση (με κατάλληλο βάρος) της εξίσωσης απόκλισης $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ στην κυματική εξίσωση. Επιβάλλουν, δηλαδή, οι μέθοδοι αυτές, σωληνοειδή ροή στις λύσεις.

Στη δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνονται μέθοδοι, που τροποποιούν τις συναρτήσεις βάσης των πεπερασμένων στοιχείων. Στόχος τους, οι νέες συναρτήσεις που προκύπτουν, να μοντελοποιούν καλύτερα τις στατικές λύσεις $\nabla \phi$. Έτσι, δεν εμφανίζονται τα προβλήματα στον υπολογισμό των μηδενικών ιδιοτιμών της κυματικής εξίσωσης, που αποτελούν την πηγή των πλαστών ρυθμών.

Στα πλαίσια των μεθόδων αυτών, έχουν προταθεί πολλές μορφές νέων συναρτήσεων βάσης, για διάφορα είδη πεπερασμένων στοιχείων (τρίγωνα [130], τετράπλευρα [104], τετράεδρα [132] και εξάεδρα [133]). Η απλούστερη και περισσότερο διαδεδομένη μορφή είναι αυτή των αποκαλούμενων ακμικών στοιχείων (edge elements) [131]. Τα στοιχεία αυτά είναι επίσης γνωστά και σαν στοιχεία Whitney, γιατί ο Whitney ήταν ο πρώτος που τα περιέγραψε [134].

Τα ακμικά στοιχεία ικανοποιούν τις λεγόμενες συνθήκες του Nedelec [135]. Πρόκειται για περιορισμούς στις συναρτήσεις παρεμβολής, που χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση διανυσματικών εξισώσεων. Οι περιορισμοί αυτοί έχουν σαν αποτέλεσμα, οι συναρτήσεις βάσης, που τις ικανοποιούν, να είναι, όπως λέγεται, μεικτής τάξης (mixed order), καθώς χάνουν μερικούς από τους βαθμούς ελευθερίας των αντίστοιχων συνηθισμένων κομβικών πεπερασμένων στοιχείων, παραμένοντας όμως πλήρεις στο χώρο του τελεστή περιστροφής.

Οι βαθμοί ελευθερίας, που απομένουν στα ακμικά στοιχεία, συσχετίζονται με τις ακμές του τετραέδρου, όπως υποδηλώνει άλλωστε και το όνομά τους και όχι με τους κόμβους του. Είναι οι κυκλοφορίες (circulations) του διανυσματικού

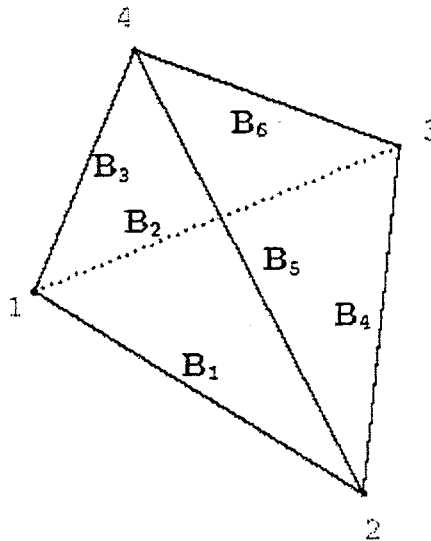
πεδίου, που διακριτοποιείται κατά μήκος των ακμών του τετραέδρου. Ένα τετραέδρο με ακμικές συναρτήσεις βάσης φαίνεται στο Σχήμα 2.14.

Η σχέση, που δίνει τις συναρτήσεις αυτές, έχει τη μορφή

$$\mathbf{B}_i = l_i (\zeta_{i1} \nabla \zeta_{i2} - \zeta_{i2} \nabla \zeta_{i1}) \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.127)$$

όπου l_i είναι το μήκος της ακμής i , με άκρα τους κόμβους $i1$ και $i2$. Με ζ_j συμβολίζουμε την ομογενή ή βαρυκεντρική συντεταγμένη, που αντιστοιχεί στον κόμβο j . Η ζ_j παίρνει τη μοναδιαία τιμή στον κόμβο αυτό και φθίνει γραμμικά στο μηδέν στους άλλους τρεις κόμβους του τετραέδρου.

Οι ακμικές συναρτήσεις βάσης είναι οι χαμηλότερης τάξης διανυσματικές συναρτήσεις, που ικανοποιούν τους περιορισμούς του Nedelec. Η αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου, που επιτρέπουν, είναι εφαπτομενικά σταθερή και κάθετα γραμμική πάνω στις ακμές του πλέγματος, γεγονός που περιορίζει την ακρίβεια της λύσης των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτή είναι και η σημασία του χαρακτηρισμού μεικτής τάξης για τις ακμικές συναρτήσεις. Για το λόγο αυτό, έχουν προταθεί και διανυσματικές συναρτήσεις υψηλότερης τάξης [136], που επίσης ικανοποιούν τις συνθήκες του Nedelec, προσφέροντας παράλληλα υψηλότερη ακρίβεια στις λύσεις.



Σχήμα 2.14: Οι ακμικές συναρτήσεις βάσης για ένα τετραέδρο.

Όλες αυτές οι συναρτήσεις εμπίπτουν στη γενική κατηγορία των προσαρμοζόμενων στην περιστροφή (curl conforming) συναρτήσεων. Η βασική ιδιότητα, που τις χαρακτηρίζει, είναι ότι, εξασφαλίζουν εφαπτομενική συνέχεια

του πεδίου που αναπαριστούν μεταξύ των στοιχείων, χωρίς να επιβάλλουν και κάθετη συνέχεια, όπως συμβαίνει με τις κομβικές συναρτήσεις βάσης.

Η ιδιότητα τους αυτή κάνει τις προσαρμοζόμενες στην περιστροφή συναρτήσεις ιδανικές για την αναπαράσταση των διανυσματικών ηλεκτρομαγνητικών πεδίων \mathbf{E} και \mathbf{H} , αφού και τα πεδία αυτά επιδεικνύουν μόνο εφαπτομενική συνέχεια πάνω σε διαχωριστικές επιφάνειες.

Περισσότερο σημαντικό, όμως, είναι το γεγονός ότι, η ιδιότητα επιβολής εφαπτομενικής μόνο συνέχειας δίνει τη δυνατότητα στις συναρτήσεις αυτής της κατηγορίας να αναπαριστούν αποτελεσματικά το μηδενικό χώρο του τελεστή περιστροφής. Αυτό συμβαίνει γιατί, αν το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} αναπαρίσταται με εφαπτομενική μόνο συνέχεια, το ίδιο θα ισχύει φυσικά και για τις στατικές λύσεις, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, της κυματικής εξίσωσης. Για την εφαπτομενική συνέχεια του $\nabla\phi$, αποδεικνύεται ότι, αρκεί απλώς η συνέχεια του ϕ . Δηλαδή, το ϕ πρέπει να χαρακτηρίζεται από C^0 συνέχεια και συναρτήσεις με C^0 συνέχεια μπορούν να οριστούν σε αυθαίρετα πλέγματα. Κατά συνέπεια, οι μηδενικές ιδιοτιμές υπολογίζονται σωστά και δεν εμφανίζονται πλαστοί ρυθμοί.

Οι ακμικές συναρτήσεις έχουν μηδενική απόκλιση. Το γεγονός αυτό αποτελεί την αιτία της διαδεδομένης, αλλά λανθασμένης αντίληψης ότι, οι συναρτήσεις αυτές εξουδετερώνουν τους πλαστούς ρυθμούς, επιβάλλοντας τη συνθήκη μηδενικής απόκλισης. Όμως, η αναπαράσταση του πεδίου, που προσεγγίζουν αυτές οι συναρτήσεις, δεν είναι σωληνοειδής και είναι δυνατόν να χαρακτηρίζεται από μεγάλη απόκλιση. Η επιτυχία των ακμικών συναρτήσεων στη αντιμετώπιση των πλαστών ρυθμών οφείλεται στην σωστή διακριτοποίηση του τελεστή περιστροφής και όχι στη σωληνοειδή τους φύση. Άλλωστε, υπάρχουν επεκτάσεις των ακμικών στοιχείων σε υψηλότερες τάξεις, που δεν χαρακτηρίζονται από μηδενική απόκλιση και, όμως, δίνουν λύση στο πρόβλημα των πλαστών ρυθμών.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να προσθέσουμε ότι, η εφαπτομενική συνέχεια από μόνη της δεν είναι πάντοτε επαρκής για την αντιμετώπιση των πλαστών ρυθμών. Σε κάποιες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στα εξαεδρικά στοιχεία, οι συναρτήσεις βάσης επιβάλλεται να είναι και μεικτής τάξης (mixed order) [137].

Ένας γενικός χαρακτηρισμός, που αναφέρεται στις ακμικές συναρτήσεις και στις επεκτάσεις τους σε ανώτερες τάξεις, είναι εφαπτομενικά διανυσματικές (tangential vector) συναρτήσεις. Η σημαντικότερη ιδιότητά τους για εφαπτομενική μόνο συνέχεια υποδηλώνεται από το γενικό όνομά τους και για το λόγο αυτό πρόκειται για ένα ιδιαίτερα επιτυχημένο όρο. Αξίζει να σημειωθεί πως, υπάρχουν και κάθετα διανυσματικές (normal vector) συναρτήσεις [138], που επιβάλλουν, όπως είναι προφανές, κάθετη μόνο συνέχεια. Οι συναρτήσεις αυτές είναι ιδανικές για την αναπαράσταση ρευμάτων και ροών, που χαρακτηρίζονται από κάθετη συνέχεια.

Τα εφαπτομενικά διανυσματικά στοιχεία, όπως έχει δείξει ο Bossavit [139], αποτελούν μία μόνον από τις εκφράσεις των μορφών Whitney στον ηλεκτρομαγνητισμό. Χαρακτηρίζονται στα πλαίσια αυτά, με τον όρο ένα-μορφή (one-form). Οι βαθμωτές τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις αποτελούν τη μηδέν-

μορφή (zero-form), ενώ οι κάθετα διανυσματικές συναρτήσεις καλούνται δύο-μορφή (two-form). Η τρία-μορφή (three-form) αντιστοιχεί σε ασυνεχείς βαθμωτές ποσότητες και περιλαμβάνει συναρτήσεις, που είναι κατάλληλες για τη διακριτοποίηση αποκλίσεων ρευμάτων και ροών.

Τα εφαπτομενικά διανυσματικά στοιχεία έχουν αποδειχθεί επιτυχημένα, όχι μόνο στη μοντελοποίηση του \mathbf{E} , αλλά και του \mathbf{H} . Το γεγονός ότι, η μαγνητική ροή $\mu\mathbf{H}$ είναι κάθετα συνεχής παντού, δημιουργεί την εντύπωση ύπαρξης προβλημάτων, καθώς οι εφαπτομενικές διανυσματικές συναρτήσεις δεν επιβάλλουν κάθετη συνέχεια. Όμως, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Ο λόγος είναι πως η κάθετη συνέχεια της πυκνότητας ροής αποτελεί φυσική οριακή συνθήκη (natural boundary condition) του μεταβολικού συναρτησιακού (variational principle). Αυτό έχει αποδειχθεί στη δημοσίευση [130].

Η μη επιβολή κάθετης συνέχειας από τα εφαπτομενικά διανυσματικά στοιχεία έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα σημαντική και για το χειρισμό πεδιακών ιδιαιζόντων σημείων (field singularities). Τέτοια ιδιάζοντα σημεία εμφανίζονται, για παράδειγμα, σε γεωμετρίες, που χαρακτηρίζονται από οξείες γωνίες. Στα σημεία αυτά η διεύθυνση του πεδίου αλλάζει πολύ απότομα. Τα εφαπτομενικά διανυσματικά στοιχεία επιτρέπουν αυτή τη συμπεριφορά και μοντελοποιούν σωστά την ασυνέχεια. Δεν συμβαίνει το ίδιο και με τα συνήθη κομβικά στοιχεία και αυτό είναι ένα σημείο, στο οποίο υστερούν σε σύγκριση με τα εφαπτομενικά διανυσματικά. Όταν κάνουμε χρήση κομβικών στοιχείων, απαιτείται, επομένως, η εισαγωγή ειδικών ιδιαιζουσών (singular) συναρτήσεων βάσης [99, Σελ. 316-319], για την αντιμετώπιση των πεδιακών ιδιαιζόντων σημείων.

Τα ακμικά στοιχεία οδηγούν σε μεγαλύτερο αριθμό αγνώστων, σε σύγκριση με τα κομβικά πρώτης τάξης, για το ίδιο πλέγμα. Ο λόγος είναι πως, σε ένα πλέγμα, που αποτελείται από τετράεδρα, υπάρχουν 6 έως 7 φορές περισσότερες ακμές απ' ό,τι κόμβοι. Όμως, ο πίνακας των πεπερασμένων στοιχείων, που προκύπτει από τη χρήση ακμικών στοιχείων, χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη αραιότητα. Αυτό συμβαίνει, γιατί στα κομβικά στοιχεία κάθε βαθμός ελευθερίας αλληλεπιδρά με 44 άλλους, ενώ στα ακμικά με περίπου 15. Το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του πίνακα των συντελεστών του συστήματος για τα ακμικά στοιχεία είναι, κατά συνέπεια, μικρότερο από το αντίστοιχο πλήθος για τα κομβικά στοιχεία. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, όχι μόνο σημαντικά κέρδη σε μνήμη, αλλά και σε υπολογιστικό χρόνο για την επίλυση του συστήματος με μία επαναληπτική μέθοδο.

2.8.2 Πεπερασμένα Στοιχεία με Βαθμωτές Συναρτήσεις Βάσης για Διανυσματικά Πεδιακά Προβλήματα Σκέδασης και Ακτινοβολίας

2.8.2.1 Βαθμωτές Συναρτήσεις Βάσης για Διανυσματικά Ηλεκτρομαγνητικά Προβλήματα

Υπάρχουν δύο γενικοί τρόποι διακριτοποίησης ενός διανυσματικού πεδίου με πεπερασμένα στοιχεία. Ο πρώτος είναι με τη χρήση διανυσματικών συναρτήσεων βάσης σε αναπτύγματα με βαθμωτούς συντελεστές. Ειδική

περίπτωση διανυσματικών συναρτήσεων βάσης αποτελούν οι ακμικές συναρτήσεις, που περιγράψαμε στην παράγραφο 2.8.1.4. Μια εναλλακτική επιλογή είναι η ανάπτυξη του διανυσματικού πεδίου με βαθμωτές (scalar) συναρτήσεις βάσης πολλαπλασιασμένες με διανυσματικούς συντελεστές. Την τεχνική αυτή παρουσιάζουμε στην παρούσα παράγραφο.

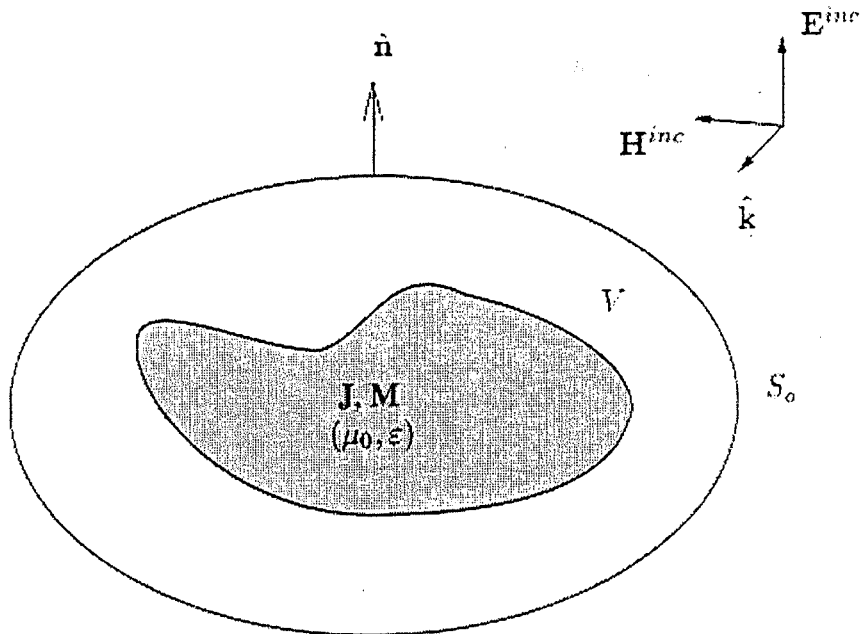
Ο συνδυασμός βαθμωτών συναρτήσεων βάσης και διανυσματικών συντελεστών έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στο πεδίο της δομικής μηχανικής (structural mechanics) με πολύ θετικά αποτελέσματα. Οι πρώτες μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων για διανυσματικά πεδία, που αναπτύχθηκαν στον ηλεκτρομαγνητισμό, στηρίζονταν στην προσέγγιση αυτή [124].

Για ένα διάστημα, η καταλληλότητα των βαθμωτών συναρτήσεων βάσης για διανυσματικά ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα αμφισβητήθηκε έντονα από ορισμένους ερευνητές. Ο κύριος λόγος της ένστασης αυτής ήταν η ευπάθεια σε πλαστούς ρυθμούς προγραμμάτων, που βασίζονται στη χρήση βαθμωτών συναρτήσεων ανάπτυξης. Σύντομα, όμως, αναπτύχθηκαν και καθιερώθηκαν αποτελεσματικές τεχνικές που προστατεύουν από τους πλαστούς ρυθμούς τους κώδικες με βαθμωτές βάσεις.

Οι βαθμωτές συναρτήσεις ανάπτυξης χαρακτηρίζονται από απλότητα και ευκολία ορισμού. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ίδιες για την προσέγγιση και διανυσματικών και βαθμωτών συναρτήσεων, όπου χρειάζεται κάτι τέτοιο (όπως, για παράδειγμα, σε προβλήματα με βαθμωτά και διανυσματικά δυναμικά). Οι διανυσματικοί συντελεστές τους έχουν ξεκάθαρο και προφανές νόημα σαν συνιστώσες του πεδίου, που διακριτοποιείται. Σε αντίθεση με τις διανυσματικές συναρτήσεις βάσης, η κατασκευή συναρτήσεων υψηλής τάξης δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Τέλος, λόγω της μεγάλης διάδοσης των βαθμωτών συναρτήσεων σε πεδία εκτός του ηλεκτρομαγνητισμού, η θεωρία τους είναι πολύ πιο ανεπτυγμένη, απ' ό,τι η αντίστοιχη των διανυσματικών βάσεων.

2.8.2.2 Η Ασθενής Μορφή για το Ολικό Μαγνητικό Πεδίο

Στο Σχήμα 2.15 βλέπουμε ένα αντιπροσωπευτικό πρόβλημα σκέδασης ή ακτινοβολίας. Ο χώρος V , που περικλείεται από ένα αυθαίρετα τοποθετημένο κλειστό σύνορο S_0 , περιέχει όλες τις διηλεκτρικές (πιθανότατα ανομοιογενείς) περιοχές και τις αγώγιμες επιφάνειες του προβλήματος, μαζί με τις ισοδύναμες πηγές του.



Σχήμα 2.15: Γενική μορφή προβλήματος σκέδασης ή ακτινοβολίας.

Οι εξισώσεις περιστροφής του Maxwell στο χώρο V , σε μορφή μιγαδικών φασιθετών για τη συχνότητα ω , γράφονται σαν

$$\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H} - \mathbf{M} \quad (2.128)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (2.129)$$

Με \mathbf{J} και \mathbf{M} στις παραπάνω σχέσεις συμβολίζουμε τις ισοδύναμες ηλεκτρικές και μαγνητικές αντίστοιχα πηγές του προβλήματος, που εξετάζουμε. Πρέπει να σημειώσουμε ότι, χρησιμοποιούμε τον όρο πηγή μόνο για τις ρευματικές κατανομές, απουσία των οποίων το πεδίο παντού στο χώρο, που αναλύουμε, μηδενίζεται. Με την έννοια αυτή, επαγόμενα ρεύματα δεν λογαριάζονται σαν πηγές, καθώς εξαφανίζονται μόλις απομακρύνουμε τις πραγματικές πηγές. Ενδεχόμενες επαγόμενες ηλεκτρικές κατανομές λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση, μέσω της χρήσης μιγαδικής σχετικής επιτρεπτότητας ϵ_r με φανταστικό μέρος $j\epsilon_{ri} = -j\sigma/\omega\epsilon_0$, όπου σ είναι η αγωγιμότητα του μέσου, που μοντελοποιούμε.

Η απαλοιφή του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} μεταξύ των σχέσεων (2.128) και (2.129) μας δίνει την εξίσωση διπλής περιστροφής για το ολικό μαγνητικό πεδίο

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} + \frac{jk_0}{\eta_0} \mathbf{M} - \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J} \right) = 0 \quad (2.130)$$

όπου $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ και $\eta_0^2 = \mu_0 / \epsilon_0$.

Για να βρούμε την ασθενή μορφή της (2.130), εφαρμόζουμε την Galerkin μέθοδο των σταθμικών υπολοίπων. Στα πλαίσια εφαρμογής της τεχνικής αυτής, παίρνουμε τα γινόμενα των όρων της (2.130) με μία βαθμωτή συνάρτηση βάρους W και τα ολοκληρώνουμε πάνω στο χώρο V , όπως

$$\int_V W \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) dV - \int_V k_0^2 \mu_r W \mathbf{H} dV + \int_V \left\{ \frac{jk_0}{\eta_0} W \mathbf{M} - W \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J} \right) \right\} dV = 0 \quad (2.131)$$

Κάνοντας χρήση διανυσματικής παραγοντικής ολοκλήρωσης, ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$\int_V W \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) dV = - \int_V \nabla W \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) dV + \oint_{S_0} \hat{\mathbf{n}} \times W \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) dS \quad (2.132)$$

Απαλείφοντας τον πρώτο όρο των (2.132) και (2.131), η τελευταία παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) \times \nabla W - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} W \right\} dV = \\ & - \int_V \left\{ \frac{jk_0}{\eta_0} W \mathbf{M} - W \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J} \right) \right\} dV \\ & + \oint_{S_0} \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{H}) W dS \end{aligned} \quad (2.133)$$

Όπως βλέπουμε, με τίμημα την εισαγωγή ενός επιπρόσθετου επιφανειακού ολοκληρώματος, πετύχαμε τη μεταφορά του διαφορικού τελεστή ∇ από το διανυσματικό πεδίο $\nabla \times \mathbf{H}$ στη βαθμωτή συνάρτηση βάρους W . Σημειώνουμε ότι, το σύνορο S_0 βρίσκεται στον ελεύθερο χώρο και πάνω του οι πηγές εξ ορισμού μηδενίζονται.

2.8.2.3 Η Απορροφητική Οριακή Συνθήκη για το Ολικό Μαγνητικό Πεδίο

Όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει στην παράγραφο 2.8.1.2, ένα από τα δυσκολότερα σημεία στο χειρισμό προβλημάτων ανοικτού συνόρου (open boundary), είναι ο σωστός υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος της ασθενούς μορφής πάνω στο φανταστικό όριο S_0 , που περικλείει την περιοχή των πεπερασμένων στοιχείων

$$I = \oint_{S_0} \hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) W dS \quad (2.134)$$

Η δυσκολία στον υπολογισμό του I οφείλεται στο γεγονός ότι, οι εφαπτομενικές στην S_0 συνιστώσες του $\nabla \times \mathbf{H}$ δεν είναι διαθέσιμες από τις εξισώσεις πεπερασμένων στοιχείων για τον όγκο V . Για το λόγο αυτό, πρέπει να καταφέρουμε να τις συσχετίσουμε με τις διαθέσιμες συνιστώσες του εφαπτομενικού \mathbf{H} , εξασφαλίζοντας παράλληλα τη διαφάνεια του συνόρου S_0 .

Ένας τρόπος για να το πετύχουμε αυτό είναι η χρήση κατάλληλης συνάρτησης Green, στα πλαίσια μίας υβριδικής μεθόδου. Το μειονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι, οδηγεί σε πυκνούς υποπίνακες με $O(N^2)$ απαιτήσεις αποθήκευσης. Για να αποφύγουμε την καταστροφή της πολύτιμης αραιότητας του πίνακα των πεπερασμένων στοιχείων, καταφεύγουμε στην εφαρμογή των τοπικών Απορροφητικών Οριακών Συνθηκών, που περιγράψαμε στην παράγραφο 2.8.1.2.

Η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld για το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}^S έχει τη μορφή

$$\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H}^S = -jk_0 \hat{n} \times \hat{n} \times \mathbf{H}^S \quad (2.135)$$

ενώ η δευτέρας τάξης ΑΟΣ των Webb και Kanellopoulos, πάλι για το \mathbf{H}^S , γράφεται

$$\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H}^S = a \mathbf{H}_t^S + \beta \nabla \times \left[\hat{n} (\nabla \times \mathbf{H}^S)_n \right] + \beta \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{H}_t^S) \quad (2.136)$$

όπου $a = jk_0$, $\beta = 1/(2jk_0 + 2/r)$, \mathbf{H}^S αναπαριστά το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο, \hat{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S_0 και οι δείκτες t και n υποδηλώνουν την εφαπτομενική και κάθετη συνιστώσα στην S_0 , αντίστοιχα.

Μπορούμε να συνδυάσουμε τις (2.135) και (2.136) στην πιο συνοπτική έκφραση

$$\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H}^S = P(\mathbf{H}^S) \quad (2.137)$$

Για να βρούμε την απορροφητική συνθήκη για το ολικό μαγνητικό πεδίο, αντικαθιστούμε στην παραπάνω έκφραση το \mathbf{H}^S με τη διαφορά του ολικού από το προσπίπτον πεδίο και παίρνουμε

$$\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H} = P(\mathbf{H}) + \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H}^{inc} - P(\mathbf{H}^{inc}) \quad (2.138)$$

όπου \mathbf{H}^{inc} είναι το προσπίπτον μαγνητικό πεδίο. Όπως βλέπουμε, το αριστερό μέλος της (2.138) πολλαπλασιασμένο με τη βαθμωτή συνάρτηση W , αποτελεί την ολοκληρωτέα παράσταση της (2.134). Συνεπώς, καθώς το \mathbf{H}^{inc} είναι γνωστό και το $P(\mathbf{H})$ περιέχει αποκλειστικά εφαπτομενικές συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, τώρα, πλέον, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην S_0 .

Η εισαγωγή της ΑΟΣ (2.138) στην ασθενή μορφή (2.133) της προηγούμενης παραγράφου έχει σαν αποτέλεσμα την έκφραση

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) \times \nabla W - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} W \right\} dV = \\ & - \int_V \left\{ \frac{jk_0}{\eta_0} W \mathbf{M} - W \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{J} \right) \right\} dV \\ & + \oint_{S_0} \left\{ P(\mathbf{H}) W + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{H}^{inc} W - P(\mathbf{H}^{inc}) W \right\} dS \end{aligned} \quad (2.139)$$

Αναπτύσσοντας τα $P(\mathbf{H})$ και $P(\mathbf{H}^{inc})$ στην (2.139), παίρνουμε την ακόλουθη αναλυτικότερη έκφραση (για τη δευτέρας τάξης συνθήκη)

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) \times \nabla W - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} W \right\} dV = \\ & - \int_V \left\{ \frac{jk_0}{\eta_0} W \mathbf{M} - W \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{J} \right) \right\} dV \\ & + \oint_{S_0} \left\{ a \mathbf{H}_t W + \beta \nabla \times [\hat{\mathbf{n}} (\nabla \times \mathbf{H})_n] W + \beta \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{H}_t^{inc}) W \right. \\ & \quad \left. + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{H}^{inc} W \right. \\ & \quad \left. + a \mathbf{H}_t^{inc} W + \beta \nabla \times [\hat{\mathbf{n}} (\nabla \times \mathbf{H}^{inc})_n] W + \beta \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{H}_t^{inc}) W \right\} dS \end{aligned} \quad (2.140)$$

Κάνοντας χρήση παραγοντικών ολοκληρώσεων και διανυσματικών ταυτοτήτων, η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) \times \nabla W - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} W \right\} dV = \\ & - \int_V \left\{ \frac{jk_0}{\eta_0} W \mathbf{M} - W \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{J} \right) \right\} dV \\ & + \oint_{S_0} \left\{ a \mathbf{H}_t W - \beta \hat{\mathbf{n}} (\nabla \times \mathbf{H})_n \times \nabla W - \beta (\nabla \cdot \mathbf{H}_t) \nabla_t W \right. \\ & \quad \left. + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{H}^{inc} W \right\} dS \end{aligned}$$

$$+a\mathbf{H}_r^{inc}W - \beta\hat{\mathbf{n}}(\nabla \times \mathbf{H}^{inc})_n \times \nabla W - \beta(\nabla \cdot \mathbf{H}_r^{inc})\nabla_r W\} dS \quad (2.141)$$

Αξίζει να σημειώσουμε πως, τα επικαμπύλια ολοκληρώματα, που προκύπτουν με την εφαρμογή των παραγοντικών ολοκληρώσεων πάνω στην κλειστή επιφάνεια S_0 , μηδενίζονται. Τέλος, πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι, η ύπαρξη του όρου της επιφανειακής απόκλισης, στην περίπτωση της οριακής συνθήκης δευτέρας τάξεως, απαιτεί την επιβολή κάθετης συνέχειας πεδίου πάνω στην S_0 .

2.8.2.4 Η Αντιμετώπιση των Πλαστών Ρυθμών στα Κομβικά Στοιχεία

Το πρόβλημα των πλαστών ρυθμών στις λύσεις πεπερασμένων στοιχείων των εξισώσεων του Maxwell το έχουμε αναλύσει διεξοδικά στην παράγραφο 2.8.1.3. Για την αντιμετώπισή του εκεί χρησιμοποιήσαμε κατάλληλες συναρτήσεις βάσης, τα λεγόμενα ακμικά στοιχεία (παράγραφος 2.8.1.4). Υπάρχει όμως και μία εναλλακτική λύση: η τροποποίηση της ασθενούς μορφής, που χρησιμοποιούμε.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι, με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό. Επιλέγουμε να ακολουθήσουμε τη στρατηγική, που προτείνουν οι Paulsen και Lynch [140]. Η προσέγγισή τους συνδέεται στενά με την τροποποίηση της ασθενούς μορφής με όρους ποινής, μια σχετικά παλαιότερη τεχνική. Σε αντίθεση, όμως, με εκείνη που θεωρεί τον συντελεστή ποινής αυθαίρετο και εξαρτώμενο από το πρόβλημα, η μέθοδος των Paulsen και Lynch ορίζει επακριβώς μια νέα ασθενή μορφή, που στην ουσία μετατρέπει τον τελεστή διτλής περιστροφής σε Λαπλασιανή στις ομογενείς υποπεριοχές του προβλήματος. Οι Paulsen και Lynch έχουν αποδείξει θεωρητικά, αλλά και στην πράξη ότι, η ασθενής μορφή, που προτείνουν, εξασφαλίζει την αντιμετώπιση των πλαστών ρυθμών, αρκεί να έχει γίνει σωστός καθορισμός των φυσικών οριακών συνθηκών του προβλήματος.

Η τροποποιημένη ασθενής μορφή, που εισήγαγαν οι Paulsen και Lynch, βασίζεται στη διευρυμένη μερική διαφορική εξίσωση

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) - \nabla \left(\frac{1}{\epsilon_r \mu} \nabla \cdot \mu \mathbf{H} \right) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} + \frac{jk_0}{\eta_0} \mathbf{M} - \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J} \right) = 0 \quad (2.142)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των σταθμικών υπολοίπων στην (2.142), παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_V W \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) dV - \int_V W \nabla \left(\frac{1}{\epsilon_r \mu} \nabla \cdot \mu \mathbf{H} \right) dV \\ & - \int_V W k_0^2 \mu_r \mathbf{H} dV = \int_V \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J} \right) W - \frac{jk_0}{\eta_0} \mathbf{M} W \right\} dV \end{aligned} \quad (2.143)$$

Μπορούμε να μεταφέρουμε τον τελεστή ∇ από το διάνυσμα $\nabla \cdot \mu \mathbf{H}$ στη βαθμωτή συνάρτηση δοκιμής W , με τη βοήθεια της διανυσματικής παραγοντικής ολοκλήρωσης

$$\int_V W \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon_r \mu} \nabla \cdot \mu \mathbf{H} \right) dV = \oint_{S_0} \hat{\mathbf{n}} \frac{1}{\varepsilon_r \mu} (\nabla \cdot \mu \mathbf{H}) W dS - \int_V \frac{1}{\varepsilon_r \mu} (\nabla \cdot \mu \mathbf{H}) \nabla W dV \quad (2.144)$$

Κάνοντας χρήση των (2.132) και (2.136) στην έκφραση (2.143), η τελευταία γράφεται

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \times \nabla W + \frac{1}{\varepsilon_r \mu} (\nabla \cdot \mu \mathbf{H}) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} W \right\} dV = \\ & \int_V \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{J} \right) W - \frac{jk_0}{\eta_0} \mathbf{M} W \right\} dV - \oint_{S_0} \hat{\mathbf{n}} (\nabla \times \mathbf{H}) W dS + \oint_{S_0} \hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \mathbf{H}) W dS \quad (2.145) \end{aligned}$$

Εισάγοντας και την απορροφητική οριακή συνθήκη (2.141) στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε την τελική έκφραση της τροποποιημένης ασθενούς μορφής, που είναι

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \times \nabla W + \frac{1}{\varepsilon_r \mu} (\nabla \cdot \mu \mathbf{H}) \nabla W - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} W \right\} dV = \\ & - \int_V \frac{jk_0}{\eta_0} \mathbf{M} W - W \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{J} \right) dV \\ & + \oint_{S_0} \{ a \mathbf{H}_t W - \beta \hat{\mathbf{n}} (\nabla \times \mathbf{H})_n \times \nabla W - \beta (\nabla \cdot \mathbf{H}_t) \nabla_t W \\ & + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{H}^{inc} W \\ & + a \mathbf{H}_t^{inc} W - \beta \hat{\mathbf{n}} (\nabla \times \mathbf{H}^{inc})_n \times \nabla W - \beta (\nabla \cdot \mathbf{H}_t^{inc}) \nabla_t W \} dS \\ & + \oint_{S_0} \hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \mathbf{H}) W dS \quad (2.146) \end{aligned}$$

2.8.3 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου

2.8.3.1 Γενικά

Όλες οι αριθμητικές μέθοδοι, που παρουσιάσαμε μέχρι το σημείο αυτό, αναφέρονται στο πεδίο της συχνότητας (frequency domain). Αν και υπάρχουν παραλλαγές, τόσο της μεθόδου των ροπών, όσο και αυτής των πεπερασμένων στοιχείων, που υλοποιούνται στο πεδίο του χρόνου (time domain), πιο δημοφιλής επιλογή στο πεδίο αυτό είναι η μέθοδος των πεπερασμένων

διαφορών, που εισήγαγε στον ηλεκτρομαγνητισμό ο Yee[145]. Το σημαντικότερο, ίσως, πλεονέκτημα της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου (Finite Difference Time Domain-FDTD) είναι η μεγάλη απλότητα της και η ευκολία, με την οποία μπορεί να υλοποιηθεί, γιατί δεν απαιτεί, συνήθως, επιλύσεις συστημάτων.

Αρχικά, υπήρξε μικρό ενδιαφέρον για τη μέθοδο FDTD, κυρίως εξαιτίας της έλλειψης ικανοποιητικών υπολογιστικών πόρων. Γρήγορα, όμως, με την αύξηση της διαθεσιμότητας φτηνών ισχυρών υπολογιστών, αλλά και λόγω της εξέλιξης της ίδιας της μεθόδου, η κυριαρχία της υπήρξε αδιαμφισβήτη σε θέματα ανάλυσης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας στο πεδίο του χρόνου. Ενδεικτικά αναφέρουμε πως, η FDTD έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε προβλήματα μοντελοποίησης μικροκυματικών κυκλωμάτων [146], προσωμοίωσης κοιλοτήτων αυθαίρετου σχήματος [149], αλλά και απορρόφησης ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας από ανθρώπινους ιστούς [150].

2.8.3.2 Ο αλγόριθμος του Yee

2.8.3.2.1 Το μαθηματικό μοντέλο του αλγορίθμου

Το μαθηματικό μοντέλο του αλγορίθμου αποτελούν οι εξισώσεις στροβιλισμού του Maxwell, για ισοτροπικά μέσα,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{E} \quad (2.147)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} \quad (2.148)$$

Αναπτύσσοντας τους τελεστές στροβιλισμού των παραπάνω εξισώσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες, και αναλύοντας το διάνυσμα του κάθε πεδίου στις συνιστώσες του, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύνολο βαθμωτών εξισώσεων, το οποίο αποτελεί και τη βάση του FDTD αλγορίθμου.

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.149)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (2.150)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.151)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (2.152)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (2.153)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2.154)$$

2.8.3.2.2 Προσέγγιση με πεπερασμένες διαφορές στο χώρο και το χρόνο

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός των πεδιακών συνιστωσών, ο συνεχής τρισδιάστατος χώρος επίλυσης Ω προσεγγίζεται από ένα πλέγμα διακριτών σημείων. Κάθε σημείο του διακριτού πλέον χώρου αναπαρίσταται από τρεις δείκτες (i, j, k) , οι οποίοι δηλώνουν τη θέση του στο χώρο,

$$(i, j, k) = (i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z) \quad (2.155)$$

όπου Δx , Δy και Δz είναι τα βήματα διακριτοποίησης του συνεχούς χώρου στις x , y και z διευθύνσεις, αντίστοιχα. Προκειμένου να εξαχθεί το διακριτό μαθηματικό μοντέλο για τις εξισώσεις του Maxwell, οι σχέσεις (2.148-2.153) διακριτοποιούνται στα σημεία του πλέγματος. Η διακριτοποίηση υπαγορεύει το διακριτό υπολογισμό, τόσο των χωρικών, όσο και των χρονικών παραγώγων των πεδιακών συνιστωσών χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται στη συνέχεια για μία συνάρτηση της μορφής

$$f(i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, n \Delta t) \quad (2.156)$$

όπου n δηλώνει το χρονικό στιγμιότυπο (ως ακέραιο πολλαπλάσιο του χρονικού βήματος Δt), στο οποίο λαμβάνει χώρα η διακριτοποίηση.

α) προσέγγιση με κεντρικές διαφορές στο χώρο

Για την προσέγγιση της χωρικής παραγώγου πρώτης τάξης της συνάρτησης f στο σημείο (i, j, k, n) τη χρονική στιγμή $n \Delta t$ έχουμε:

$$\frac{\partial f(i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, n \Delta t)}{\partial x} = \frac{F^n(i+1/2, j, k) - F^n(i-1/2, j, k)}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (2.157)$$

Στην παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι, ο δείκτης i , ο οποίος αναπαριστά τη x διεύθυνση, αυξάνει και μειώνεται κατά $1/2$. Η μεταβολή αυτή δηλώνει την κεντρική χωρική διαφορά στη x διεύθυνση και έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης, ως προς τη διακριτοποίηση στη διεύθυνση αυτή. Ανάλογες εκφράσεις μπορούν να εξαχθούν και για την προσέγγιση των πρώτων χωρικών παραγώγων στις υπόλοιπες διευθύνσεις.

β) προσέγγιση με κεντρικές διαφορές στο χρόνο

Για την προσέγγιση της χρονικής παραγώγου πρώτης τάξης της συνάρτησης f , έχουμε

$$\frac{\partial f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \quad (2.158)$$

Στην παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι ο εκθέτης n ο οποίος αναπαριστά τη χρονική μεταβολή, αυξάνει και μειώνεται κατά 1/2. Η μεταβολή αυτή δηλώνει την κεντρική χρονική διαφορά και έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς τη χρονική διακριτοποίηση Δt .

2.8.3.2.3 Οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών για τις εξισώσεις του Maxwell σε χώρο τριών διαστάσεων

Προκειμένου να ληφθούν οι διακριτοποιημένες εκφράσεις, που θα οδηγήσουν στον αριθμητικό υπολογισμό των πεδιακών συνιστωσών με τη μέθοδο FDTD, οι εξισώσεις (2.156, 2.157) εφαρμόζονται στις σχέσεις (2.148-2.153). Η εφαρμογή αυτή έχει ως αποτέλεσμα την εξαγωγή 6 συζευγμένων εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών,

$$\mathbf{H}_x^{n+1/2}(i, j, k) = \left[\frac{1 - \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}}{1 + \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}} \right] \mathbf{H}_x^{n-1/2}(i, j, k) + \left[\frac{\frac{\Delta t}{\mu(i, j, k)}}{1 + \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}} \right] \left\{ \frac{\mathbf{E}_y^n(i, j, k+1/2) - \mathbf{E}_y^n(i, j, k-1/2)}{\Delta z} - \frac{\mathbf{E}_z^n(i, j+1/2, k) - \mathbf{E}_z^n(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \right\} \quad (2.159)$$

$$\mathbf{H}_y^{n+1/2}(i, j, k) = \left[\frac{1 - \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}}{1 + \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}} \right] \mathbf{H}_y^{n-1/2}(i, j, k) + \left[\frac{\frac{\Delta t}{\mu(i, j, k)}}{1 + \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}} \right] \left\{ \frac{\mathbf{E}_z^n(i+1/2, j, k) - \mathbf{E}_z^n(i-1/2, j, k)}{\Delta x} - \frac{\mathbf{E}_x^n(i, j, k+1/2) - \mathbf{E}_x^n(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \right\} \quad (2.160)$$

$$\mathbf{H}_z^{n+1/2}(i, j, k) =$$

$$\left[\frac{1 - \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}}{1 + \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}} \right] \mathbf{H}_z^{n-1/2}(i, j, k) + \left[\frac{\Delta t}{1 + \frac{\rho'(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}} \right] \left\{ \frac{\mathbf{E}_x^n(i, j+1/2, k) - \mathbf{E}_x^n(i, j-1/2, k)}{\Delta x} \right. \\ \left. \frac{\mathbf{E}_y^n(i+1/2, j, k) - \mathbf{E}_y^n(i-1/2, j, k)}{\Delta z} \right\}$$

$$\mathbf{E}_x^{n+1/2}(i, j, k) =$$

$$\left[\frac{1 - \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}} \right] \mathbf{E}_x^n(i, j, k) + \left[\frac{\Delta t}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}} \right] \left\{ \frac{\mathbf{H}_z^{n+1/2}(i, j+1/2, k) - \mathbf{H}_z^{n-1/2}(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \right. \\ \left. \frac{\mathbf{H}_y^{n+1/2}(i, j, k) - \mathbf{H}_y^{n+1/2}(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \right\} \quad (2.161)$$

$$\mathbf{E}_x^{n+1/2}(i, j, k) =$$

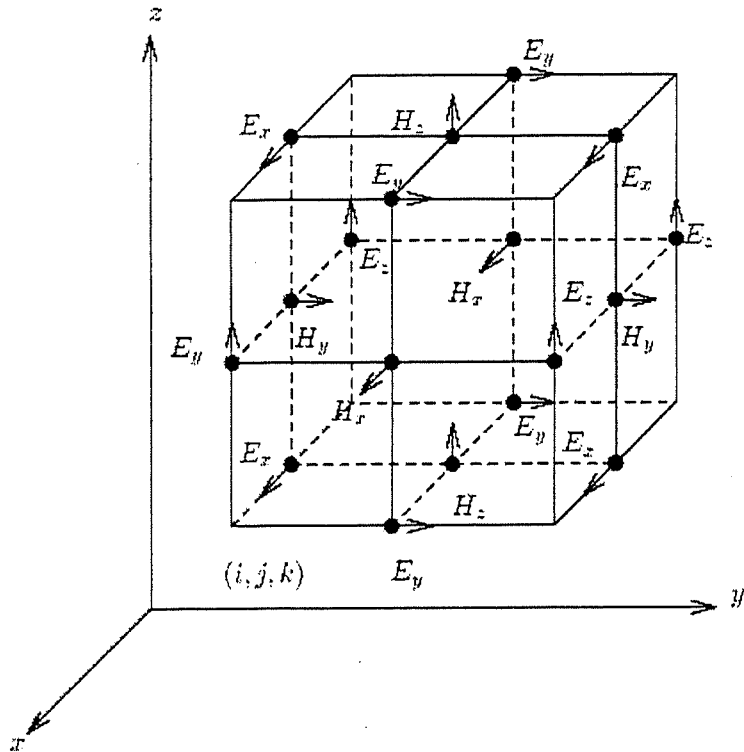
$$\left[\frac{1 - \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}} \right] \mathbf{E}_y^n(i, j, k) + \left[\frac{\Delta t}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}} \right] \left\{ \frac{\mathbf{H}_x^{n+1/2}(i, j, k+1/2) - \mathbf{H}_x^{n-1/2}(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \right. \\ \left. \frac{\mathbf{H}_z^{n+1/2}(i+1/2, j, k) - \mathbf{H}_z^{n+1/2}(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \right\} \quad (2.162)$$

$$\mathbf{E}_z^{n+1}(i, j, k) =$$

$$\left[\frac{1 - \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}} \right] \mathbf{E}_z^n(i, j, k) + \left[\frac{\Delta t}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}} \right] \left\{ \frac{\mathbf{H}_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k) - \mathbf{H}_y^{n-1/2}(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \right. \\ \left. \frac{\mathbf{H}_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k) - \mathbf{H}_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \right\} \quad (2.163)$$

2.8.3.2.4 Η τοποθέτηση των πεδιακών συνιστωσών στον τρισδιάστατο χώρο – το κύτταρο του Yee

Σε όλες τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών, που παρουσιάστηκαν παραπάνω, οι συνιστώσες των πεδίων είναι τοποθετημένες σε ένα μοναδιαίο κύτταρο (cell) στο χώρο των τριών διαστάσεων, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 2.16.



Σχήμα 2.16: Θέσεις των πεδιακών συνιστωσών σε ένα μοναδιαίο κύτταρο στο πλέγμα του Yee.

Παρατηρώντας μακροσκοπικά τη διάταξη των συνιστωσών στο κύτταρο του Yee, βλέπουμε ότι κάθε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, η οποία είναι κάθετη στην έδρα του κυττάρου, περιβάλλεται από τέσσερις συνιστώσες μαγνητικού πεδίου οι οποίες σχηματίζουν ένα κλειστό βρόχο στο επίπεδο της έδρας του κυττάρου. Ακριβώς το ίδιο παρατηρείται για κάθε συνιστώσα μαγνητικού πεδίου, γύρω από την οποία σχηματίζεται ένας κλειστός βρόχος από συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου. Με τη διάταξη, λοιπόν, των πεδιακών συνιστωσών, σχηματίζεται μία απλή εικόνα του τρισδιάστατου χώρου, ο οποίος είναι γεμάτος από κλειστές διαδρομές των νόμων του Faraday και του Ampere στην ολοκληρωτική τους μορφή.

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oiint_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.164)$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oiint_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.165)$$

Στην ουσία, επομένως, ο αλγόριθμος FDTD προσομοιώνει ταυτόχρονα με τη διαφορική και την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων του Maxwell. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την εφαρμογή των οριακών συνθηκών στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ διαφορετικών υλικών.

2.8.3.3. Επιλογή της χωρικής διακριτοποίησης

Ο θεμελιώδης περιορισμός, ο οποίος τίθεται κατά την επιλογή της χωρικής διακριτοποίησης, είναι ότι οι διαστάσεις του κάθε κυττάρου θα πρέπει να είναι, σύμφωνα με το κριτήριο δειγματοληψίας του Nyquist, μικρότερες από το μισό του ελάχιστου μήκους κύματος, για το οποίο επιθυμούνται ακριβή αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να πραγματοποιηθεί επαρκής δειγματοληψία της χωρικής πληροφορίας του πεδίου σε κάθε χρονική στιγμή, απαιτείται η λήψη δύο τουλάχιστο δειγμάτων ανά μήκος κύματος.

Η επιλογή μίας τέτοιας διακριτοποίησης, βέβαια, δεν είναι δυνατό να εφαρμοστεί στην πράξη, γιατί δεν μπορεί να προβλεφθεί εκ των προτέρων με ακρίβεια το ελάχιστο αριθμητικό μήκος κύματος του προβλήματος. Για το λόγο αυτό, η συνήθης πρακτική είναι να επιλέγονται οι διαστάσεις του κάθε κυττάρου πολύ μικρότερες από το μήκος κύματος για το οποίο επιθυμούνται ακριβή αποτελέσματα. Συνήθως, επιλέγεται το μήκος της κάθε πλευράς του κυττάρου ίσο με το 1/10 του ελάχιστου μήκους κύματος, για το οποίο επιθυμούνται ακριβή αποτελέσματα. Για ορισμένες, βέβαια, περιπτώσεις, στις οποίες απαιτούνται ακόμα ακριβέστερα αποτελέσματα, είναι δυνατό να επιλεγεί λόγος 1/20 ή και ακόμα μικρότερος, με μόνο τίμημα την αύξηση των απαιτήσεων σε μνήμη.

Τα κριτήρια με τα οποία πραγματοποιείται πρακτικά η επιλογή της χωρικής διακριτοποίησης παρουσιάζονται αναλυτικότερα στις ακόλουθες παραγράφους.

2.8.3.3.1. Χαρακτηριστικά των υλικών που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα

Επειδή η FDTD είναι ογκομετρική υπολογιστική μέθοδος, αν κάποια περιοχή του υπολογιστικού χώρου αποτελείται από ηλεκτρικά διαπερατό υλικό, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το μήκος κύματος στο υλικό αυτό, προκειμένου να προσδιοριστεί το μέγιστο επιτρεπτό μέγεθος του κυττάρου. Για προβλήματα στα οποία περιέχονται υλικά με διηλεκτρική σταθερά πολύ μεγαλύτερη της μονάδας, το μέγεθος του κυττάρου εντός αυτών των υλικών είναι κατά πολύ μικρότερο από αυτό που θα επιτρεπόταν να χρησιμοποιηθεί, αν στον υπολογιστικό χώρο υπήρχαν μόνο τέλει αγωγοί και κενό. Στην περίπτωση αυτή, αν χρησιμοποιηθεί ομοιόμορφο πλέγμα, ο συνολικός αριθμός των κυττάρων τα οποία περιγράφουν τη γεωμετρία, αυξάνει σημαντικά. Μία πιθανή αντιμετώπιση ενός τέτοιου προβλήματος είναι η χρησιμοποίηση ανομοιόμορφου πλέγματος, το οποίο θα είναι πυκνότερο μόνο στις περιοχές του υπολογιστικού χώρου στις οποίες υπάρχουν διηλεκτρικά υλικά.

2.8.3.3.2. Ικανοποιητική περιγραφή της γεωμετρίας

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος με την FDTD, θα πρέπει να ελέγχεται πάντα αν η επιλογή του μεγέθους του κυττάρου είναι τέτοια, ώστε να περιγράφονται ικανοποιητικά τα σημαντικά χαρακτηριστικά της γεωμετρίας.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η απαίτηση αυτή ικανοποιείται επιλέγοντας τις διαστάσεις του κυττάρου ίσες με το $1/10$ του ελάχιστου μήκους κύματος. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις στις οποίες συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας, μικρότερα του $\lambda/10$, αποτελούν χαρακτηριστικούς παράγοντες για τον καθορισμό της επιθυμητής συμπεριφοράς μίας διάταξης. Για παράδειγμα, κατά την προσομοίωση μίας κεραίας λεπτού αγωγού (*thin wire antenna*), μία μικρή αλλαγή στο πάχος του αγωγού από $\lambda/10$ σε $\lambda/20$ μεταβάλλει σημαντικά τα εξαγόμενα αποτελέσματα, όσον αφορά τον υπολογισμό της εμπέδησης της κεραίας.

2.8.3.3.3. Σφάλμα κλιμάκωσης (*staircase error*)

Ο υπολογιστικός χώρος είναι στην ουσία μία προσέγγιση του συνεχούς φυσικού χώρου, χρησιμοποιώντας κύτταρα του Yee. Λόγω του χαρακτηριστικού αυτού, οι ομαλές επιφάνειες μίας γεωμετρίας προσεγγίζονται από κλιμακωτές επιφάνειες, οι οποίες δημιουργούνται από τις έδρες των αντίστοιχων κυττάρων του Yee. Το χαρακτηριστικό αυτό εισάγει ένα σφάλμα στον υπολογισμό, το οποίο είναι γνωστό ως σφάλμα κλιμάκωσης (*staircase error*). Είναι προφανές ότι το σφάλμα αυτό μπορεί να μειωθεί, όταν επιλεγούν αρκετά μικρά κύτταρα, με αποτέλεσμα η διακριτοποιημένη επιφάνεια να προσεγγίζει όσο το δυνατόν περισσότερο την ομαλή φυσική επιφάνεια.

2.8.3.4. Επιλογή του χρονικού βήματος – θέματα αστάθειας του αλγόριθμου

Εφόσον έχει επιλεγεί το χωρικό βήμα, το επόμενο σημαντικό θέμα στην εφαρμογή της μεθόδου είναι η επιλογή του χρονικού βήματος. Η επιλογή του χρονικού βήματος προκύπτει, χρησιμοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας του Courant [152]. Προκειμένου να γίνει κατανοητό το κριτήριο ευστάθειας του Courant, θεωρούμε ένα επίπεδο κύμα, το οποίο οδεύει εντός του υπολογιστικού πλέγματος. Μέσα σε ένα χρονικό βήμα της μεθόδου, τα πεδία δε θα πρέπει να οδεύσουν σε περισσότερα του ενός κύτταρα, γιατί από τη μαθηματική διατύπωση της μεθόδου προκύπτει ότι σε ένα χρονικό βήμα τα πεδία μπορούν να οδεύσουν μόνο στα άμεσα γειτονικά κύτταρα. Για τον προσδιορισμό του άνω ορίου του χρονικού βήματος, επιλέγεται μία κατεύθυνση όδευσης του επίπεδου κύματος κάθετη στα επίπεδα του πλέγματος, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η ταχύτερη δυνατή όδευση του κύματος μεταξύ των κόμβων του πλέγματος. Έστω ένα ομοιόμορφο πλέγμα d διαστάσεων (όπου $d=1,2,3$), στο οποίο οι πλευρές του κυττάρου είναι ίσες με d . Αν η μέγιστη ταχύτητα όδευσης των πεδίων στο πλέγμα είναι ίση με v (συνήθως η ταχύτητα του φωτός στο κενό), προκειμένου ο αλγόριθμος να είναι ευσταθής, θα πρέπει να ισχύει

$$v\Delta t \leq \frac{d}{\sqrt{d}} \quad (2.166)$$

Πιο γενικά, για την περίπτωση ενός πλέγματος τριών διαστάσεων, θα πρέπει να ισχύει

$$v\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (2.167)$$

Η πείρα έχει αποδείξει, ότι για τον υπολογισμό του χρονικού βήματος χρησιμοποιώντας την ισότητα στις παραπάνω σχέσεις, επιτυγχάνονται ακριβή αποτελέσματα.

2.8.3.5 Ανοικτά προβλήματα – Απορροφητικές οριακές συνθήκες

Όπως έχει ήδη συζητηθεί και στην περίπτωση μοντελοποίησης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, για να επιλυθούν με την FDTD προβλήματα, με περιοχές απεριόριστες έκτασης, όπως είναι τα προβλήματα σκέδασης και ακτινοβολίας, πρέπει να τεθούν κάποια τεχνητά όρια στον υπολογιστικό χώρο και να εφαρμοστούν οι κατάλληλες Απορροφητικές Οριακές Συνθήκες (Absorbing Boundary Conditions – ABCs) στα όρια αυτά, προκειμένου να αναιρεθεί η επίδραση των τεχνητών αυτών ορίων και να προσομοιωθεί με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια η όδευση των κυμάτων εκτός του υπολογιστικού χώρου.

Έχουν προταθεί κατά καιρούς διάφοροι τύποι ΑΟΣ [120], [152-155] και κάθε ένας από αυτούς έχει τα δικά του πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις δύο κυριότερες ΑΟΣ, την απορροφητική οριακή συνθήκη Mur [152] και την τεχνική τέλεια προσαρμοσμένου στρώματος (Perfectly Matched Layer – PML) [154].

Μάλιστα η PML περιγράφεται σε ειδική παράγραφο (2.8.4), μετά το τέλος της παρούσης παραγράφου 2.8.3, γιατί εφαρμόζεται, τόσο στην FDTD, όσο στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων στο πεδίο της συχνότητας.

2.8.3.5.1. Η απορροφητική οριακή συνθήκη του Mur

Η ΑΟΣ Mur στηρίζεται στις μονόδρομες κυματικές εξισώσεις των Engquist-Majda [120]. Ας θεωρήσουμε την κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις και σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (2.168)$$

όπου U είναι η τιμή μίας συνιστώσας πεδίου και c είναι η φασική ταχύτητα του φωτός στο κενό. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί με πιο συμπτυκνωμένο τρόπο με τη μορφή

$$LU = 0 \quad (2.169)$$

όπου ο τελεστής L μπορεί να οριστεί ως

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = D_x^2 + D_y^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2 \quad (2.170)$$

Ο παραπάνω τελεστής μπορεί να διαχωριστεί σε δύο παράγοντες L^+ και L^- , έτσι ώστε $L = L^+ L^-$.

$$L^+ = D_x + \frac{D_t}{c} \sqrt{1 - S^2} \quad (2.171)$$

και

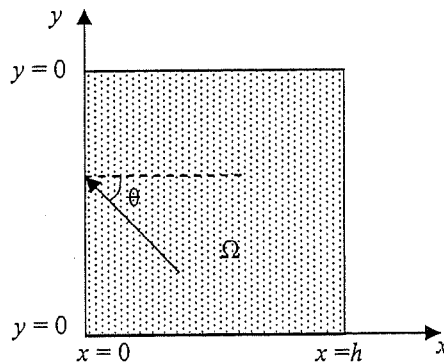
$$L^- = D_x - \frac{D_t}{c} \sqrt{1 - S^2} \quad (2.172)$$

όπου $S = \frac{D_y}{(D_t/c)}$.

Οι Engquist και Majda έδειξαν ότι, στο αριστερό όριο του πλέγματος $x=0$, η εφαρμογή του L^- στην κυματική συνάρτηση U απορροφά ένα επίπεδο κύμα το οποίο οδεύει προς το όριο με οποιαδήποτε γωνία θ (σχήμα 2.17). Ο τελεστής L^+ εκτελεί την ίδια λειτουργία για το όριο στο δεξιό μέρος του πλέγματος $x=h$. Έτσι, ισχύει:

$$L^- U = 0 \text{ για } x=0 \quad (2.173)$$

$$L^+ U = 0 \text{ για } x=h \quad (2.174)$$



Σχήμα 2.17: Η εφαρμογή των απορροφητικών οριακών συνθηκών για υπολογιστικό χώρο δύο διαστάσεων.

Οι τελεστές L^+ και L^- , λόγω της μη γραμμικότητάς τους (ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας), δε μπορούν να εφαρμοστούν αριθμητικά. Είναι όμως

δυνατό να αναπτυχθεί η τετραγωνική ρίζα σε σειρά Taylor και κρατώντας τον επιθυμητό αριθμό όρων της σειράς να προκύψουν τελεστές, οι οποίοι δεν είναι μεν ακριβείς, με την έννοια του ότι δε θα απορροφούν τα προσπίπτοντα στο όριο κύματα για κάθε γωνία πρόσπτωσης, αλλά θα μπορούν να εφαρμοστούν αριθμητικά. Όσο μεγαλύτερος δε είναι ο αριθμός των όρων της σειράς Taylor, τόσο καλύτερα ο γραμμικός τελεστής, που προκύπτει, θα προσεγγίζει τον ακριβή και τόσο μεγαλύτερο θα είναι το εύρος των γωνιών πρόσπτωσης, για τις οποίες ο τελεστής θα απορροφά τα προσπίπτοντα κύματα. Η χρήση, βέβαια, περισσότερων όρων της σειράς έχει τίμημα στην αύξηση της πολυπλοκότητας της ΑΟΣ, με αποτέλεσμα να είναι δυσκολότερη η υλοποίησή της προγραμματιστικά.

Η προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας με ακρίβεια πρώτης τάξης δίνεται από τη σχέση

$$\sqrt{1-S^2} = 1 \quad (2.175)$$

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή του S θεωρείται πολύ μικρή. Η φυσική εξήγηση μίας τέτοιας παραδοχής αντιστοιχεί στο ότι το κύμα προσπίπτει στο τεχνητό όριο $x=0$ με γωνία θ πάρα πολύ μικρή ($\theta = 0$). Με την προσέγγιση αυτή, ο τελεστής L^- γίνεται $L^- \sim D_x - \frac{D_t}{c}$ και η μερική διαφορική εξίσωση στο όριο $x=0$ γίνεται

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (2.176)$$

Επομένως, αν η συνάρτηση U είναι της μορφής $U = f(x + c \cdot t)$, η παραπάνω διαφορική εξίσωση ικανοποιείται ακριβώς. Δηλαδή, η παραπάνω ΑΟΣ απορροφά τέλεια μόνον τα επίπεδα κύματα, που προσπίπτουν στο όριο $x=0$, με γωνία πρόσπτωσης $\theta=0$. Βέβαια, ένας τέτοιος τελεστής δεν είναι πρακτικός για τα περισσότερα προβλήματα σκέδασης.

Η προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας με ακρίβεια δεύτερης τάξης είναι

$$\sqrt{1-S^2} = 1 - \frac{1}{2} S^2 \quad (2.177)$$

Η προσέγγιση αυτή είναι πιο ακριβής για μεγαλύτερο εύρος γωνιών πρόσπτωσης γύρω από τη $\theta=0$. Στην περίπτωση αυτή, ο τελεστής L^- γίνεται $L^- = D_x - \frac{D_t}{c} + \frac{c}{2} \frac{D_y^2}{D_t}$ και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (2.178)$$

Η ίδια διαδικασία εκτελείται για τον τελεστή L^* , προκειμένου να εξαχθεί η διαφορική εξίσωση για το όριο $x=h$. Παρόμοιες εκφράσεις μπορούν να εξαχθούν και για τα υπόλοιπα όρια του υπολογιστικού χώρου $y=0$ και $y=h$. Οι εκφράσεις για τα υπόλοιπα όρια είναι.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{για } x=h \quad (2.179)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad \text{για } y=0 \quad (2.180)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad \text{για } y=h \quad (2.181)$$

Ο Μιτ υλοποίησε τις απορροφητικές οριακές συνθήκες με βάση τις παραπάνω εξισώσεις, χρησιμοποιώντας το σχήμα διαφορών δεύτερης τάξης. Για λόγους απλότητας, θα παρουσιαστεί μόνον η διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης, που αντιστοιχεί στο όριο $x=0$. Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται κατά τη διακριτοποίηση και των υπόλοιπων διαφορικών εξισώσεων. Οι μερικές παράγωγοι στη διαφορική εξίσωση εκφράζονται ως κεντρικές διαφορές γύρω από ένα βοηθητικό σημείο $(3/2, j)$, όπου ο δείκτης j αναπαριστά τη συντεταγμένη κατά μήκος του άξονα y στο διακριτό χώρο (σχήμα 2.18). Οι διακριτοποιημένες αυτές εκφράσεις είναι.

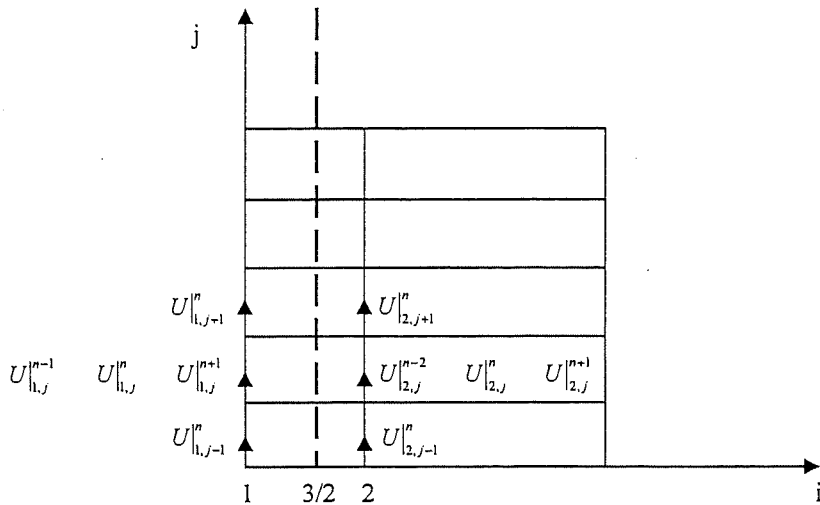
$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right|_{3/2, j}^n = \frac{1}{2\Delta t} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{3/2, j}^{n+1} - \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{3/2, j}^{n-1} \right) = \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\frac{U_{2, j}^{n+1} - U_{1, j}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{U_{2, j}^{n-1} - U_{1, j}^{n-1}}{\Delta x} \right) \right] \quad (2.182)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{3/2, j}^n = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{1, j}^n + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{2, j}^n \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_{1, j}^{n+1} - 2U_{1, j}^n + U_{1, j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) + \left(\frac{U_{2, j}^{n+1} - 2U_{2, j}^n + U_{2, j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) \right] \quad (2.183)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{3/2, j}^n &= \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{1, j}^n + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{2, j}^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_{1, j+1}^n - 2U_{1, j}^n + U_{1, j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) + \left(\frac{U_{2, j+1}^n - 2U_{2, j}^n + U_{2, j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right] \quad (2.184) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις διακριτοποιημένες εκφράσεις των μερικών παραγώγων στη διαφορική εξίσωση, προκύπτει η εξίσωση ενημέρωσης του U για το όριο $x=0$,

$$\begin{aligned}
 U_{1,j}^{n+1} = & -U_{1,j}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U_{2,j}^{n+1} + U_{1,j}^{n+1}) + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U_{1,j}^n + U_{2,j}^n) + \\
 & + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \left(\begin{aligned} & U_{1,j+1}^n - 2U_{1,j}^n + U_{1,j-1}^n + \\ & U_{2,j+1}^n - 2U_{2,j}^n + U_{2,j-1}^n \end{aligned} \right) \quad (2.185)
 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.18: Οι θέσεις των συνιστωσών των πεδίων κατά την εφαρμογή της ΑΟΣ Mur δεύτερης τάξης.

Το βασικό πλεονέκτημα της ΑΟΣ Mur είναι η ευκολία στην υλοποίηση, εφόσον κατά την εφαρμογή της μεταβάλλεται μόνον ο τρόπος ενημέρωσης των συνιστωσών στα όρια του πλέγματος. Βέβαια, όπως προαναφέρθηκε, η ΑΟΣ έχει την ικανότητα απορρόφησης των επίπεδων κυμάτων σε ένα εύρος γύρω από τη γωνία $\theta=0$. Το χαρακτηριστικό αυτό θέτει περιορισμούς κατά την εφαρμογή της ΑΟΣ σε ανοικτά προβλήματα. Ο σημαντικότερος περιορισμός είναι το ότι το όριο του υπολογιστικού χώρου θα πρέπει να τοποθετείται σε ικανοποιητική απόσταση από τις επιφάνειες της διάταξης που προσομοιώνεται, καθότι μόνο με αυτό τον τρόπο μπορεί να εξασφαλιστεί ότι, τα προσπίπτοντα στις οριακές επιφάνειες κύματα είναι επίπεδα και μάλιστα προσπίπτουν σε αυτές με γωνίες πολύ κοντά στη $\theta=0$. Βέβαια, η τοποθέτηση του ορίου σε κάποια απόσταση από τη διάταξη έχει ως μειονέκτημα την αύξηση της απαιτούμενης μνήμης για την επίλυση ενός προβλήματος.

2.8.3.6. Υπολογιστικές απαιτήσεις του αλγορίθμου

Κλείνοντας την παράγραφο 2.8.3, είναι σκόπιμο να γίνει μία σύντομη αναφορά στις υπολογιστικές απαιτήσεις του αλγορίθμου της Μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου. Κατά την προσομοίωση ενός προβλήματος σε κάποιο συγκεκριμένο υπολογιστή, θα πρέπει να είναι γνωστές οι απαιτήσεις του προβλήματος σε υπολογιστικούς πόρους, έτσι ώστε να μπορεί να κριθεί το αν οι πόροι του συγκεκριμένου υπολογιστή επαρκούν για την επίλυση του προβλήματος, αλλά και να εκτιμηθεί το χρονικό διάστημα της προσομοίωσης. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν κάποιες βασικές σχέσεις, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί κανείς να εκτιμήσει τις υπολογιστικές απαιτήσεις του αλγορίθμου.

Η σημαντικότερη παράμετρος για τον καθορισμό των υπολογιστικών απαιτήσεων είναι ο συνολικός αριθμός κυττάρων, από τα οποία απαρτίζεται ο υπολογιστικός χώρος. Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, ο αριθμός αυτός αυξάνει, όσο μικραίνουν οι διαστάσεις του κυττάρου, σε σχέση με το μήκος κύματος, για το οποίο επιθυμείται η επίλυση του προβλήματος. Αν ο συνολικός αριθμός των κυττάρων είναι N και η πληροφορία για τα υλικά του προβλήματος είναι αποθηκευμένη σε έξι πίνακες, μεγέθους 1 byte ο καθένας (ένας πίνακας για κάθε συνιστώσα), η αποθηκευτική απαίτηση για υπολογισμούς απλής ακρίβειας, μετρούμενη σε bytes, θα είναι

$$\text{αποθηκευτική απαίτηση} = N \times \left(6 \frac{\text{συνιστώσες}}{\text{κύτταρο}} \times 4 \frac{\text{bytes}}{\text{συνιστώσα}} + 6 \frac{\text{πίνακες}}{\text{κύτταρο}} \times 1 \frac{\text{byte}}{\text{πίνακας}} \right)$$

Είναι, επίσης, δυνατό να εκτιμηθεί το υπολογιστικό κόστος του αλγορίθμου με βάση το συνολικό αριθμό πράξεων κινητής υποδιαστολής (floating point operations – FLOPS), όπως

$$\text{πράξεις} = N \times 6 \frac{\text{συνιστώσες}}{\text{κύτταρο}} \times 10 \frac{\text{πράξεις}}{\text{συνιστώσα}} \times T$$

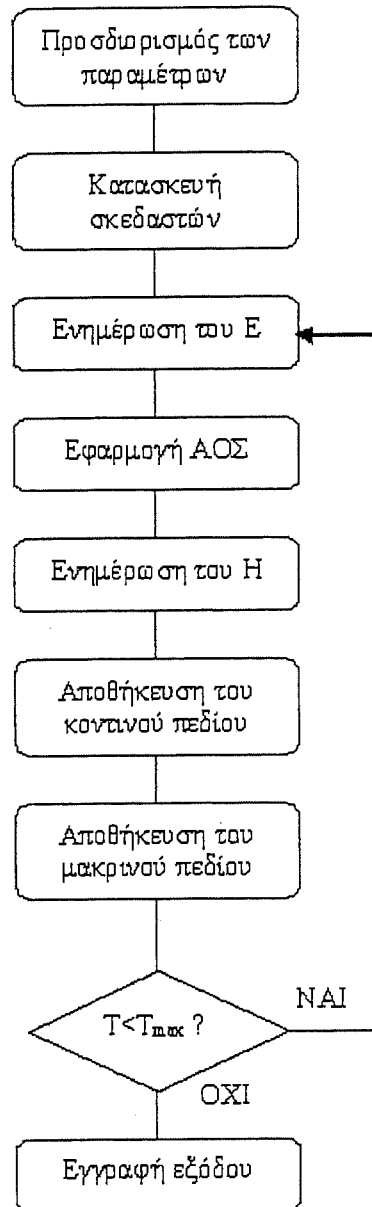
όπου T είναι ο συνολικός αριθμός των χρονικών βημάτων, ο οποίος για κυβικό πλέγμα [156] μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί ως

$$T = 10 \times \sqrt{3}N$$

Άρα τελικά, ο συνολικός αριθμός των πράξεων δίνεται από τη σχέση

$$\text{πράξεις} = 10\sqrt{3}N^{4/3} \times 6 \frac{\text{συνιστώσες}}{\text{κύτταρο}} \times 10 \frac{\text{πράξεις}}{\text{συνιστώσα}}$$

Πρέπει, τέλος, να σημειωθεί ότι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου περιλαμβάνει ακόμα και σημαντικό αριθμό επιπρόσθετων υπολογισμών για τη μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων (για παράδειγμα τον προσδιορισμό των μακρινών πεδίων μίας κεραίας με βάση τις τιμές των συνιστωσών των πεδίων, την εξαγωγή της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος με βάση τα δεδομένα στο πεδίο του χρόνου κλπ). Γενικά, όμως, οι σχέσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δίνουν μία γενική εικόνα για τις υπολογιστικές απαιτήσεις του αλγορίθμου. Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου φαίνεται στο Σχήμα 2.19.



Σχήμα 2.19: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου Μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου.

2.8.4. Η τεχνική PML

Η έννοια του Τέλεια Προσαρμοσμένου Στρώματος (Perfectly Matched Layer) εισήχθη πρόσφατα από τον J. P. Berenger[154], με σκοπό την ανάπτυξη μιας

απορροφητικής οριακής συνθήκης (ΑΟΣ) για τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου.

Η βασική στρατηγική της προσέγγισης του Τέλεια Προσαρμοσμένου Στρώματος (PML) είναι η σύνθεση ενός χώρου με τέτοιες ιδιότητες ώστε, ένα επίπεδο κύμα, προσπίπτον πάνω στην επιφάνειά του κατά αυθαίρετη γωνία, να μεταδίδεται εξ' ολοκλήρου στην περιοχή του στρώματος, χωρίς καμμία απολύτως ανάκλαση στον ελεύθερο χώρο.

Εκτός από την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου, η τεχνική PML έχει εφαρμοστεί με επιτυχία και στα πεπερασμένα στοιχεία στο πεδίο των συχνοτήτων.

Στην αρχική διατύπωση του Berenger, η τεχνική βασίζεται στο διαχωρισμό κάθε πεδιακής συνιστώσας σε δύο υποσυνιστώσες, οι οποίες πολλαπλασιάζονται με διαφορετικές συντακτικές παραμέτρους. Η αρχική αυτή μορφή του PML στο πεδίο του χρόνου φαίνεται στις σχέσεις, που ακολουθούν

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} &= -\frac{\partial (E_{xz} + E_{zy})}{\partial y} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} &= -\frac{\partial (E_{yx} + E_{zy})}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.186)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} &= -\frac{\partial (E_{xy} + E_{zx})}{\partial z} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} &= -\frac{\partial (E_{xy} + E_{zx})}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.187)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} &= -\frac{\partial (E_{yx} + E_{yz})}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} &= -\frac{\partial (E_{yx} + E_{yz})}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.188)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} &= -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} &= -\frac{\partial (H_{yx} + H_{yz})}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} &= -\frac{\partial (H_{xy} + H_{zx})}{\partial z} \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} &= -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.190)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = -\frac{\partial (H_{yx} + H_{yz})}{\partial x}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_y E_y = -\frac{\partial (H_x + H_z)}{\partial y} \quad (2.191)$$

Το γεγονός ότι, μετά το διαχωρισμό των πεδιακών συνιστωσών, οι προκύπτουσες υποσυνιστώσες ζυγίζονται με διαφορετικές συντακτικές παραμέτρους, εγείρει το ερώτημα, αν το PML μέσο μπορεί να περιγραφεί από ένα συμβατικό 3×3 ταυστή συντακτικών παραμέτρων. Για να ελέγξουμε το ενδεχόμενο αυτό, μπορούμε να απαλείψουμε όλες τις διαχωρισμένες πεδιακές συνιστώσες (H_x, E_y, \dots) από τις παραπάνω σχέσεις και να τις αντικαταστήσουμε με συμβατικές συνιστώσες (H_x, E_x, \dots) . Με τον τρόπο αυτό, παίρνουμε τις ακόλουθες αδιαχώριστες (unsplit) εξισώσεις PML

$$(j\omega\mu_0 + \sigma_1^*)H_x = -jk_z E_y + jk_y E_z + \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{j\omega\mu_0 + \sigma_2^*} jk_z E_y \quad (2.192)$$

$$(j\omega\mu_0 + \sigma_2^*)H_y = -jk_x E_z + jk_z E_x + \frac{\sigma_3^* - \sigma_2^*}{j\omega\mu_0 + \sigma_3^*} jk_x E_z \quad (2.193)$$

$$(j\omega\mu_0 + \sigma_3^*)H_z = -jk_y E_x + jk_x E_y + \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{j\omega\mu_0 + \sigma_1^*} jk_y E_x \quad (2.194)$$

$$(j\omega\varepsilon_0 + \sigma_1)E_x = -jk_y H_z + jk_z H_y - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j\omega\varepsilon_0 + \sigma_2} jk_z H_y \quad (2.195)$$

$$(j\omega\varepsilon_0 + \sigma_2)E_y = -jk_z H_x + jk_x H_z - \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{j\omega\varepsilon_0 + \sigma_3} jk_x H_z \quad (2.196)$$

$$(j\omega\varepsilon_0 + \sigma_3)E_z = -jk_x H_y + jk_y H_x - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{j\omega\varepsilon_0 + \sigma_1} jk_y H_x \quad (2.197)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, χρησιμοποιήσαμε για λόγους ευκολίας αναπαράσταση πεδίου συχνότητας, ενώ οι δείκτες 1, 2, 3 των ηλεκτρικών και μαγνητικών αγωγιμοτήτων (σ) συσχετίζονται με τις y -, z - και x - κατευθύνσεις αντίστοιχα (π.χ. $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_y$, $\sigma_2 \leftrightarrow \sigma_z$, $\sigma_3 \leftrightarrow \sigma_x$, κ.ο.κ.). Από τις σχέσεις αυτές είναι προφανές πως, το PML μέσο παύει να είναι παθητικό, ακόμα και όταν οι αγωγιμότητες είναι μη αρνητικές.

Για να έχουμε προσαρμογή σύνθετης αντίστασης στο PML μέσο, πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1^*}{\mu_0}, \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2^*}{\mu_0}, \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_3^*}{\mu_0} \quad (2.198)$$

Βιβλιογραφία

- [1]. H. C. Pocklington, "Electrical Oscillations in Wires", *Cambridge Phil. Soc. Proc.*, 9, 1897, pp. 324-332.
- [2]. R. F. Harrington, et al., "Computation of Laplacian potentials by an equivalent source method," *Proc. IEEE*, vol. 116, no. 10, Oct. 1969, pp. 1715-1720.
- [3]. S. M. Rao, et al., "A simple numerical procedure for static problems involving arbitrary-shaped surfaces", *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol. AP-27, no. 5, Sept. 1979, pp. 604-608.
- [4]. J. H. Richmond, "Scattering by an arbitrary array of parallel wires," *IEEE Trans. Micr. Th. Tech.*, vol. 116, no. 10, Oct. 1969, pp. 1715-1720.
- [5]. K. K. Mei, "On the integral equations of thin wire antennas," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol. AP-13, 1965, pp. 374-378.
- [6]. F. M. Landstorfer and R. F. Sacher, *Optimization of Wire Antennas*, Letchworth, UK: Research Studies Press, 1985, pp. 18-33.
- [7]. J. Perini and D. J. Buchanan, "Assessment of MOM techniques for shipboard applications," *IEEE Trans. Elect. Comp.*, vol. EMC-24, no. 1, Feb. 1982, pp. 32-39.
- [8]. A. W. Glisson and C. M. Butler, "Analysis of a wire antenna in the presence of a body of revolution," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol. AP-28, Sept. 1980, pp. 604-609.
- [9]. D. W. Kammler, "Calculation of characteristic admittance and coupling coefficients for strip transmission lines," *IEEE Trans. Micro. Tech.*, vol. MTT-16, no. 11, Nov. 1968, pp. 925-937.
- [10]. R. F. Harrington and J. R. Mautz, "A generalized network formulation for aperture problems," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol. AP-24, Nov. 1976, pp. 870-873.
- [11]. Special Issue on Effects of Electromagnetic Radiation, *IEEE Engr. Med. Biol. Mag.*, March 1987.
- [12]. R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York: MacMillan, 1968.

- [13]. O. Breinbjerg and D. I. Kaklamani, "The Electric Field Integral Equation and the Physical Theory of Diffraction in Scattering Analysis," *Applied Computational Electromagnetics: State of the Art and Future Trends*, NATO ASI Series, pp. 60-111, Berlin:Springer-Verlag, 2000.
- [14]. P. P. Silvester and G. Pelosi (eds.), *Finite Elements for Wave Problems*. New York: IEEE Press, 1994.
- [15]. I. Stakgold, *Boundary Value Problems for Mathematical Physics*. New York: Macmillan, 1967.
- [16]. F. Reza, *Linear Spaces in Engineering*. Waltham Massachusetts: Ginn, 1971.
- [17]. M. Mori, *The Finite Element Method and its Applications*. New York: Macmillan, 1986.
- [18]. C. V. Hafner, "On the design of numerical methods," *IEEE Antennas Propagat. Magazine*, vol. 35, no. 4, pp. 13-21, Aug. 1993.
- [19]. V. H. Rumsey, "Reaction concept in electromagnetic theory," *Phys. Rev.*, vol. 94, no. 6, pp. 1483-1491, Jun. 1954.
- [20]. R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. New York: MacMillan, 1968, pp 68-75.
- [21]. K. Mei and J. Van Bladel, "Low-frequency scattering by rectangular cylinders," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-11, pp. 52-56, Jan. 1963.
- [22]. M. G. Andreasen, "Scattering from parallel metallic cylinders with arbitrary cross sections," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-12, pp. 746-754, Nov. 1964.
- [23]. J. H. Richmond, "Digital computer solutions of the rigorous equations for scattering problems," *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 796-804, Aug. 1965.
- [24]. P. C. Waterman, "Matrix formulation of electromagnetic scattering," *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 805-812, Aug. 1965.
- [25]. R. F. Harrington, "Matrix methods for field problems," *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 2, pp. 136-149, Feb. 1967.

- [26]. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press, 1989, pp. 47-52.
- [27]. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1970, pp. 589-591.
- [28]. T. K. Sarkar, "A study of the various methods for computing electromagnetic field utilizing thin wire integral equations," *Radio Science*, vol. 18, no. 1, pp. 29-38, Jan.-Feb. 1983.
- [29]. G. C. Hsiao and R. E. Kleinman, "Mathematical Foundations for Error Estimation in Numerical Solutions of Integral Equations in Electromagnetics," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, no. 3, pp. 316-328, Mar. 1997.
- [30]. Kupradze V., *Method of integral equations in the theory of diffraction*, Moscow-Leningrad, 1935.
- [31]. Vekua I.N., "About metaharmonic functions", *Proceedings of Tbilisi Mathemat. Institute*, Acad. of Science, Georgia, vol. 12, 1943, pp. 105-174.
- [32]. Vekua I.N., *Reports of Academy of Science of USSR*, 1953 vol. 90, no. 5, p.715.
- [33]. Kupradze V., "Dynamical Problems in Elasticity", *Progress in Solid Mechanics* 3, Amsterdam, 1963.
- [34]. Kupradze V., "About approximate solution of mathematical physics problem", *Success of Mathematical Sciences*, Moscow.22. N2 1967, pp. 59-107.
- [35]. Vekua I. N., *New Methods for Solving Elliptic Equations*, translated from the Russian by D. E. Brown, John Wiley, New York, 1967.
- [36]. Barantsev R. G. and V. V. Kozachjck, *Mat. Mekh. Astron., Vestn. Leningrad. University*, vol. 7, no. 2, 1968, pp. 71-77.
- [37]. Kopaleishvili V. P. and R. S. Popovidi-Zaridze, 1972 *Radioeng. and Electr. Acad. of Sc. USSR Nauka*, vol. 27, no. 7, pp. 1374-1381.
- [38]. Kopaleishvili V. P. and R. S. Popovidi-Zaridze, 1972 *Radioeng. and Electr. Acad. of Sc. USSR Nauka*, vol. 27, no. 11, pp. 2432-2435.

- [39]. Popovidi-Zaridze R. S., D. D. Karkashadze and K. A. Mtiulishvili, "Solution of the diffraction problems on the complicate shape body by method of composition", *7th Allunion Symposium of Diffraction and Wave Propagation*, Moscow, 1977, vol. 3, pp. 83-85.
- [40]. Popovidi-Zaridze R. S and Tsverikmazashvili Z. S., "Numerical solution of diffraction problem by modified method of non-orthogonal series," *Journal of Applied Mathematics and Mathematical Physics*, Moscow, 1977. Translated from Russian by D. E. Brown, *Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz.*, vol. 17, no. 2, pp. 384-393, 1977.
- [41]. Popovidi-Zaridze R., D. Karkashadze, G. Ahvlediani and J. Khatiashvili, "Investigation of Possibilities of the Method of Auxiliary Sources in Solution of two-dimensional Electrodynamics Problems," *Radiotechnics and Electronics*, vol. 22, no. 2, 1978.
- [42]. Popovidi-Zaridze R. S., D. D. Karkashadze and J. Khatiashvili, 1981 *Radioeng. and Electr. Acad. of Sc USSR Nauka*, vol. 36, no. 2, pp. 254-262.
- [43]. Popovidi-Zaridze R. and G. Talakvadze, "Numerical Investigation of Resonant Properties of Metal-Dialectical Periodical Structures," Tbilisi State University, Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, 1983.
- [44]. Popovidi-Zaridze R., "The Method of Auxiliary Sources," *Lecture Cycles*, Academy of Science, Moscow, 1984.
- [45]. Zaridze R. and J. Khatiashvili, "Investigation of Resonant Properties of Some Open Systems," Tbilisi State University, Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, 1984.
- [46]. Popovidi-Zaridze R. S., D. D. Karkashadze and J. Khatiashvili, *Method of Auxiliary Sources for investigation of along-regular waveguides*, Tbilisi State University, 1985, 150 p.
- [47]. Apeltsin V. F., and A. G. Kyurktchan, "Rayleigh hypothesis and analytical properties of wave fields", *Radioengineering and Electronics*, vol. 30, no. 2, pp. 193-210, 1985.
- [48]. Zaridze R. S., D. D. Karkashadze, "The Method of Auxiliary Sources in Applied Electrodynamics", *Proceedings of the URSI Symposium*, Budapest, Hungary, 1986, pp. 104-106.

- [49]. Kyurkchan A. G, 1986, Radioeng. and Electr. Acad. of Sc. USSR Nauka, vol. 31, no. 7, pp. 1294-1303.
- [50]. Zaridze R. and D Karkashadze, "The Method of Auxiliary Sources and wave field singularities", *Lecture Cycles*, University of Kazan, 1988.
- [51]. Eremin Y. A., O. A. Lebedev and A. G. Sveshnikov, 1988 Radioeng. and Electr. Acad. of Sc. USSR Nauka, vol. 33, no. 10, pp. 2076-2083.
- [52]. Zaridze R., G. Lomidze and L. Dolidze, "Diffraction on a Dielectric Body Near the Surface of Division of Two Dielectric Mediums", Tbilisi State University Publisher, Tbilisi, 1989.
- [53]. Petit R., "The Method of Fictitious Sources in EM Diffraction", *Proceedings of MMET*, URSI, Kharkov, Ukraine, 1994, pp. 302-314.
- [54]. Jobava R. G., R. S. Zaridze, D. D. Karkashadze and Ph. I. Shubitidze, "Development of the Method of Auxiliary Sources for Scattering Problems in Time Domain", *Proceedings of the XXV-th General Assembly of International Union of Radio Science (URSI)*, Lille, France, August 28-September 5, 1996, pp. 108.
- [55]. Jobava R., R. Zaridze , D. Karkashadze, G. Bit-Babik and Ph. Shubitidze, "The Method of Auxiliary Sources for Two Dimensional Time Domain Scattering Problems", *Proceedings of the Trans Black Sea Region Symposium on Applied Electromagnetism*, Metsovo, Epirus, Greece, 17-19 April 1996, p. DISC 4.
- [56]. Zaridze R., G. Bit-babik, K. Tavzarashvili, "Analysis of the Scattered Field Singularities for Optimizing the Inverse Problems Solution", *Proceedings of International Seminar/Workshop organized by Ukraine MTT/ED/AP IEEE chapter "Numerical Solution of Direct and Inverse Problems of the Electromagnetic and Acoustic Waves Theory (DIPED-97)*, Lviv, Ukraine, Sept. 15-17, 1997, pp. 20-22 (ISBN 966-02-0296-2).
- [57]. Zaridze R. S., G. Bit-Banik, D. Karkasbadze, R. Jobava, D. Economou and N. Uzunoglu, *The Method of Auxiliary Sources (MAS): Solution of Propagation, Diffraction and Inverse Problems Using MAS*, Trans Black Sea Region Union of Applied Electrodynamics (BSUAE), Tbilisi -Athens, 1998.

- [58]. Zaridze R. S., R. Jobava, G. Bit-Banik, D. Karkasbadze, D. P. Economou and N. K. Uzunoglu, "The Method of Auxiliary Sources and Scattered Field Singularities (Caustics)", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 12, pp. 1491-1507, 1998.
- [59]. Zaridze R. S., G. S. Bit-Banik, D. P. Economou and N. K. Uzunoglu, "Applying the Method of Auxiliary Sources on Large Scale and Complex Structures", *Proceedings of the Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 1998)*, Nantes, France, 13-17 July 1998, p. 924.
- [60]. Zaridze R. S., D. P. Economou, G. Bit-Banik, D. I. Kaklamani and N. K. Uzunoglu, "A Microwave Holographic Imaging Technique Based on the Method of Auxiliary Sources", *Proceedings of the Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 1998)*, Nantes, France, 13-17 July 1998, p. 924.
- [61]. Shubitidze P., R. Zaridze, D. P. Economou, D. I. Kaklamani and N. K. Uzunoglu, "The Method of Auxiliary Sources in Solving Cylindrically Shaped Conformal Antennas", *1999 IEEE Antennas and Propagation Society (AP-S) International Symposium Digest*, Orlando, Florida, July 11-16, 1999, pp. 870-873
- [62]. Anastassiu H. T., V. V. Petrovic, D. I. Kaklamani and N. K. Uzunoglu, "Analysis of Electromagnetic Scattering from Jet Engine Inlets Using the Method of Auxiliary Sources (MAS)", *List of Abstracts, 7th International Conference on Advances in Communications and Control (COMCON7)*, Athens, Greece, June 28 - July 2, 1999, p. 2, Proceedings of the 7th International Conference on Advances in Communications and Control (COMCON7), Athens, Greece, June 28 - July 2, 1999, pp. 217-226.
- [63]. Anastassiu H. T., D. I. Kaklamani, D. P. Economou and O. Breinbjerg, "Electromagnetic Scattering Analysis of Coated Conductors with Edges Using the Method of Auxiliary Sources (MAS) in Conjunction with the Standard Impedance Boundary Condition (SIBC)", to appear in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-50, no. 1, pp. 59-66, 2002.
- [64]. Economou D. P., D. I. Kaklamani, R. Zaridze, V. Kouloulis, I. G. Tigelis and N. K. Uzunoglu, "A Hybrid Method of Moments/Method of Auxiliary Sources Technique in Solving Complex Electromagnetic Structures", *Proceedings of the International Conference on Electromagnetics in Advanced*

- Applications (ICEAA 97)*, Torino, Italy, Sept. 15-18 1997, pp. 11-14.
- [65]. Economou D. P., D. I. Kaklamani, N. K. Uzunoglu and R. Zaridze, "Analysis of High Density Integrated Circuit Packages Using a Hybrid Integral Equation Technique", *Proceedings of the URSI International Symposium on Electromagnetic Theory*, Thessaloniki, Greece, 25-28 May 1998, pp. 668-670.
- [66]. Economou D. P., D. I. Kaklamani and N. K. Uzunoglu, "Electromagnetic Analysis of Conformal Array Elements Using a Hybrid Method of Moments / Method of Auxiliary Sources (MoM/MAS) Technique", *Proceedings of the COST 260 Workshop on Smart Antenna Design and Technology*, Dubrovnik, Croatia, 11-12 December 1997, pp. 1.1-1.7.
- [67]. Economou D. P., A. Marsh and D. I. Kaklamani, "P(MoM/MAS): An Interactive Environment, Coupling WWW Technology and Parallel Processing, to Solve Large Size Electromagnetic Problems", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 41, no. 1, pp. 130-137, Febr. 1999.
- [68]. Economou D. P., D. I. Kaklamani and N. K. Uzunoglu, "Solution of Three-Dimensional Electromagnetic Scattering Problems via a Hybrid Method of Moments / Method of Auxiliary Sources (MoM/MAS) Technique", *Journal of Applied Electromagnetism*, Vol. 3, No. 1, pp. 11-24, May 2000.
- [69]. Shubitidze P., D. I. Kaklamani, H. T. Anastassiou, D. P. Economou, D. Karkashadze, R. Zaridze, and N. K. Uzunoglu, "Application of the Method of Auxiliary Sources to Three Dimensional Open Structures", *Proceedings of the 15th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications (ICECOM '99)*, Dubrovnik, Croatia, October 11-13, 1999, pp. 60-63.
- [70]. Shubitidze P., D. I. Kaklamani and H. T. Anastassiou, "Modified Method of Auxiliary Sources Applied to the Analysis of Planar and Cylindrically Shaped Microstrip Antennas", *Proceedings of the International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA99)*, Torino, Italy, September 13-17, 1999, pp. 375-378.
- [71]. Shubitidze P., D. I. Kaklamani and H. T. Anastassiou, "Analysis of Planar and Cylindrically Shaped Patch Antennas via a Novel Numerical Technique", *Proceedings of the 2nd Cost 260*

Workshop on Smart Antenna Design and Technology, Aveiro, Portugal, 3-5 November 1999, pp. 39-44.

- [72]. Kaklamani D. I., H. T. Anastassiou and P. Shubitidze, "Analysis of Conformal Patch Arrays via a Modified Method of Auxiliary Sources (MMAS)", *Abstract book of the Millennium Conference on Antennas and Propagation*, Davos, Switzerland, 9-14 April 2000, p. 292, cd-ROM: Proceedings of the Millennium Conference on Antennas and Propagation (AP2000), Davos, Switzerland, April 9-14, 2000 (4 pages).
- [73]. Leviatan Y. and A. Boag, "Analysis of Electromagnetic Scattering from Dielectric Cylinders Using a Multifilament Current Model", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, no. 10, pp. 1119-1127, 1987.
- [74]. Leviatan Y., A. Boag and A. Boag, "Analysis of TE Scattering from Dielectric Cylinders Using a Multifilament Magnetic Current Model", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 36, no. 7, pp. 1026-1031, 1988.
- [75]. Leviatan Y., A. Boag and A. Boag, "Analysis of Electromagnetic Scattering from Dielectrically Coated Conducting Cylinders Using a Multifilament Current Model", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 36, no. 11, pp. 1602-1607, 1988.
- [76]. Leviatan Y., A. Boag and A. Boag, "Generalized Formulations for Electromagnetic Scattering from Perfectly Conducting and Homogeneous Material Bodies - Theory and Numerical Solution", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 36, no. 12, pp. 1722-1734, 1988.
- [77]. Eisler S. and Y. Leviatan, "Analysis of Electromagnetic Scattering from Metallic and Penetrable Cylinders with Edges Using a Multifilament Current Model", *IEEE Proceedings*, vol. 136, Pt. H, no. 6, pp. 431-438, Dec. 1989.
- [78]. Leviatan Y., "Analytic Continuation Considerations when Using Generalized Formulations for Scattering Problems", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 38, no. 8, pp. 1259-1263, 1990.
- [79]. Tal J. and Y. Leviatan, "Inverse Scattering Analysis for Perfectly Conducting Cylinders Using a Multifilament Current Method", *Inverse Problems*, vol. 6, pp. 1065-1074, 1990.

- [80]. Leviatan Y., A. Boag and A. Boag, "Analysis of Electromagnetic Scattering Using a Current Model Method", *Computer Physics Communications*, vol. 68, pp. 331-345, 1991.
- [81]. Kang T.-W. and H.-T. Kim, "Basis Functions Considerations for the Method of Moments Using the Fictitious Current Model", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, no. 6, pp. 1118-1120, 1999.
- [82]. Nishimura M., S. Takamatsu and H. Shigesawa, "A Numerical Analysis of Electromagnetic Scattering of Perfect Conducting Cylinders by Means of Discrete Singularity Method Improved by Optimization Process", *Electronics and Communications in Japan*, vol. 67-B, no. 5, pp. 552-558, 1984.
- [83]. Tsuji M., H. Shigesawa and M. Nishimura, "Theoretical and Experimental Study of Three Dimensional Scattering Problems", *IEICE Transactions*, vol. E 74, no. 9, pp. 2848-2854, Sept. 1991.
- [84]. Tsuji M. and H. Shigesawa, "Scattering from Perfect-Conducting Cylinders of Finite Length: Calculations by Means of Multiple Equivalent Dipoles and Experiments", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 8, pp. 471-488, 1994.
- [85]. Singer H., H. Steinbigler and P. Weiss, "A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields", *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, vol. PAS-93, pp. 1660-1668, 1974.
- [86]. Waterman P. C., "Scattering by dielectric obstacles", *Alta Freq.*, vol. 38, (speciale), pp. 348-352, 1969.
- [87]. Iskander M. F., A. Lakhtakia and C. H. Durney, "A New Procedure for Improving the Solution Stability and Extending the Frequency Range of the EBCM", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, no. 2, pp. 317-324, 1983.
- [88]. Lakhtakia A., V. K. Varadan and V. V. Varadan, "Iterative extended boundary condition method for scattering by objects of high aspect ratios", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 76, no. 3, pp. 906-912, 1984.
- [89]. Hafner C., *The Generalized Multipole Technique for Computational Electrodynamics*, Artech, Norwood, MA, 1990.
- [90]. Ludwig A.C., "The Generalized Multipole Technique", *Computer Physics Communications*, vol. 68, pp. 306-314, 1991.

- [91]. Ludwig A.C., "A New Technique for Numerical Electromagnetics", *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, pp. 40-41, Febr. 1989.
- [92]. Hafner C. and N. Kuster, "Computations of electromagnetic fields by the multiple multipole method (generalized multipole technique)", *Radio Science*, vol. 26, no. 1, pp. 291-297, 1991.
- [93]. Beshir K. I. and J. E. Richie, "On the Location and Number of Expansion Centers for the Generalized Multipole Technique", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, no. 2, pp. 177-180, 1996.
- [94]. Landesa L., F. Obelleiro and J. L. Rodriguez, "Inverse Scattering of Impenetrable Objects Using the Generalized Multipole Technique", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 18, no. 6, pp. 42889-432, August 20, 1998.
- [95]. Lin C.-Y. and Y.-W. Kiang, "Inverse Scattering for Conductors by the Equivalent Source Method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 3, pp. 310-316, 1996.
- [96]. Kaklamani D. I., "Infinite Constant Electric Line Source above an Electric Conducting Infinite Plane: A Discussion on the Location and Number of Auxiliary Sources", *Lecture notes, 48414 Applied Electromagnetic Theory F99*, Technical University of Denmark (DTU), Dept. of Electromagnetic Systems (EMI), February-March 1999, pp. 76-78.
- [97]. M.R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, pp.136-145.
- [98]. I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press Inc., 1980, pp. 851-991.
- [99]. P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [100]. R. L. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 5, pp. 1-23, 1943.
- [101]. P. P. Silvester, "Finite-element solution of momogenous waveguide problems," *Alta Frequenza*, vol. 38, pp. 313-317, 1969.

- [102].S. Ahmed and P. Daly, "Finite-element methods for inhomogenous waveguides," *Proc. IEEE*, vol. 116, no. 10, Oct. 1969, pp. 1661-1664.
- [103].Z. Csendes and P. Silvester, "Numerical solution of dielectric loaded waveguides: I-Finite-element analysis," *IEEE Trans. Micr. Theory Tech.*, vol. MTT-18, no. 12, Dec. 1970, pp. 1124-1131.
- [104].M. Hano, "Finite-element analysis of dielectric loaded waveguides," *IEEE Trans. Micr. Theory Tech.*, vol. MTT-32, no. 10, Dec. 1984, pp. 1275-1279.
- [105].M. Koshiba, et al., "Finite-element formulation in terms of the electric-field vector for electromagnetic waveguide problems," *IEEE Trans. Micr. Theory Tech.*, vol. MTT-33, no. 10, Oct. 1985, pp. 900-905.
- [106].M. Ikeuchi, et al., "Analysis of open-type dielectric waveguide problems," *IEEE Trans. Micr. Theory Tech.*, vol. MTT-29, no. 3, Oct. 1981, pp. 234-239.
- [107].N. Mabaya, et al., "Finite-element analysis of optical waveguides," *IEEE Trans. Micr. Theory Tech.*, vol. MTT-29, no. 6, Jun. 1981, pp. 600-605.
- [108].C. Yeh, et al., "Single model optical waveguides," *Appl. Optics*, vol. 18, no. 10, May 1979, pp. 1490-1504.
- [109].P. Daly, "Upper and lower bounds to the characteristic impedance of transmission lines using the finite element method," *Inter. J. Comp. Math. Elect. Electr. Engr. (COMPEL)*, vol. 3, no. 2, 1984, pp. 65-78.
- [110].A. Khebir, et al., "An absorbing boundary condition for quasi-TEM analysis of microwave transmission lines via the finite element method," *J. Elect. Waves Appl.*, vol. 4, no. 2, 1990, pp. 145-157.
- [111].R. L. Khan and G. I. Costache, "Finite element method applied to modeling crosstalk problems on printed circuit boards," *IEEE Trans. Elect. Comp.*, vol. 31, no. 1, Feb. 1989, pp. 5-15.
- [112].J. J. Barnes and R. J. Lomax, "Finite-element methods in semiconductor device simulation," *IEEE Trans. Elect. Dev.*, vol. ED-24, no. 8, Aug. 1977, pp. 1084-1089.

- [113]. T. Adachi, et al., "Two-dimensional semiconductor analysis using finite-element method," *IEEE Trans. Elect. Dev.*, vol. ED-26, no. 7, Jul. 1979, pp. 1026-1031.
- [114]. D. R. Lynch, K. D. Paulsen, and J. W. Strohbehn, "Finite element solution of Maxwell's equations for hyperthermia treatment planning," *J. Comput. Phys.*, vol. 58, pp. 246-269, 1985.
- [115]. K. D. Paulsen, D. R. Lynch, and J. W. Strohbehn, "Three-Dimensional finite, boundary, and hybrid Element solutions of the Maxwell equations for lossy dielectric media," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 36, no. 4, pp. 682-693, Apr. 1988.
- [116]. J. M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. New York: John Wiley, 1993.
- [117]. O. M. Ramahi, and R. Mittra, "Finite element analysis of dielectric scatterers using the absorbing boundary conditions," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 25, no. 4, pp. 3043-3045, Jul. 1989.
- [118]. C. R. I. Emsom, "Methods for the solution of open-boundary electromagnetic-field problems," *IEEE Proceedings-A*, vol. 135, no. 3, pp. 151-158, Mar. 1988.
- [119]. A. Bayliss, M. Gunzburger, and E. Turkel, "Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 42, no. 2, pp. 430-451, Apr. 1982.
- [120]. B. Engquist and A. Madja, "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves," *Math. Comput.*, vol. 31, pp. 629-651, Jul. 1977.
- [121]. J. P. Webb and V. N. Kannelopoulos, "Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation," *Microwave and Opt. Tech. Lett.*, vol. 2, no. 10, pp. 370-372, Oct. 1989.
- [122]. A. Chatterjee, J. M. Jin, and J. L. Volakis, "Edge-based finite elements and vector ABC's applied to 3-D scattering," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, no. 2, pp. 221-226, Feb. 1993.
- [123]. V. N. Kannelopoulos and J. P. Webb, "The importance of the surface divergence term in the finite element vector absorbing boundary condition method," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 43, no. 9, pp. 2168-2170, Sep. 1995.

- [124].A. Konrad, "Vector variational formulation of electromagnetic fields in anisotropic media," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 24, pp. 553-559, 1976.
- [125].M. Hara, T. Wada, T. Fukasawa, and F. Kikuchi, "Three-dimensional analysis of RF electromagnetic field by the finite element method," *IEEE Trans. Magnetism*, vol. 19, pp. 2417-2420, 1983.
- [126].J. R. Winkler and J. B. Davies, "Elimination of spurious modes in finite element analysis," *Journal of Computational Physics*, vol. 56, pp. 1-14, 1984.
- [127].D. Sun, J. Manges, X. Yuan and Z. Cendes, "Spurious modes in finite element methods," *IEEE Antennas Propagat. Magazine*, vol. 37, no. 5, pp. 12-24, Oct. 1995.
- [128].Z. J. Cendes and S. H. Wong, "C1 quadratic interpolation over arbitrary point sets," *IEEE Comp. Graphics and Applications*, pp. 8-15, Nov. 1987.
- [129].J. P. Webb, G. L. Maile, and R. L. Ferrari, "Finite element solution of three dimensional electromagnetic problems," *IEEE Proc.*, vol. 130, no. 9, pp. 153-159, 1983.
- [130].Z. J. Cendes, "Vector finite elements for electromagnetic field computation," *IEEE Trans. Magnetism*, vol. 27, pp. 3953-3966, 1991.
- [131].J. P. Webb, "Edge elements and what they can do for you," *IEEE Trans. Magnetism*, vol. 29, pp. 1460-1465, 1993.
- [132].M. L. Barton and Z. J. Cendes, "New vector finite elements for three dimensional magnetic field computation," *Journal of Applied Physics*, vol. 61, pp. 3919-3921, 1987.
- [133].J. S. van Welij, "Calculation of eddy currents in terms of H on hexahedra," *IEEE Trans. Magnetism*, vol. 21, pp. 2239-2241, 1985.
- [134].H. Whitney, *Geometric Integration Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1957.
- [135].J. C. Nedelec, "Mixed elements in R3" *Numer. Math.*, vol. 35, pp. 315-341, 1980.

- [136]. R. D. Graglia, D. R. Wilson and A. F. Peterson, "Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, no. 3, pp. 329-342, Mar. 1997.
- [137]. C. W. Crowley, P. P. Silvester, H. Hurwitz, "Covariant projection elements for 3D vector field problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 1, pp. 397-400, Jan. 1988.
- [138]. S. M. Rao, D. R. Wilton and A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 30, pp. 409-418, 1982.
- [139]. A. Bossavit, "Whitney forms: A class of finite elements for three dimensional computations in electromagnetism," *IEE Proc.*, vol. 135, Pt. A, 8, pp. 493-500, 1988.
- [140]. K. D. Paulsen, and D. R. Lynch, "Elimination of vector parasites in finite element Maxwell solutions" *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, no. 3, pp. 395-404, Mar. 1991.
- [141]. W. G. Gray, "On normal flow boundary conditions in finite element codes for two-dimensional shallow water flow," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 4, pp. 99-104, 1984.
- [142]. M. S. Engleman, R. L. Sani, and P. M. Gresho, "The implementation of normal and/or tangential boundary conditions in finite element codes for incompressible fluid flow," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 2, pp. 225-238, 1982.
- [143]. K. D. Paulsen, D. R. Lynch, and J. W. Strohbehn, "Hybrid element method for unbounded electromagnetic problems in hyperthermia," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 23, pp. 1915-1937, 1986.
- [144]. S. T. Clegg, K. A. Murphy, W. T. Joines, G. Rine and T. V. Samulski, "Finite element computation of electromagnetic fields," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, no. 10, pp. 1984-1991, Oct. 1994.
- [145]. K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary-value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol. AP-14, May 1966, pp. 302-307.
- [146]. W. K. Gwarek, "Analysis of arbitrarily shaped two-dimensional microwave circuits by finite-difference time-domain method,"

- IEEE Trans. Micr. Th. Tech.*, vol. 36, no. 4, April 1988, pp. 738-744.
- [147].D. H. Choi and W. J. R. Hoefer, "The finite-difference time-domain method and its application to eigenvalue problems," *IEEE Trans. Micr. Th. Tech.*, vol. MTT-36, no. 12, Dec. 1986, pp. 1464-1470.
- [148].E. R. Demarest, "A finite-difference time-domain technique for modeling narrow apertures in conducting scatterers," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol. AP-35, July 1987, pp. 826-831.
- [149].J. H. Whealton, "A 3D analysis of Maxwell's equations for cavities of arbitrary shape," *J. Comp. Phys.*, vol. 75, 1988, pp. 168-189.
- [150].R. W. M. Lau and R. J. Sheppard, "The modelling of biological systems in three dimensions using the time-domain finite-difference method" (2 parts), *Phys. Med. Biol.* vol. 31, no. 11, 1986, pp. 1247-1266.
- [151].A. Taflove, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, Artech House Inc. 1995.
- [152].G. Mur, "Absorbing boundary conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain field equations", *IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility*, vol. EMC-23, no.4, pp.377-382, Nov. 1981.
- [153].R. L. Higdon, "Numerical absorbing boundary condition for the wave equation", *Mathematics of Computation*, vol.49, no.179, pp.65-90, July 1987.
- [154].J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *Journal of Computational Physics*, vol.114, pp.185-200, October 1994.
- [155].K. K. Mei and J. Fang, "Superabsorption – a method to improve absorbing boundary conditions", *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol.40, no.9, pp.1001-1010, Sept. 1992
- [156].K. S. Kunz and R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press Inc., 1993.

Κεφάλαιο 3

Θέματα Υλοποίησης

3.1 Στοιχεία Υλοποίησης Υπολογιστικών Τεχνικών

Παρά τις επιμέρους διαφορές τους, οι αριθμητικές τεχνικές, που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχουν ορισμένα θεμελιώδη κοινά στοιχεία. Για παράδειγμα, όλες ξεκινούν από την γεωμετρική διαμέριση του χώρου, στον οποίο ορίζεται η άγνωστη συνάρτηση, που αναζητούν. Σε κάποιες περιπτώσεις (όπως, για παράδειγμα, στη μέθοδο των ροπών για κυλινδρική κεραία) η διαμέριση αυτή είναι τόσο απλή και τετριμμένη, που δεν την αντιμετωπίζουμε καν σαν μια ανεξάρτητη διαδικασία. Σε σύνθετα, όμως, προβλήματα (όπως αυτό της τρισδιάστατης σκέδασης), η αποτελεσματική και ορθή γεωμετρική διακριτοποίηση του προβλήματός μας χαρακτηρίζεται από τόσο υψηλό βαθμό δυσκολίας, που η πολυπλοκότητά της μπορεί να φθάσει να συναγωνίζεται την επίλυση του διακριτού προβλήματος. Επειδή για προβλήματα τόσο απαιτητικής γεωμετρίας χρησιμοποιούμε, συνήθως, τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, στις δύο επόμενες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ορισμένες βασικές αρχές δημιουργίας δομημένων και ελεύθερων τρισδιάστατων πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων.

Ένα άλλο κοινό στοιχείο των περισσότερων αριθμητικών τεχνικών (με εξαίρεση την FDTD) είναι πως, μετασχηματίζουν το συναρτησιακό πρόβλημα, που επιχειρούν να επιλύσουν, σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Επειδή ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα συντελεστών δεν είναι δυνατόν να γίνει πάντα αναλυτικά, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου στις τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης, των οποίων η βοήθεια στο σημείο αυτό αποδεικνύεται πολύτιμη. Τέλος, θα κλείσουμε το κεφάλαιο, παρουσιάζοντας όλα τα ζητήματα, που αφορούν στην αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων εξισώσεων.

3.2 Πλεγματοποίηση

3.2.1 Ορθογώνια Δομημένα Πλέγματα

Η δομή κάθε υπολογιστικής τεχνικής έχει τέσσερις διαφορετικές όψεις: την τοπολογική, τη γεωμετρική, τη φυσική και την αλγεβρική. Με τις δύο τελευταίες ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τώρα, θα αντιμετωπίσουμε τις αριθμητικές μεθόδους από την τοπολογική και γεωμετρική οπτική γωνία.

Το πρώτο βήμα σε κάθε μέθοδο είναι η δημιουργία ενός καταλλήλου διακριτού μοντέλου του προβλήματος, που καλείται να αντιμετωπίσει. Για παράδειγμα, στις μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων που περιγράψαμε, το διακριτά αυτά μοντέλα προκύπτουν, διαμερίζοντας σε τετράεδρα τους χώρους των αναλυόμενων συστημάτων. Τα αποτελέσματα των διαμερίσεων αυτών είναι τρισδιάστατα πλέγματα.

Από τοπολογική σκοπιά, τα πλέγματα αυτά αποτελούνται από τετράεδρα, έδρες, ακμές και κόμβους. Πρόκειται για αφηρημένες οντότητες, που πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένες σχέσεις γειτονίας, που εγγυώνται τη λογική συνέπεια του πλέγματος. Η γεωμετρική περιγραφή προσθέτει μετρική πληροφορία στην τοπολογία, συμπεριλαμβάνοντας τις θέσεις των κόμβων, τα μήκη των ακμών, τις επιφάνειες των εδρών, τους όγκους των τετραέδρων και όλα τα σχετικά με αυτά μεγέθη. Το γεωμετρικό μέρος είναι σημαντικό, γιατί έχει μεγάλη επίδραση στην ακρίβεια της λύσης.

Η εξωτερική επιφάνεια S_0 ενός πλέγματος μπορεί να έχει οποιοδήποτε σχήμα. Τα δύο περισσότερο χρησιμοποιούμενα είναι το σφαιρικό και το ορθογωνικό. Έχοντας πειραματιστεί και με τα δύο είδη, έχουμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι, στις περισσότερες περιπτώσεις, το δεύτερο είναι προτιμότερο. Ο λόγος είναι πως, οδηγεί σε πλέγματα, που κατασκευάζονται απλούστερα, ταχύτερα και έχουν καλύτερες ιδιότητες.

Ένας ιδιαίτερα αποτελεσματικός τρόπος δημιουργίας του πλέγματος για ορθογωνική S_0 είναι να διαιρέσουμε τον όγκο V , που περικλείει, σε διαδοχικά στρώματα πάχους ΔZ . Στη συνέχεια, χωρίζουμε το κάθε στρώμα σε $N_x \times N_y$ κυβικά στοιχεία. Τέλος, καθένα από τα κυβικά αυτά στοιχεία το διαμερίζουμε σε πέντε τετράεδρα. Έτσι γεμίζουμε με τετράεδρα όλον το χώρο, που περικλείεται από την S_0 .

Επειδή οι κόμβοι του πλέγματος αυτού αναπτύσσονται πάνω σε ομοίμορφα διατεταγμένα επίπεδα, χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο μία φορά τις καρτεσιανές συντεταγμένες κατά μήκος κάθε άξονα. Κατά συνέπεια, το πλήθος των αριθμητικών πράξεων, για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων των κόμβων είναι συνάρτηση του αθροίσματος (και όχι του γινομένου) των αριθμών των κόμβων σε κάθε καρτεσιανή διεύθυνση.

Γεωμετρικά, κάθε κόμβος χαρακτηρίζεται από τις τρεις καρτεσιανές του συντεταγμένες. Στο πλαίσιο του ορθογωνίου πλέγματος, στο οποίο ανήκει, όμως, μας διευκολύνει να του αναθέσουμε και τρεις ακέραιες συντεταγμένες

(i, j, k) . Με βάση τις ακέραιες αυτές συντεταγμένες, το σύστημα γενικής αρίθμησης κόμβων, που επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε, εκφράζεται από τη σχέση

$$node = (k-1) * n_x n_y + (j-1) n_x + 1 \quad (3.1)$$

όπου n_x και n_y είναι τα πλήθη των κόμβων κατά μήκος των αξόνων x και y αντίστοιχα. Αν με n_z συμβολίζουμε τον αριθμό των κόμβων πάνω στον άξονα z , το συνολικό πλήθος των κόμβων του πλέγματος δίνεται από το γινόμενο $n_x n_y n_z$.

Το γινόμενο $(n_x-1)(n_y-1)(n_z-1)$ μας δίνει το πλήθος των κυβικών εξαέδρων, στα οποία χωρίζουμε τον όγκο του πλέγματος. Αναλύουμε καθένα από τα εξαέδρα αυτά σε πέντε τετράεδρα. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός τετράεδρων είναι $5(n_x-1)(n_y-1)(n_z-1)$.

Χρησιμοποιούμε δύο τρόπους ανάλυσης των εξαέδρων σε τετράεδρα, για να εξασφαλίσουμε τοπολογική συμβατότητα ανάμεσα στις έδρες γειτονικών στοιχείων. Η συμβατότητα αυτή απαιτεί, κάθε έδρα να εφάπτεται σε μία μόνο έδρα διπλανού τετράεδρου. Κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν, κάνοντας χρήση μόνον ενός τρόπου ανάλυσης. Παρουσιάζουμε τους δύο συμπληρωματικούς τρόπους που χρησιμοποιούμε στο Σχήμα 3.1. Διαχωρίζουμε τα εξαέδρα του πλέγματος σε δύο τύπους και εφαρμόζουμε διαφορετικό τρόπο ανάλυσης σε τετράεδρα, για κάθε τύπο. Ο καθορισμός του τύπου κάθε εξαέδρου γίνεται, ελέγχοντας αν είναι άρτιο ή περιττό το άθροισμα των ακεραίων συντεταγμένων του μικρότερου κόμβου του. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο τύπος να είναι διαφορετικός για διπλανά εξαέδρα του πλέγματος και να χωρίζονται πάντα με διαφορετικό τρόπο σε τετράεδρα.

Η γενική αρίθμηση των τετράεδρων του πλέγματος γίνεται, συνδυάζοντας τις τοπικές αριθμήσεις, που φαίνονται στον Πίνακα 3.1, με μία σάρωση των εξαέδρων με την ίδια σειρά, που χρησιμοποιούμε και για τους κόμβους. Τους κόμβους και τα τετράεδρα του πλέγματος τα συσχετίζουμε με τη βοήθεια ενός ακεραίου πίνακα, που για κάθε τετράεδρο μας δίνει τους γενικούς δείκτες των κορυφών του.

Ένας αντίστοιχος πίνακας συσχετίζει κάθε ακμή του πλέγματος με τους γενικούς δείκτες των κόμβων, που αποτελούν τα άκρα της. Για τις ακμές, φτιάχνουμε επίσης ένα μονοδιάστατο πραγματικό πίνακα, που περιέχει τα μήκη τους.

Η σύνδεση μεταξύ τετράεδρων και ακμών γίνεται με τη βοήθεια τριών ακεραίων πινάκων. Τα στοιχεία του πρώτου μας δίνουν για κάθε ακμή το πλήθος των τετράεδρων, στα οποία ανήκει. Οι γενικοί δείκτες των τετράεδρων αυτών για κάθε ακμή περιλαμβάνονται στο δεύτερο πίνακα. Τέλος, ο τρίτος πίνακας περιέχει τους γενικούς δείκτες των ακμών κάθε τετράεδρου.

Τις σχέσεις μεταξύ τετράεδρων τις εκφράζουμε, κάνοντας χρήση ενός πίνακα, που για κάθε τετράεδρο, μας δίνει τους γενικούς δείκτες των στοιχείων,

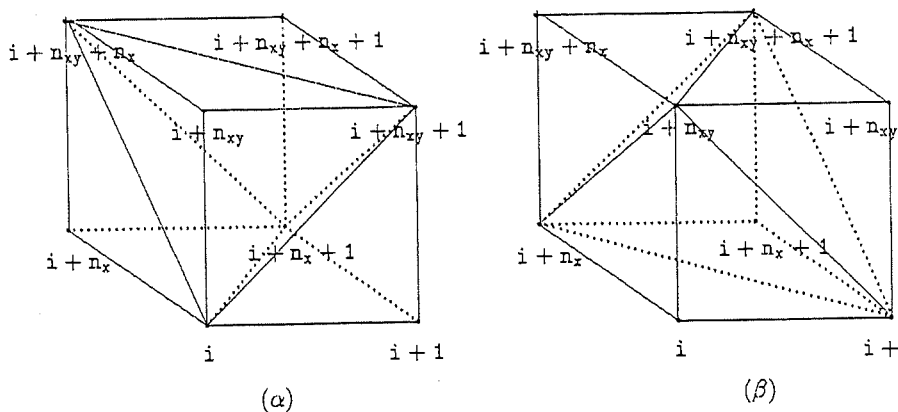
που εφάπτονται σε καθεμία από τις τέσσερις έδρες του. Αν κάποια έδρα ανήκει στο εξωτερικό σύνορο του πλέγματος, δίνουμε στο στοιχείο του πίνακα που της αντιστοιχεί την τιμή μηδέν.

Για την αποθήκευση των διηλεκτρικών σταθερών των τετραέδρων, χρησιμοποιούμε ένα μιγαδικό μονοδιάστατο πίνακα. Με τον τρόπο αυτό, μοντελοποιούμε την ανομοιογένεια του χώρου, που διακριτοποιούμε. Σε κάθε τετραέδρο αναθέτουμε αυτόματα την κατάλληλη διηλεκτρική σταθερά, ανάλογα με την υποπεριοχή, μέσα στην οποία βρίσκεται το κέντρο βάρους του. Για να ελέγξουμε, αν το κέντρο βάρους ενός τετραέδρου εμπίπτει ή όχι στο εσωτερικό μιάς υποπεριοχής, που ορίζεται από μία πολυεδρική επιφάνεια, μπορούμε να κάνουμε χρήση του θεωρήματος Gauss-Bonnet της τοπολογίας [1].

Μεταβάλλοντας κατάλληλα τη διηλεκτρική σταθερά από τετραέδρο σε τετραέδρο και χρησιμοποιώντας επαρκή αριθμό στοιχείων, μπορούμε να προσομοιώσουμε με ορθογώνιο πλέγμα γεωμετρίες αυθαίρετου σχήματος. Επιπλέον, εισάγοντας ένα αντίστοιχο πίνακα με τις μαγνητικές διαπερατότητες των τετραέδρων, έχουμε τη δυνατότητα να μοντελοποιήσουμε και μαγνητικά υλικά, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Η γεωμετρική ομοιομορφία του πλέγματος, που δημιουργούμε με τον τρόπο αυτό, έχει δείχθει [2] ότι, οδηγεί, λόγω συμμετρίας, στην αλληλοεξουδετέρωση όρων στο ανάπτυγμα του σφάλματος διακριτοποίησης. Το γεγονός αυτό, που συσχετίζεται με το φαινόμενο της υπερσύγκλισης (superconvergence), έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της ακρίβειας των λύσεων.

Επιπρόσθετα, το ομοιόμορφο πλέγμα, που προκύπτει, έχει καλή ποιότητα, με την έννοια των μικρών διαφοροποιήσεων ανάμεσα στα μήκη των ακμών κάθε τετραέδρου. Το χαρακτηριστικό αυτό οδηγεί σε πίνακες πεπερασμένων στοιχείων με μικρό, σχετικά, δείκτη κατάστασης (condition number). Κάτι τέτοιο συνεπάγεται σημαντικά κέρδη σε υπολογιστικό χρόνο, καθώς οι επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων συγκλίνουν γρηγορότερα στη σωστή λύση, όταν ο δείκτης κατάστασης του πίνακα συντελεστών παίρνει μικρές τιμές.



Σχήμα 3.1: Οι δύο τρόποι ανάλυσης ενός εξαέδρου σε πέντε τετραέδρα.

Διαμέριση (α)	
Τετράεδρο	Κόμβοι
1	$(i, i+n_{xy}, i+n_{xy}+1, i+n_{xy}+n_x)$
2	$(i, i+1, i+n_x+1, i+n_{xy}+1)$
3	$(i, i+n_x+1, i+n_{xy}+1, i+n_{xy}+n_x)$
4	$(i, i+n_x, i+n_x+1, i+n_{xy}+n_x)$
5	$(i+n_x+1, i+n_{xy}+1, i+n_{xy}+n_x, i+n_{xy}+n_x+1)$

Διαμέριση (β)	
Τετράεδρο	Κόμβοι
1	$(i, i+1, i+n_x, i+n_{xy})$
2	$(i+1, i+n_{xy}, i+n_{xy}+1, i+n_{xy}+n_x+1)$
3	$(i+1, i+n_x, i+n_{xy}, i+n_{xy}+n_x+1)$
4	$(i+n_x, i+n_{xy}+n_x, i+n_{xy}+n_x+1)$
5	$(i+1, i+n_x, i+n_x+1, i+n_{xy}+n_x+1)$

Πίνακας 3.1: Οι κόμβοι των τετράεδρων για τους δύο τρόπους διαμέρισης.

3.2.2 Αυτόματη Δημιουργία Πλεγμάτων

Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε μια διαδικασία κατασκευής ενός ομοιόμορφου πλέγματος, που στηρίζεται στη συστηματική τοποθέτηση ισαπεχουσών κόμβων στο χώρο του προβλήματος, που θέλουμε να λύσουμε. Το πλέγμα αυτό μπορούμε στη συνέχεια να το βελτιώσουμε, κάνοντάς το πιο πυκνό σε συγκεκριμένες περιοχές του. Συνήθως, η βελτίωση αυτή απαιτεί παρέμβαση από την πλευρά του χρήστη. Αυτή είναι άλλωστε και η τακτική, που υιοθετούν τα περισσότερα εμπορικά πακέτα λογισμικού υπολογιστικών μεθόδων για συστήματα μετάδοσης πληροφορίας.

Είναι πάντως γεγονός πως, το σφάλμα στις λύσεις πεπερασμένων στοιχείων σχετίζεται, όχι μόνο με την φυσική του προβλήματος, αλλά σε σημαντικό βαθμό και με το μέγεθος και τη διάταξη των στοιχείων, που συνιστούν το εκάστοτε πλέγμα. Μάλιστα, διαφορετικά φυσικά προβλήματα έχουν και διαφορετικές απαιτήσεις διαστάσεων και δομής πλέγματος. Μερικές φορές, ακόμα και για το ίδιο φυσικό πρόβλημα, έχουμε διαφορετικές απαιτήσεις πλέγματος, ανάλογα με τις οριακές συνθήκες, που του εφαρμόζουμε.

Γενικά, πάντως, στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όσο το πλέγμα γίνεται πιο πυκνό, η ακρίβεια των αριθμητικών λύσεων, που μας παρέχει, αυξάνεται, αλλά, ταυτόχρονα, μεγαλώνει και το υπολογιστικό κόστος. Για τον λόγο αυτό, είναι προφανής η μεγάλη σημασία, που έχει η αποδοτική παραγωγή του πλέγματος, καθώς και οι βελτιωτικές τροποποιήσεις του.

Για να διευκολύνουμε την αυτοματοποίηση της παραγωγής πλεγμάτων, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε για στοιχεία τρίγωνα και τετράεδρα, τα οποία προσφέρουν σημαντικά πλεονεκτήματα, σε σχέση με τους υπόλοιπους τύπους

στοιχείων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως, τόσο τα τρίγωνα, όσο και τα τετράεδρα είναι άπλοκα (simplices) στις δύο και τις τρεις διαστάσεις, αντίστοιχα.

Μια βολική και καθιερωμένη μεθοδολογία για την αυτόματη διακριτοποίηση ενός αυθαίρετου προβλήματος σε σύνολα τριγώνων ή τετραέδρων είναι η λεγόμενη Τριγωνοποίηση Delaunay (Delaunay Triangulation). Μάλιστα, υπάρχουν αρκετά εμπορικά πακέτα λογισμικού, που χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο της Τριγωνοποίησης Delaunay σε αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων, με αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Για τους λόγους αυτούς, στο υπόλοιπο της τρέχουσας παραγράφου, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε τεχνικές αυτόματης παραγωγής πλεγμάτων, που βασίζονται στην Τριγωνοποίηση Delaunay. Για να γίνουν, όμως, πιο κατανοητά τα όσα θα αναφέρουμε, στο σημείο αυτό θα δώσουμε μερικούς σχετικούς ορισμούς.

Δεδομένου ενός συνόλου σημείων, $\{P\}$, σε ένα επίπεδο, υπάρχουν πολλοί τρόποι, με τους οποίους μπορούμε να συνδέσουμε τα σημεία αυτά για να σχηματίσουμε μια ομάδα μη αλληλοεπικαλυπτόμενων τριγώνων, που καλύπτουν ολόκληρο το πεδίο ορισμού. Η Τριγωνοποίηση Delaunay αποτελεί μια ειδική κατασκευή αυτού του τύπου, που χαρακτηρίζεται από ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες. Μια από αυτές είναι πως αποτελεί τη δυαδική της λεγόμενης Ψηφίδωσης Voronoi (Voronoi Tessellation). Η Ψηφίδωση Voronoi είναι ο γράφος, που παίρνουμε, αν σχεδιάσουμε τις διαμέσους των ευθύγραμμων τμημάτων, που χωρίζουν το επίπεδο σε περιοχές, από τις οποίες η κάθε μια είναι εγγύτερα σε κάποιο δεδομένο σημείο του $\{P\}$, από ό,τι στα υπόλοιπα. Μαθηματικά, οι ορισμοί της Ψηφίδωσης Voronoi (ή Ψηφίδωσης Dirichlet) και της Τριγωνοποίησης Delaunay έχουν τις ακόλουθες μορφές:

Ορισμός 1: Ψηφίδωση Voronoi. Δεδομένου ενός συνόλου P που αποτελείται από M διακριτά, αυθαίρετα σημεία σε ένα n -διάστατο χώρο, μπορούμε να ορίσουμε τις περιοχές D_i , με τον ακόλουθο τρόπο

$$D_i = \{x : |x - p_i| \leq |x - p_j|, \forall j \neq i\} \quad (3.2)$$

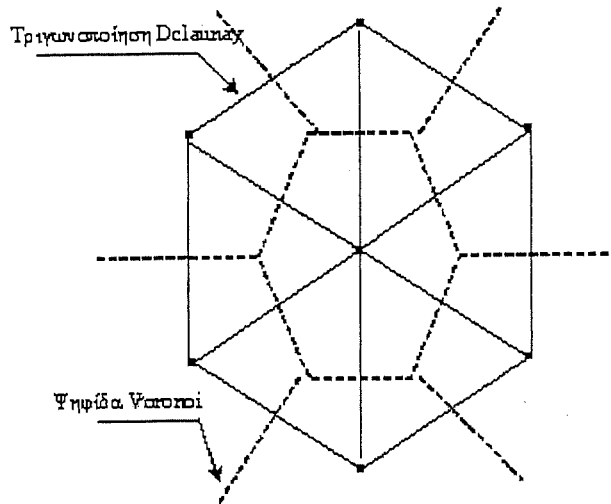
Τη συλλογή

$$D = \sum_{m=1}^M D_m \quad (3.3)$$

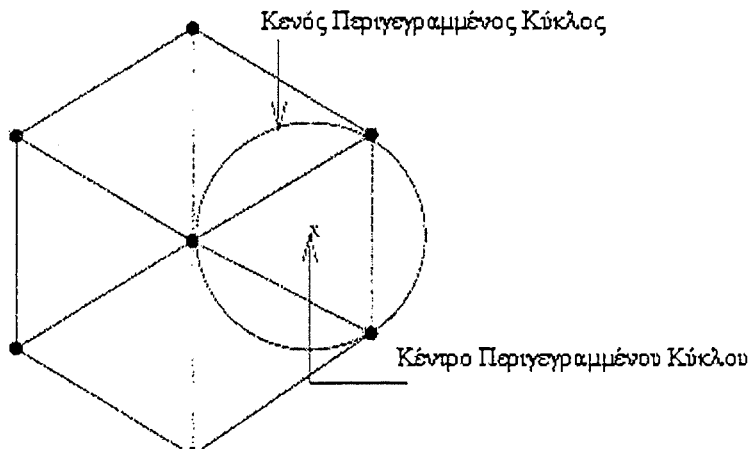
την ορίζουμε σαν Ψηφίδωση Voronoi.

Στις δύο διαστάσεις, τα D_m είναι κυρτά πολύγωνα (convex polygons), ενώ στις τρεις διαστάσεις κυρτά πολύεδρα (convex polyhedrons). Τις περιοχές που μοιράζονται $(n-1)$ -διάστατα όρια, τις καλούμε γειτονικές ψηφίδες (neighboring tiles). Με βάση τα όσα είπαμε, είμαστε, πλέον, έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό και της Τριγωνοποίησης Delaunay.

Ορισμός 2: Τριγωνοποίηση Delaunay. Δεδομένης μιας Ψηφίδωσης Voronoi, D , σε ένα n -διάστατο χώρο, οι γραμμές, που ενώνουν τα σημεία P_i και P_j , (όπου D_i και D_j είναι γειτονικές ψηφίδες, που αντιστοιχούν στα σημεία P_i και P_j), σχηματίζουν την Τριγωνοποίηση Delaunay.



Μια άλλη, εξίσου σημαντική, ιδιότητα της Τριγωνοποίησης Delaunay είναι αυτή του Κενού Περιβάλλοντος Κύκλου (Empty Circumcircle Property). Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, κανένα σημείο του συνόλου P δεν πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό του περιβάλλοντος κύκλου, οποιουδήποτε τριγώνου της δομής. Εντούτοις, στην περίπτωση εκφυλισμών (degeneracies), μπορεί να υπάρχουν και άλλα σημεία πάνω στην περιφέρεια του κύκλου (εκτός από τις τρεις κορυφές του περιβαλλόμενου τριγώνου).



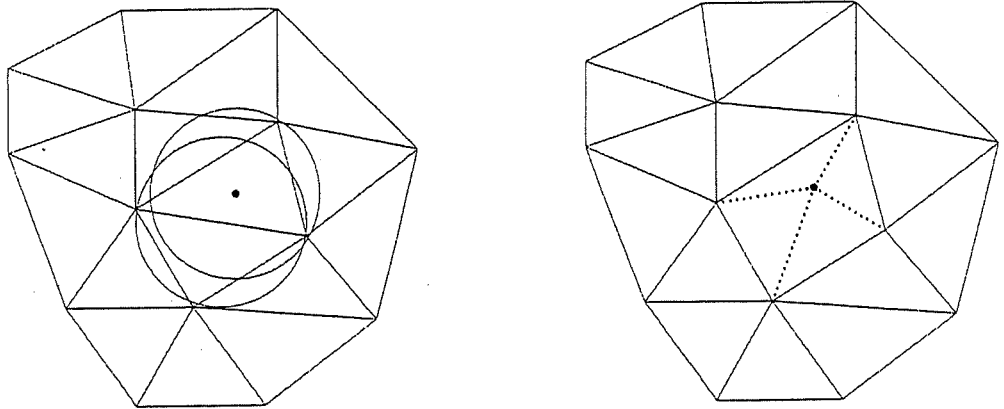
Επίσης είναι γνωστό πως, στις δύο διαστάσεις, η Τριγωνοποίηση Delaunay αντιστοιχεί σε μια *max-min* τριγωνοποίηση. Αυτό σημαίνει πως, από όλες τις δυνατές τριγωνοποιήσεις για ένα δεδομένο σύνολο σημείων, είναι αυτή με τη μεγαλύτερη ελάχιστη γωνία όλων των τριγωνικών στοιχείων. Κατά συνέπεια, μια Τριγωνοποίηση Delaunay αναμένουμε να μας δίνει πάντα σχετικά καλοσχηματισμένα (*well-shaped*) στοιχεία, χωρίς πολύ μικρές γωνίες.

Από τις ιδιότητες της Τριγωνοποίησης Delaunay (που παρουσιάσαμε επιγραμματικά παραπάνω για την περίπτωση των δύο διαστάσεων), αξίζει να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην ιδιότητα του Κενού Περιβάλλοντος Κύκλου. Και αυτό γιατί, όχι μόνο μπορούμε εύκολα να την επεκτείνουμε στις τρεις διαστάσεις, θεωρώντας τη σφαίρα που περιβάλλει ένα τετράεδρο, αλλά και γιατί αποτελεί τη βάση για αρκετούς αλγόριθμους κατασκευής Τριγωνοποιήσεων Delaunay, τόσο στις δύο, όσο και στις τρεις διαστάσεις. Οι πιο σημαντικοί ανάμεσα στους αλγόριθμους αυτούς είναι οι Bowyer-Watson, Green-Sibson και του Προωθούμενου Μετώπου (*Advancing Front*).

Ο αλγόριθμος Bowyer-Watson στηρίζεται στη σταδιακή προσθήκη κόμβων σε ένα προϋπάρχον πλέγμα. Τα βασικά βήματα του αλγορίθμου αυτού στις τρεις διαστάσεις είναι τα ακόλουθα:

- Ξεκινάμε με ένα αρχικό τετραεδρικό πλέγμα D_0 , που εμπεριέχει όλους τους σημειακούς κόμβους, που πρόκειται να προσθέσουμε. Καθώς εισάγουμε έναν-έναν τους νέους κόμβους, σχηματίζονται και νέα εσωτερικά τετράεδρα.
- Κάθε νέο κόμβο τον ελέγχουμε, για να εντοπίσουμε ποιών τετραέδρων οι περιβάλλουσες σφαίρες το περιέχουν. Τα τετράεδρα, που εντοπίζουμε, τα αφαιρούμε από τη δομή του πλέγματος, σχηματίζοντας, έτσι, ένα πολυέδρο εισαγωγής (*insertion polyhedron*), που περιέχει το νέο κόμβο.
- Στη συνέχεια, δημιουργούμε τις ακμές, που συνδέουν τον κάθε νέο κόμβο με τις τριγωνικές έδρες της επιφάνειας του πολυέδρου εισαγωγής. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε νέα τετράεδρα, που γεμίζουν το πολυέδρο

εισαγωγής. Ο συνδυασμός των τετραέδρων αυτών, με τα τετράεδρα, που βρίσκονται έξω από το πολύεδρο εισαγωγής, μας δίνει μια νέα Delaunay τριγωνοποίηση, που περιέχει το νέο κόμβο.



Σχήμα 3.2: Ο αλγόριθμος Bowyer-Watson για τη σύνθεση μιας Τριγωνοποίησης Delaunay.

Ο αλγόριθμος Bowyer-Watson έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμος για την παραγωγή αδόμητων (unstructured) πλεγμάτων. Έχει δεχθεί σκληρή κριτική από ορισμένους ερευνητές του πεδίου της υπολογιστικής γεωμετρίας, κυρίως λόγω της υψηλής πολυπλοκότητας $O(N^2)$, που ενδέχεται να επιδειξει στη χειρότερη δυνατή περίπτωση (worst-case scenario). Πάντως, για αδόμητα πλέγματα, έχει παρατηρηθεί σχεδόν γραμμική πολυπλοκότητα $O(N)$, τόσο στις δύο, όσο και στις τρεις διαστάσεις. Επιπλέον, πρόσφατα αποδείχθηκε πως, η τετραγωνική πολυπλοκότητα χειρότερης δυνατής περίπτωσης αντιπροσωπεύει παθολογική περίπτωση, που είναι εύκολο να αποφύγουμε, παίρνοντας με τυχαία σειρά τους νέους κόμβους, που πρόκειται να εισάγουμε.

Ο αλγόριθμος Green-Sibson παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με τον Bowyer-Watson, καθώς και αυτός βασίζεται στη σειριακή εισαγωγή νέων κόμβων σε μια ήδη υπάρχουσα τριγωνοποίηση και στην ιδιότητα της Κενής Περιβάλλουσας Σφαίρας. Για να εισάγουμε ένα νέο κόμβο στην τριγωνοποίηση, αρχικά εντοπίζουμε το στοιχείο, μέσα στο οποίο βρίσκεται ο κόμβος αυτός. Στη συνέχεια ενσωματώνουμε τον κόμβο στην τριγωνοποίηση, συνδέοντάς τον με τις κορυφές του στοιχείου, που το περικλείει. Στην περίπτωση που, ο κόμβος βρίσκεται πάνω σε μια ακμή του πλέγματος την χωρίζουμε στα δύο και ενώνουμε τον κόμβο με τις κορυφές όλων των στοιχείων, που μοιράζονται την ακμή. Στις τρεις διαστάσεις, ο κόμβος μπορεί να πέφτει και πάνω σε κάποια έδρα του πλέγματος, την οποία και πάλι διασπούμε σε περισσότερες.

Η τριγωνοποίηση, που λαμβάνουμε με τη διαδικασία που περιγράψαμε, αν και έγκυρη, εντούτοις δεν είναι απαραίτητα και Delaunay. Αυτό που μας απομένει, είναι να τη μετασχηματίσουμε σε Delaunay, αναδιατάσσοντας τη συνεκτικότητα του πλέγματος (mesh connectivity) στη γειτονία του

νεοεισαχθέντος κόμβου. Αυτό το επιτυγχάνουμε, εξετάζοντας τα νεοσχηματισθέντα στοιχεία (τρίγωνα ή τετράεδρα). Αν οι περιβάλλοντες κύκλοι τους (ή οι περιβάλλουσες σφαίρες τους) είναι κενοί, τότε η τριγωνοποίηση, που πήραμε, είναι όντως Delaunay και καμμία απολύτως τροποποίηση δεν χρειάζεται. Στην περίπτωση που, κάποιος από τους κύκλους αυτούς περιέχει μια κορυφή, τότε χρειάζεται να εφαρμόσουμε μια αντιμετάθεση διαγωνίων (diagonal swapping).

Για να εντοπίσουμε, ποιές ακμές πρέπει να αντιμεταθέσουμε, χρειάζεται να ελέγξουμε μόνον τις εξωτερικές (σε σχέση με το νέο κόμβο) γειτονικές ακμές, καθώς αυτές, που άπτονται πάνω, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, πάντα θα είναι τμήματα της τελικής Delaunay τριγωνοποίησης. Η διαδικασία αντιμετάθεσης ακμών ξεκινά με τις εξωτερικές ακμές των νεοσχηματισμένων στοιχείων και προχωρά προς τα έξω, χωρίς ποτέ να επανεξετάζουμε ήδη αντιμετατεθειμένες ακμές. Η παραπάνω διαδικασία τερματίζεται, όταν, πλέον, δεν απομένει καμμία ακμή, που να απαιτεί αντιμετάθεση.

Ο αλγόριθμος Green-Sibson είναι ιδιαίτερα επιτυχημένος στην παραγωγή διδιάστατων τριγωνοποιήσεων και αποτελεί τον πυρήνα πολλών εμπορικών πακέτων αυτόματης πλεγματοποίησης. Όμως, μια επέκταση του αλγορίθμου αυτού στις τρεις διαστάσεις δεν είναι καθόλου απλή υπόθεση. Αυτό οφείλεται, κυρίως, στο γεγονός ότι, στις τρεις διαστάσεις δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια έγκυρη Delaunay τριγωνοποίηση, απλώς με αντιμεταθέσεις σε κάποια άλλη τριγωνοποίηση.

Μια εναλλακτική τεχνική κατασκευής Delaunay τριγωνοποιήσεων είναι, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ο αλγόριθμος του Προωθούμενου Μετώπου (Advancing Front). Το όνομά του οφείλεται στο γεγονός ότι, αφού ξεκινήσει από τα όρια της προς τριγωνοποίηση περιοχής, τη σαρώνει ολόκληρη, προωθώντας ένα ιδεατό μέτωπο μέσα από αυτήν. Με τον τρόπο αυτό, χτίζει την τελική τριγωνοποίηση στοιχείο-στοιχείο. Αξίζει να σημειώσουμε πως, ο αλγόριθμος αυτός χρειάζεται ένα αρχικό σύνολο σημείων διεσπαρμένων στην περιοχή, που τριγωνοποιεί.

Το αρχικό μέτωπο συνίσταται από το σύνολο των ακμών, που ορίζουν το εξωτερικό κέλυφος της περιοχής, που μας ενδιαφέρει. Ξεκινάμε επιλέγοντας μια ακμή από το μέτωπο αυτό. Στη συνέχεια, πρέπει να καθορίσουμε το συγκεκριμένο σημείο, με το οποίο πρέπει να ενώσουμε τα άκρα της ακμής, ώστε να σχηματίσουμε ένα Delaunay στοιχείο, το οποίο θα είναι παρόν στην τελική τριγωνοποίηση.

Ο καθορισμός του σημείου αυτού μπορεί να γίνει με έναν απλό επαναληπτικό τρόπο. Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο εσωτερικό σημείο και σχηματίζουμε το στοιχείο, που έχει σαν κορυφές το σημείο αυτό, καθώς και τα άκρα της ακμής του μετώπου. Αν το σχηματιζόμενο στοιχείο περιέχει στο εσωτερικό του περιβάλλοντα κύκλου του (ή της περιβάλλουσας σφαίρας του, αν είναι τετράεδρο) άλλα σημεία της προς κατασκευής τριγωνοποίησης, τότε δεν είναι δυνατό να είναι έγκυρο τμήμα της και το απορρίπτουμε.

Στη συνέχεια, επιλέγουμε ένα νέο εναλλακτικό σημείο, για παράδειγμα κάποιο από αυτά, που βρίσκονται στο εσωτερικό του περιβάλλοντος κύκλου,

που αναφέραμε και, πιο συγκεκριμένα, εκείνο που είναι εγγύτερα στο κέντρο του κύκλου αυτού. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή, τελικά βρίσκουμε ένα στοιχείο, που δεν περιέχει άλλα σημεία στο εσωτερικό του περιβάλλοντος κύκλου του. Το στοιχείο αυτό είναι, επομένως, αποδεκτό και το μέτωπό μας προωθείται, αφαιρώντας την τρέχουσα ακμή από αυτό και προσθέτοντάς του τις νέες ακμές, που δημιουργήσαμε. Ο τερματισμός του αλγορίθμου επέρχεται, όταν έχουμε εξαλείψει όλες τις ακμές από το μέτωπο, πράγμα που σημαίνει πως, έχουμε σαρώσει ολόκληρη την περιοχή, που μας ενδιαφέρει.

Οι αλγόριθμοι, που παρουσιάσαμε στην παραγράφο αυτή, υποτίθεται πως μας παρέχουν *καλά πλέγματα*. Τι σημαίνει, όμως, ο όρος *καλό* για ένα πλέγμα; Η απάντηση δεν είναι απλή. Είναι, σίγουρα, φανερό πως, για κάθε πλέγμα χρειαζόμαστε ένα μέτρο εκτίμησης της ποιότητάς του, ώστε να μπορούμε να αποφασίσουμε, αν είναι ικανοποιητικό για τις ανάγκες της εφαρμογής, που το προορίζουμε.

Αν και δεν υπάρχει ένας απόλυτος ορισμός πλεγματικής ποιότητας και η τελευταία, συνήθως, εξαρτάται από τη μέθοδο επίλυσης του συστήματος της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, εντούτοις είναι ασφαλές να πούμε πως, ένα καλό στοιχείο (το θεμελιώδες συστατικό ενός καλού πλέγματος) δεν πρέπει να έχει έντονα οξείες γωνίες ή, ισοδύναμα, ακμές, που να διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους. Πώς, όμως, μπορούμε να εκφράσουμε τις παραπάνω απαιτήσεις μαθηματικά;

Ένας αποτελεσματικός τρόπος ελέγχου της ποιότητας ενός τετραέδρου είναι να πάρουμε το λόγο της ακτίνας της εγγεγραμμένης σε αυτό σφαίρας (in-radius, R_{in}), προς την ακτίνα της αντίστοιχης περιγεγραμμένης σφαίρας (circum-radius, R_{out}). Για ένα ιδανικό τετράεδρο έχουμε $R_{out} = 3R_{in}$. Κανονικοποιώντας το λόγο των δύο ακτίνων, ώστε να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$, ορίζουμε τον παράγοντα ποιότητας για ένα τετράεδρο T_i , με τον ακόλουθο τρόπο

$$Q_i = \frac{3R_{in}}{R_{out}} \quad (3.4)$$

Όσο για την ποιότητα ενός υποπλέγματος (submesh) $M_d = \bigcup_i^N \{T_i\}$, αυτή την ορίζουμε, σαν

$$Q_{M_d} = \left(\prod_i^N Q_i \right)^{1/N} \quad (3.5)$$

3.3 Υπολογισμοί των Πινάκων Συντελεστών των Γραμμικών Συστημάτων των Αριθμητικών Μεθόδων

Ένα από τα πιο σημαντικά τμήματα κάθε κώδικα αριθμητικής μέθοδου, που μοντελοποιεί συστήματα μετάδοσης πληροφορίας, μέσω της επίλυσης ενός

γραμμικού συστήματος, είναι ο προσδιορισμός των στοιχείων του πίνακα συντελεστών αυτού του συστήματος. Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο, με τον οποίο οργανώνουμε τους αριθμητικούς υπολογισμούς, που λαμβάνουν χώρα στα πλαίσια του προσδιορισμού αυτού, θα τον παρουσιάσουμε αναλυτικά για μια ειδική περίπτωση.

Η περίπτωση, που θα αναλύσουμε, αφορά τον προσδιορισμό του πίνακα συντελεστών της μεθόδου των ροπών, που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.6.2 του προηγούμενου κεφαλαίου. Επιλέξαμε την αριθμητική αυτή μέθοδο, γιατί η εύρεση του πίνακα συντελεστών της είναι πιο σύνθετη και πιο απαιτητική υπολογιστικά, σε σύγκριση με άλλες τεχνικές, όπως αυτή των πεπερασμένων στοιχείων. Έτσι, θα έχουμε την ευκαιρία, να αναφερθούμε σε τρόπους, με τους οποίους μπορούμε να αυξήσουμε την υπολογιστική αποδοτικότητα (computational efficiency) των σχετικών υπολογισμών, όπως είναι η αξιοποίηση της ισότητας διαφορετικών στοιχείων του πίνακα και ο μετασχηματισμός τετραπλών ολοκληρωμάτων σε διπλά, με χρήση φυσικής συμμετρίας και παραγοντικής αναλυτικής ολοκλήρωσης.

Κάθε στοιχείο Z_{mn} του πίνακα συντελεστών $[Z]$ της μεθόδου των ροπών εκφράζει τη σύζευξη (coupling) μεταξύ των συναρτήσεων ανάπτυξης και δοκιμής F_n και F_m . Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για την αντίδραση του ρεύματος της F_n στο πεδίο που ακτινοβολεί η F_m .

Λόγω της ομοιότητας, που χαρακτηρίζει τις συναρτήσεις βάσης, που επιλέγουμε (έχουν όλες τον ίδιο προσανατολισμό και φορέα), τα στοιχεία κάθε διαγωνίου του $[Z]$ είναι ίσα μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι, ο πίνακας $[Z]$ είναι ένας πίνακας Toeplitz και, για το λόγο αυτό, αρκεί να υπολογίσουμε και να αποθηκεύσουμε ένα μόνο στοιχείο από κάθε διαγώνιο του. Κάτι τέτοιο συνεπάγεται πολύ σημαντικά κέρδη σε υπολογιστικό χρόνο και μνήμη. Επιπρόσθετα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ειδική μέθοδο του Levinson [3], για τη γρήγορη επίλυση του συμμετρικού Toeplitz συστήματος (2.52), με μόνον $O(N^2)$ πολυπλοκότητα (έναντι $O(N^3)$ των γενικών μεθόδων για πυκνά συστήματα).

Λαμβάνοντας υπόψη πως, οι συναρτήσεις F_m και F_n είναι μη μηδενικές μόνο στα υποδιαστήματα $[z_{m-1}, z_{m+1}]$ και $[z_{n-1}, z_{n+1}]$, αντίστοιχα, καθώς και την κυλινδρική συμμετρία που χαρακτηρίζει το ηλεκτρικό πεδίο, η σχέση (2.53) παίρνει τη μορφή

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \left(\int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \frac{e^{-jkR}}{R} F_m(z') d\phi' dz' \right) F_n(z) dz + \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-jkR}}{R} F_m(z') d\phi' dz' \right) F_n(z) dz = Z_{mn}^{ind} + Z_{mn}^{cap} \quad (3.6)$$

Όπως βλέπουμε το κάθε στοιχείο του $[Z]$ μπορούμε να γραφεί σαν άθροισμα ενός επαγωγικού (inductive) και ενός χωρητικού (capacitive) όρου. Ο

επαγωγικός όρος Z_{mn}^{ind} , σχετίζεται με το ρεύμα του τεμαχισμένου ημιτόνου m , ενώ ο χωρητικός, Z_{mn}^{cap} , εμπλέκει το επιφανειακό φορτίο.

Ο χωρητικός όρος δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 Z_{mn}^{cap} &= \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-jkR}}{R} F_m(z') d\phi' dz' \right) F_n(z) dz \\
 &= \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k^2} \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-jkR}}{R} \right) F_n(z) dz \right) F_m(z') d\phi' dz' \\
 &= \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k^2 \sin(k\Delta z)} \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-jkR}}{R} \right) \sin(k(z-z_{n-1})) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-jkR}}{R} \right) \sin(k(z_{n+1}-z)) dz \right) F_m(z') d\phi' dz' \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Κάνοντας εφαρμογή παραγοντικών ολοκληρώσεων, η (3.7) γίνεται

$$\begin{aligned}
 Z_{mn}^{cap} &= \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k^2 \sin(k\Delta z)} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(k \left(\frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}} + \frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \cos(k\Delta z) \frac{e^{-jkR_n}}{R_n} \right) \right. \\
 &\quad \left. - k^2 \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) \sin(k(\Delta z - |z' - z_n|)) dz \right) F_m(z') d\phi' dz' \\
 &= \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k \sin(k\Delta z)} \int_{z_{m-1}}^{z_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}} + \frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \cos(k\Delta z) \frac{e^{-jkR_n}}{R_n} \right) F_m(z') d\phi' dz' - Z_{mn}^{ind} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

όπου

$$R_l = \sqrt{(z' - z_l)^2 + 4a^2 \sin^2 \left(\frac{\phi'}{2} \right)} \quad (3.9)$$

$l = n+1, n-1, n$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.6) και (3.8), βρίσκουμε πως, η τελική έκφραση, που μας δίνει τα στοιχεία του Z_{mn} , είναι η

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k \sin^2(k\Delta z)} \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}} + \frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} - 2 \cos(k\Delta z) \frac{e^{-jkR_n}}{R_n} \right) \sin(k(\Delta z - |z' - z_n|)) d\phi' dz' \quad (3.10)$$

Το διπλό ολοκλήρωμα στην παραπάνω έκφραση πρέπει να το υπολογίσουμε αριθμητικά. Παρατηρούμε ότι, η ολοκληρωτέα παράσταση στην (3.10) εμφανίζει ιδιομορφίες στα σημεία $\phi' = \phi$, $z' = z_{n+1}$, z_{n-1} και z_n . Οι ιδιομορφίες αυτές είναι ολοκληρώσιμες και, έτσι, μπορούμε να εκτελέσουμε την διπλή ολοκλήρωση της (3.10) αριθμητικά όπως είναι. Όμως, είναι προτιμότερο να αφαιρέσουμε πρώτα τις ιδιομορφίες, ώστε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς και να προσδιορίσουμε τα ολοκληρώματα πολύ πιο αποδοτικά. Οι ιδιομορφίες μπορούν να απομονωθούν, ξαναγράφοντας τους πυρήνες της (3.10) με την ακόλουθη μορφή

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR_l}}{R_l} d\phi' = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{R_l} d\phi' - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{-jkR_l}}{R_l} d\phi' \quad (3.11)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (3.11) έχει μία πολύ ομαλή και καλά συμπεριφερόμενη ολοκληρωτέα συνάρτηση. Όσο για τον πρώτο όρο του ίδιου μέλους, μπορούμε να αποδείξουμε ότι,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{R_l} d\phi' = \frac{4}{R_l'} K\left(\frac{\pi}{2}, p^2\right) \quad (3.12)$$

όπου

$$R_l' = \sqrt{(z' - z_l)^2 + 4a^2} \quad (3.13)$$

$$p^2 = \frac{4a^2}{(z' - z_l)^2 + 4a^2} \quad (3.14)$$

και $K(\pi/2, p^2)$ είναι το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους, για τον υπολογισμό του οποίου υπάρχει διαθέσιμη πολυωνυμική προσέγγιση [4]. Τέλος, το ολοκλήρωμα ως προς z' στην (3.10) μπορεί να υπολογιστεί πολύ αποδοτικά, χρησιμοποιώντας έναν αυτόματα προσαρμοζόμενο αλγόριθμο.

3.4 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Με τον όρο αριθμητική ολοκλήρωση (numerical quadrature) αναφερόμαστε σε οποιαδήποτε μαθηματική σχέση ή μεθοδολογία είναι σε θέση να μας δώσει προσεγγίσεις της τιμής του ολοκληρώματος κάποιας συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να μας δίνεται, είτε με τη μορφή τύπου (αλλά να μην είναι δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματός της), είτε με τη μορφή διακριτών τιμών (οπότε ο αριθμητικός χειρισμός αποτελεί τη μόνη μας επιλογή). Σε σύγκριση με την αριθμητική διαφορίση, η αριθμητική ολοκλήρωση είναι μια πιο ευσταθής και αξιόπιστη διαδικασία.

Όλες οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης χρησιμοποιούν αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{i=1}^N a_i f(x_i) \quad (3.15)$$

για να προσεγγίσουν τα ολοκληρώματα $\int_a^b f(x) dx$.

Οι απλούστερες μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης, που θα παρουσιάσουμε και πρώτες, βασίζονται στη χρήση πολυωνύμων παρεμβολής. Για να τις εφαρμόσουμε, πρέπει, αρχικά, να επιλέξουμε ένα σύνολο διακριτών κόμβων $\{x_0, \dots, x_N\}$ από ένα διάστημα, που περιλαμβάνει το $[a, b]$. Στη συνέχεια, αν με P_n συμβολίσουμε το Lagrange πολυώνυμο παρεμβολής

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x), \quad (3.16)$$

ολοκληρώνουμε το P_n στο διάστημα $[a, b]$, για να λάβουμε τον τύπο της αριθμητικής ολοκλήρωσης, που θα έχει την ακόλυθη γενική μορφή

$$I_{n+1}(f) = \int_a^b \sum_{i=1}^N f(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=1}^N a_i f(x_i), \quad (3.17)$$

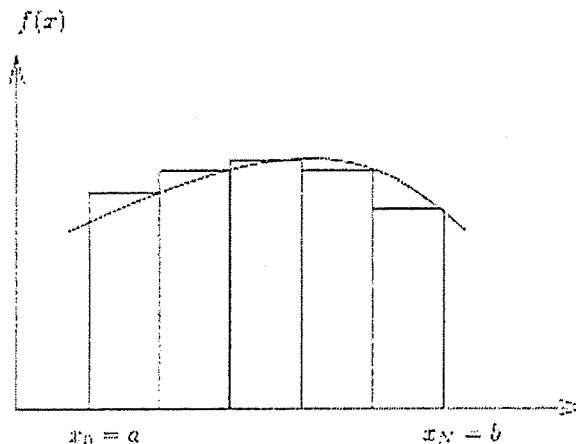
όπου $a_i = \int_a^b L_i dx$, για κάθε $i = 1, \dots, N$.

3.4.1 Ο Κανόνας του Euler

Η πιο απλή περίπτωση αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι να χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμο μηδενικής τάξης ($L_i(x)=1$), οπότε λαμβάνουμε την ακόλυθη σχέση

$$I = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (3.18)$$

η οποία είναι γνωστή με τον όρο κανόνας του Euler, ή ορθογωνικός κανόνας (rectangular rule). Όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 3.3, ο κανόνας αυτός προσεγγίζει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $f(x)$ σαν ένα άθροισμα στοιχειωδών ορθογωνίων πλάτους $(b-a)/N$.



Σχήμα 3.3: Ο κανόνας του Euler.

3.4.2 Ο Απλός και Σύνθετος Κανόνας του Τραπεζίου

Είναι φανερό από το Σχήμα 3.3 ότι, ο τύπος του Euler δεν είναι και ιδιαίτερα ακριβής, καθώς κάθε ορθογώνιο είναι είτε μεγαλύτερο, είτε μικρότερο από το πραγματικό εμβαδόν, που προσεγγίζει, εισάγοντας, με τον τρόπο αυτό, θετικό ή αρνητικό σφάλμα, ανάλογα. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το κάθε ορθογώνιο του Σχήματος 3.3 με ένα τραπέζιο, με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 3.4.

Ουσιαστικά, αυτό που κάναμε είναι ότι, χρησιμοποιήσαμε το παρακάτω πολυώνυμο Langrange

$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \quad (3.19)$$

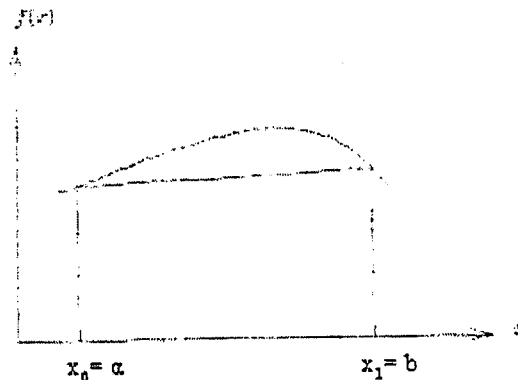
για να λάβουμε τον ακόλουθο τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης, που είναι γνωστός σαν απλός κανόνας του τραpezίου

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{x_1-x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \quad (3.20)$$

Ο λόγος για τον οποίο καλούμε τη μέθοδο αυτή αριθμητικής ολοκλήρωσης κανόνα του τραπεζίου, καθίσταται φανερός, κοιτάζοντας το Σχήμα 3.4.

Εφαρμόζοντας τον απλό κανόνα του τραπεζίου σε καθένα από τα υποδιαστήματα του $[a, b]$, που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 3.3, παίρνουμε τον ακόλουθο τύπο, που είναι γνωστός σαν σύνθετος (composite) τύπος του τραπεζίου

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] \quad (3.21)$$



Σχήμα 3.4: Ο απλός κανόνας του τραπεζίου.

3.4.3 Ο Κανόνας του Simpson

Είναι προφανές ότι, ο κανόνας του τραπεζίου δίνει εκτιμήσεις μεγαλύτερης ακρίβειας από τον κανόνα του Euler, αφού προσεγγίζει την καμπύλη $f(x)$ της ολοκληρωτέας συνάρτησης, συνδέοντας διαδοχικά σημεία πάνω της με ευθύγραμμα τμήματα. Μια πιο ακριβής τεχνική είναι η χρήση ομάδων τριών σημείων πάνω στην καμπύλη με ένα δευτέρας τάξεως πολυώνυμο. Τα ευθύγραμμα τμήματα γίνονται, τώρα, τμήματα παραβολών. Το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής είναι το δευτέρας τάξεως πολυώνυμο Langrange

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \quad (3.22)$$

Η μεθοδολογία αριθμητικής ολοκλήρωσης, που προκύπτει, είναι γνωστή με τον όρο κανόνας του Simpson. Για κάθε υποδιάστημα, ο απλός κανόνας του Simpson δίνεται από την ακόλουθη έκφραση

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{x_2 - x_0}{3} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)] \quad (3.23)$$

Αξιοποιώντας την παραπάνω σχέση για $2m$ υποδιαίρεσεις του συνολικού διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$, λαμβάνουμε τον παρακάτω τύπο, που είναι γνωστός σαν σύνθετος κανόνας του Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(b) \right] \quad (3.24)$$

3.4.4 Ολοκλήρωση Romberg

Ένας ιδιαίτερα ενδιαφέρον αλγόριθμος αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι αυτός του Romberg. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιεί τον κανόνα του τραpezίου για τον υπολογισμό αρχικών εκτιμήσεων των ολοκληρωμάτων, που αναζητά και, στη συνέχεια, εφαρμόζει τη διαδικασία επέκτασης (extrapolation) του Richardson, για τη βελτίωση των εκτιμήσεων αυτών.

Το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της μεθόδου Romberg στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$ είναι η χρήση του σύνθετου κανόνα του τραpezίου, με $N = 2^{n-1}$ ισοκατανεμημένα σημεία, όπως

$$I_{n,1} = h \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] \quad (3.25)$$

όπου

$$h = \frac{b-a}{N} \quad (3.26)$$

είναι το ομοιόμορφο μήκος διαμέρισης.

Για να πάρουμε μια καλύτερη προσέγγιση, μπορούμε να χωρίσουμε στα δύο τα τμήματα της διαμέρισης, λαμβάνοντας, έτσι, έναν τύπο με $2n$ διαμερίσεις

$$I_{n+1,1} = \frac{1}{2} I_{n,1} + h' \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + [2i-1]h') \quad (3.27)$$

όπου h' υποδηλώνει το νέο μήκος διαμέρισης

$$h' = \frac{b-a}{2^n} \quad (3.28)$$

Αξίζει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε πως, τα δείγματα της ολοκληρωτέας ποσότητας, που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του $I_{n,1}$, επαναχρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του $I_{n+1,1}$, μειώνοντας στο μισό το κόστος των απαραίτητων υπολογισμών της συνάρτησης, εάν η ποσότητα $I_{n,1}$ δεν ήταν διαθέσιμη. Λόγω του ότι οι ολοκληρωτέες ποσότητες περιέχουν συχνά ειδικές συναρτήσεις, είναι, συνήθως, επιθυμητή η μείωση του αριθμού των υπολογισμών. Χάρης στην επαναχρησιμοποίηση δειγμάτων, μπορεί να υπολογιστεί μια σειρά από προσεγγίσεις $\{I_{1,1}, I_{2,1}, \dots, I_{n,1}\}$ για αριθμό υπολογισμών της συνάρτησης, όπως στο $I_{n,1}$. Η διαθεσιμότητα των διαδοχικών προσεγγίσεων κάνει δυνατή την εκτίμηση σφάλματος.

Το σφάλμα, που παράγεται από διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα του τραπεζίου, παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα: αποτελείται από άρτιες δυνάμεις του $\frac{1}{N}$ [5]. Με άλλα λόγια,

$$I - I_{n,1} = \frac{a}{N^2} + \frac{\beta}{N^4} + \frac{\gamma}{N^6} + \dots \quad (3.29)$$

όπου $N=2^{n-1}$. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να αξιοποιηθεί με επέκταση (extrapolation) κατά Richardson, ώστε να εκτιμηθεί καλύτερα το I . Με δεδομένες δύο διαδοχικές προσεγγίσεις για το I , το γεγονός ότι, ο επικρατών όρος λάθους είναι της τάξης $O(N^{-2})$, δηλώνει πως, το σφάλμα μειώνεται κατά έναν παράγοντα 4 ή, αλλιώς, σε μορφή εξίσωσης

$$I \cong I_{n,1} + \frac{K}{N^2} \quad (3.30)$$

$$I \cong I_{n+1,1} + \frac{K}{4N^2} \quad (3.31)$$

Μια βελτιωμένη προσέγγιση θα μπορούσε να επιτευχθεί, επιλύοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις ως προς το συντελεστή K και προβλέποντας μια καλύτερη εκτίμηση αφαιρώντας τον $O(N^{-2})$ όρο λάθους. Έτσι, έχουμε

$$I \cong I_{n+1,2} = \frac{4}{3}I_{n+1,1} - \frac{1}{3}I_{n,1} \quad (3.32)$$

Γενικά, το $I_{n+1,2}$ θα αποτελεί μια καλύτερη προσέγγιση του ολοκληρώματος από ό,τι το $I_{n+1,1}$, αφού ο επικρατών όρος λάθους μειώθηκε στο $O(N^{-4})$.

Αυξάνοντας διαδοχικά το n και επεκτείνοντας, αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί. Για παράδειγμα, οι δύο εκτιμήσεις

$$I \cong I_{n,2} + \frac{L}{N^4} \quad (3.33)$$

$$I \cong I_{n+1,2} + \frac{L}{16N^4} \quad (3.34)$$

μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρόβλεψη του

$$I \cong I_{n+1,3} = \frac{16}{15} I_{n+1,2} - \frac{1}{15} I_{n,2} \quad (3.35)$$

του οποίου το σφάλμα είναι της τάξης $O(N^{-6})$. Συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή, καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$I_{n+1,m+1} = \frac{4^m}{4^m - 1} I_{n+1,m} - \frac{1}{4^m - 1} I_{n,m} \quad (3.36)$$

για τον ίδιο αριθμό των δειγμάτων της ολοκληρωτέας ποσότητας, που χρησιμοποιήθηκαν στον υπολογισμό του $I_{n+1,1}$. Η διαδικασία, κατά την οποία ο κανόνας τραπεζοειδούς ολοκλήρωσης συνδυάζεται με την πρόβλεψη Richardson, είναι γνωστή ως ολοκλήρωση κατά Romberg.

Ανακεφαλαιώνοντας, η ολοκλήρωση κατά Romberg απαιτεί τη χρήση του κανόνα του τραpezίου για τον υπολογισμό της αρχικής εκτίμησης

$$I_{1,1} = (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] \quad (3.37)$$

και διαδοχικών εκτιμήσεων $I_{n+1,n+1}$, σύμφωνα με την εξίσωση (3.27). Για κάθε $n > 1$, η (3.36) χρησιμοποιείται για την εξαγωγή της ποσότητας $I_{n+1,n+1}$. Οι εκτιμήσεις αυτές μπορούν να παρακολουθηθούν, έως ότου η προσέγγιση για το I φανεί ότι, συγκλίνει σε κάποια επιθυμητή ακρίβεια. Κώδικες που υλοποιούν την ολοκλήρωση κατά Romberg, είναι ευρέως διαθέσιμοι [1] - [7].

3.4.5 Γκαουσιανή Ολοκλήρωση

Οι μέθοδοι, που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα (Euler, Trapezoid, Simpson, Romberg), βασίζονται όλες στην ομοιόμορφη υποδιαίρεση του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$. Μια πιο αποτελεσματική μέθοδος αριθμητικής

ολοκλήρωσης, γνωστή ως Gaussian quadrature, χρησιμοποιεί άνισα διαστήματα. Η μέθοδος αυτή προσεγγίζει τα ολοκληρώματα με σχέσεις της μορφής

$$I \cong \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (3.38)$$

Στην παραπάνω έκφραση, τα βάρη $\{w_i\}$ και τα σημεία $\{x_i\}$ μπορούμε να τα επιλέξουμε με τέτοιο τρόπο ώστε, να βελτιστοποιήσουμε τη διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης. Μια κοινή πρακτική είναι να επιλέξουμε τις παράμετρους έτσι ώστε, οι λαμβανόμενες προσεγγίσεις να είναι ακριβείς για πολώνυμα μέχρι βαθμού p .

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το πολώνυμο τρίτου βαθμού

$$f(x) = a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \quad (3.39)$$

Για απλότητα, περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας στο διάστημα $-1 < x < 1$ και επιβάλλουμε από αριστερά προς τα δεξιά συμμετρία στα βάρη και στα σημεία.

Ένας κανόνας της μορφής (3.38) μπορεί να βρεθεί, που αφορά μόνο δύο δείγματα, x_{-1}, x_1 . Αυτά μπορούν να καθοριστούν, εξισώνοντας τον κανόνα (3.38) με την ακριβή έκφραση του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 f(x) dx$, για κάθε όρο της (3.39). Αυτός ο γενικός περιορισμός

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_{-1} f(x_{-1}) + w_1 f(x_1) = w_{-1} f(-x_1) + w_1 f(x_1) \quad (3.40)$$

οδηγεί στις εξισώσεις

$$2a = \omega_{-1} a + \omega_1 a \quad (3.41)$$

$$\frac{2}{3} \gamma = \omega_{-1} \gamma x_{-1}^2 + \omega_1 \gamma x_1^2 \quad (3.42)$$

Επιλύοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις, έχουμε

$$\omega_{-1} = 1, x_{-1} = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad (3.43)$$

$$\omega_1 = 1, x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (3.44)$$

ως βάρη και δείγματα. Εάν είναι επιθυμητή η ολοκλήρωση πολωνύμου τετάρτου βαθμού, ένα τρίτο δείγμα στο σημείο $x=x_0=0$ μπορεί να προστεθεί, δίνοντας το ακόλουθο σύνολο περιορισμών

$$2a = \omega_1 a + \omega_0 a + \omega_1 a \quad (3.45)$$

$$\frac{2}{3}\gamma = \omega_1 \gamma x_1^2 + \omega_1 \gamma x_1^2 \quad (3.46)$$

$$\frac{2}{5}\varepsilon = \omega_1 \varepsilon x_1^4 + \omega_1 \varepsilon x_1^4 x_1^2 \quad (3.47)$$

και τα εξής βάρη και δείγματα

$$\omega_{-1} = \frac{5}{9}, x_{-1} = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad (3.48)$$

$$\omega_0 = \frac{8}{9}, x_0 = 0 \quad (3.49)$$

$$\omega_1 = \frac{5}{9}, x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (3.50)$$

Επομένως, με μόνο τρία δείγματα της ολοκληρωτέας παράστασης, ο τετραγωνικός (quadrature) κανόνας μπορεί να ολοκληρώσει με τέλεια ακρίβεια πολωνυμικές συναρτήσεις τετάρτου βαθμού.

Τα βάρη και δείγματα, που βρέθηκαν παραπάνω, είναι γνωστά ως Gauss-Legendre κανόνες. Πίνακες από βάρη και δείγματα για κανόνες Gauss-Legendre διαφόρων τάξεων μπορούν να βρεθούν στα περισσότερα εγχειρίδια αριθμητικών μεθόδων. Στην πράξη, κανόνες υψηλότερης τάξης παράγονται με βάση τη θεωρία των ορθογώνιων πολωνύμων, αντί της ταυτόχρονης επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων, που παρουσιάστηκε για λόγους επεξήγησης. Επιπρόσθετες πληροφορίες σχετικά με τη Γκαουσιανή τετραγωνική ολοκλήρωση είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία [1] - [9].

3.4.6 Κανόνες Gauss-Kronrod

Για την ολοκλήρωση αναλυτικών (ομαλών) συναρτήσεων, η ολοκλήρωση κατά Gauss είναι πιο αποτελεσματική από ό,τι η ολοκλήρωση κατά Romberg, με την έννοια ότι γενικά, παράγει πιο ακριβείς προσεγγίσεις, για έναν καθορισμένο αριθμό από δείγματα της ολοκληρωτέας παράστασης. Η ολοκλήρωση Romberg, όμως, επιτρέπει την πλήρη επαναχρησιμοποίηση των δειγμάτων, όταν ο αριθμός τους διπλασιαστεί. Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση όπου, δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων ο αριθμός των δειγμάτων, η ολοκλήρωση κατά Romberg

παρέχει μια σειρά από ολοκληρωτικές προσεγγίσεις, με καθόλου επιπλέον κόστος, από την οποία η σύγκλιση μπορεί να εκτιμηθεί.

Παρόλο που, μια παρόμοια σειρά δεν μπορεί να βρεθεί το ίδιο αποτελεσματικά με τη Gaussian quadrature, μια μερική βελτίωση βρέθηκε το 1964, όταν ο Kronrod ανέπτυξε Γκαουσιανούς κανόνες $(2n+1)$ σημείων, οι οποίοι επαναχρησιμοποιούν τα δείγματα από έναν κανόνα Gauss-Legendre n σημείων [10]. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτουν δύο εκτιμήσεις του ολοκληρώματος, η μία πιο ακριβής από την άλλη, για $2n+1$ δείγματα. Από τότε, παρόμοιες ιδέες έχουν εφαρμοστεί σε άλλες μορφές Gaussian quadrature [11] και ενσωματώθηκαν σε βιβλιοθήκες λογισμικού, όπως είναι η QUADPACK [12]. Λόγω της βελτιωμένης αποδοτικότητας της Gaussian quadrature, οι κανόνες Gauss-Kronrod υπερέχουν στην πράξη από την ολοκλήρωση κατά Romberg.

3.4.7 Γκαουσιανή Αριθμητική Ολοκλήρωση για Τρίγωνα

Για τον υπολογισμό πολυδιάστατων ολοκληρωμάτων, μία δυνατή προσέγγιση είναι η δημιουργία «κανόνων γινομένου», φωλιάζοντας μονοδιάστατους κανόνες. Παρόλα αυτά, αυτοί οι αλγόριθμοι δεν είναι οι καλύτεροι δυνατοί. Γκαουσιανοί κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορούν να παραχθούν για πολυδιάστατες περιοχές, εφαρμόζοντας τις ιδέες για την περίπτωση της μιας διάστασης. Για τριγωνικές περιοχές, θεωρούμε την τετραγωνική συνάρτηση

$$f(L_1, L_2) = \alpha L_1^2 + \beta L_2^2 + \gamma L_1 L_2 + \delta L_1 + \varepsilon L_2 + \zeta \quad (3.51)$$

όπου L_1 και L_2 είναι οι γραμμικώς ανεξάρτητες simplex συντεταγμένες (L_1, L_2, L_3) μέσα στο τρίγωνο. Επιβάλλοντας τριγωνική συμμετρία στα δειγματοληπτούμενα σημεία και στα βάρη τους, προσπαθούμε να κατασκευάσουμε έναν κανόνα, που να περιλαμβάνει τρία σημεία, (η, ζ, ξ) , (ξ, η, ζ) , (ζ, ξ, η) , κάθε ένα από τα οποία σχετίζεται με το ίδιο βάρος. Μετά την επιβολή της συμμετρίας, ο κανόνας πρέπει να ικανοποιεί τους τέσσερις ακόλουθους περιορισμούς

$$\iint L_1 dA = \frac{1}{3} A \quad (3.52)$$

$$\iint L_1^2 dA = \frac{1}{6} A \quad (3.53)$$

$$\iint L_1 L_2 dA = \frac{1}{12} A \quad (3.54)$$

όπου A είναι το εμβαδόν του τριγώνου. Εξισώνοντας τον κανόνα

$$I \equiv A \sum_i \omega_i f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) \quad (3.55)$$

με τις ακριβείς εκφράσεις των εξισώσεων (3.52) - (3.55), λαμβάνουμε το σύστημα των τεσσάρων μη γραμμικών εξισώσεων, απ' όπου είναι δυνατό να υπολογιστούν τα τρία δειγματοληπτούμενα σημεία, όπως

$$\omega = \frac{1}{3}(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \quad (3.56)$$

$$\omega = \frac{1}{3}(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \quad (3.57)$$

$$\omega = \frac{1}{3}(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \quad (3.58)$$

Παρόμοιοι κανόνες μπορούν να κατασκευαστούν για αναπαραστάσεις μεγαλύτερου βαθμού και η βιβλιογραφία περιέχει Γκαουσιανούς κανόνες για ολοκλήρωση πολυωνύμων μέχρι εικοστού βαθμού πάνω σε τρίγωνα [13]-[15].

Για την απλή μονοδιάστατη περίπτωση, ορθογώνια πολυώνυμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απλοποίηση της κατασκευής κανόνων υψηλότερης τάξης. Η έλλειψη μιας ανάλογης θεωρίας για πολυδιάστατα ορθογώνια πολυώνυμα έχει περιπλέξει την κατασκευή πολυδιάστατων Γκαουσιανών κανόνων τετραγωνικής ολοκλήρωσης, με αποτέλεσμα οι υπάρχοντες κανόνες [14], [15] να είναι το αποτέλεσμα της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων.

3.5 Τεχνικές Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων

Οι τεχνικές επίλυσης γραμμικών συστημάτων χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις Απευθείας (Direct) και τις Επαναληπτικές (Iterative). Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τεχνικές, όπως αυτές της Απαλοιφής Gauss και των παραγοντοποιήσεων LU και Choleski. Οι τεχνικές αυτές αποτελούν τη βέλτιστη επιλογή για συστήματα με πυκνούς (dense) πίνακες συντελεστών, όπως είναι τα συστήματα, που προκύπτουν από τη μέθοδο των ροπών. Για τα συστήματα αυτά, ο χρόνος, που απαιτείται για την παραγοντοποίηση των πινάκων συντελεστών τους, είναι συγκρίσιμος με το χρόνο επαναληπτικής επίλυσης του συστήματος. Και όντας παραγοντοποιημένος ο πίνακας των συντελεστών, έχουμε τη δυνατότητα να επιλύσουμε το σύστημα ταχύτατα, με προς τα πίσω αντικατάσταση, για πολλαπλά διανύσματα σταθερών όρων.

Όταν, όμως, το σύστημα, που έχουμε να επιλύσουμε, χαρακτηρίζεται από αραιό πίνακα συντελεστών, όπως συμβαίνει με τα συστήματα, που προκύπτουν από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η χρήση των Απευθείας τεχνικών

δεν είναι και τόσο καλή ιδέα. Αυτό συμβαίνει γιατί, ο παραγοντοποιημένος πίνακας συντελεστών έχει πολύ περισσότερα μη μηδενικά στοιχεία από τον αρχικό. Σε πολλές περιπτώσεις είναι σχεδόν πυκνός. Κατά συνέπεια, η παραγοντοποίηση μπορεί να είναι και πρακτικά αδύνατη, λόγω περιορισμών στη μνήμη και είναι, σίγουρα, υπερβολικά χρονοβόρα. Ακόμα και το βήμα της προς τα πίσω αντικατάστασης υπάρχει περίπτωση να είναι πιο αργό από μία Επαναληπτική τεχνική.

Από την άλλη μεριά, οι Επαναληπτικές τεχνικές είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς στην επίλυση αραιών συστημάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί, καθώς δεν μεταβάλλουν τον πίνακα συντελεστών του συστήματος, που επιλύουν, είναι πολύ οικονομικές σε απαιτήσεις μνήμης, όταν το σύστημα είναι αραιό. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, είναι και ταχύτερες, αφού κάνουν πράξεις μόνο με τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα συντελεστών, που για ένα αραιό σύστημα είναι πολύ περιορισμένα. Κάτι τέτοιο συνεπάγεται και μείωση των αριθμητικών σφαλμάτων.

3.5.1 Η Τεχνική Αποσύνθεσης LU

Ας υποθέσουμε ότι, μπορούμε να γράψουμε ένα πίνακα $[A]$ σαν το γινόμενο δύο άλλων πινάκων,

$$[L] \cdot [U] = [A] \quad (3.59)$$

όπου $[L]$ είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας (δηλαδή, ένας πίνακας με μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και κάτω από αυτή) και $[U]$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας (δηλαδή, ένας πίνακας με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και πάνω από αυτή). Στην περίπτωση ενός πίνακα 4×4 , η εξίσωση (3.59) έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Προκειμένου να επιλύσουμε το αλγεβρικό γραμμικό σύστημα $[A] \cdot [x] = [b]$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αποσύνθεση της σχέσης (3.59), ως εξής

$$[A] \cdot [x] = ([L] \cdot [U]) \cdot [x] = [L] \cdot ([U][x]) = [b] \quad (3.61)$$

επιλύοντας πρώτα το αλγεβρικό σύστημα με άγνωστο το διάνυσμα $[y]$ τέτοιο ώστε

$$[L] \cdot [y] = [b] \quad (3.62)$$

και έπειτα, έχοντας προσδιορίσει το y , επιλύοντας το γραμμικό σύστημα

$$[U] \cdot [x] = [y] \quad (3.63)$$

Ποιο είναι το πλεονέκτημα του διαχωρισμού της επίλυσης του γραμμικού συστήματος σε δύο αλληπάλγηλα στάδια επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (3.62) και (3.63); Το πλεονέκτημα είναι ότι, η επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων, στο οποίο οι συντελεστές των αγνώστων σχηματίζουν τριγωνικό πίνακα, είναι μια απλή διαδικασία. Όπως είναι γνωστό, ένα τέτοιο σύστημα επιλύεται με εμπρόσθια αντικατάσταση, αν ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός. Αυτή είναι η περίπτωση του (3.62). Οπότε, εφαρμόζοντας την εμπρόσθια αντικατάσταση, έχουμε

$$y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$y_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j \right] \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (3.64)$$

Αν ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός, όπως αυτός του συστήματος (3.63), εφαρμόζουμε την οπίσθια αντικατάσταση,

$$x_N = \frac{y_N}{\beta_{NN}}$$

$$x_i = \frac{1}{\beta_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^N \beta_{ij} x_j \right] \quad i = N-1, N-2, \dots, 1 \quad (3.65)$$

Οι εξισώσεις (3.64) και (3.65) (για κάθε δεξί μέλος $[b]$) απαιτούν N^2 εκτελέσεις ενός εσωτερικού βρόχου. Η κάθε εκτέλεση περιλαμβάνει έναν πολλαπλασιασμό και μια πρόσθεση. Εάν είχαμε ως N δεξιά μέλη τις στήλες, που αντιπροσωπεύουν τα N μοναδιαία διανύσματα (περίπτωση αντιστροφής του πίνακα), τότε, λαμβάνοντας υπόψη τα οδηγούντα μηδενικά, η πολυπλοκότητα της (3.64) μειώνεται από $\frac{1}{2} N^3$ σε $\frac{1}{6} N^3$, ενώ η (3.65) διατηρεί την ίδια πολυπλοκότητα $\frac{1}{2} N^3$.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι, στην περίπτωση που ο $[A]$ μπορεί να αποσυντεθεί σε γινόμενο $[L] \cdot [U]$, το γραμμικό σύστημα μπορεί να επιλυθεί με όσα δεξιά μέλη επιθυμούμε, υπολογίζοντας τους αγνώστους για ένα δεξί μέλος κάθε φορά. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα, σε σχέση με τις Επαναληπτικές τεχνικές επίλυσης, που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Έχοντας δεδομένο τον πίνακα $[A]$, τίθεται το ερώτημα, με ποιό τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε τους πίνακες $[L]$ και $[U]$. Αρχικά εκφράζουμε τη (i, j) -στη συνιστώσα της εξίσωσης (3.59), ή (3.60). Η συνιστώσα αυτή μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα, που αρχίζει από

$$a_{i1}\beta_{1j} + \dots = a_{ij}$$

Ο αριθμός των όρων του αθροίσματος εξαρτάται, παρόλα αυτά, από τη σχέση μεταξύ i και j . Συγκεκριμένα, έχουμε τρεις περιπτώσεις :

$$i < j : a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \dots + a_{ii}\beta_{ij} = a_{ij} \quad (3.66)$$

$$i = j : a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \dots + a_{ii}\beta_{jj} = a_{ij} \quad (3.67)$$

$$i > j : a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \dots + a_{ii}\beta_{jj} = a_{ij} \quad (3.68)$$

Οι εξισώσεις (3.66)-(3.68) αποτελούν ένα σύστημα N^2 εξισώσεων για τα $N^2 + N$ άγνωστα a και β (η διαγώνιος αναπαρίσταται δύο φορές). Εφόσον ο αριθμός των αγνώστων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων, καλούμαστε να ορίσουμε N από τους αγνώστους αυθαίρετα και να προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το σύστημα με αγνώστους τους υπόλοιπους N^2 . Στην πραγματικότητα, όπως θα δούμε, είναι πάντα δυνατό να θεωρήσουμε

$$a_{ii} \equiv 1 \quad i = 1, \dots, N \quad (3.69)$$

Με τη βοήθεια ενός εξαιρετικά σημαντικού αλγορίθμου (Crout's algorithm), το σύστημα των $N^2 + N$ εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί με τετριμμένο τρόπο για όλα τα a και τα β , τοποθετώντας τις εξισώσεις με μια συγκεκριμένη σειρά. Η σειρά αυτή παρατίθεται ακολούθως:

- Καταρχήν, για κάθε $i=1, 2, \dots, j$ χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.66), (3.67) και (3.68) προκειμένου να επιλύσουμε για τα β_{ij} μέσω της σχέσης

$$\beta_{ii} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}\beta_{kj} \quad (3.70)$$

(Στην περίπτωση που $i=1$, στη σχέση (3.70) ο όρος του αθροίσματος λαμβάνεται ίσος με μηδέν).

- Στη συνέχεια για $i=j+1, j+2, \dots, N$, χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.68) για να επιλύσουμε για το a_{ij} , οπότε έχουμε

$$a_{ij} = \frac{1}{\beta_{ij}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} \beta_{kj} \right) \quad (3.71)$$

Τις δύο παραπάνω διαδικασίες πρέπει να τις πραγματοποιήσουμε, πριν προχωρήσουμε στην επόμενη τιμή του j .

Ολοκληρώνοντας μερικές επαναλήψεις των παραπάνω διαδικασιών, μπορούμε με ευκολία να διαπιστώσουμε ότι, τα α και β στα δεξιά μέλη των σχέσεων (3.70) και (3.71) έχουν ήδη προσδιοριστεί τη στιγμή που μας χρειάζονται. Μπορούμε, επίσης, να διαπιστώσουμε ότι, κάθε a_{ij} το χρησιμοποιούμε μόνο μια φορά και ποτέ ξανά. Αυτό σημαίνει ότι, τα αντίστοιχα a_{ij} ή β_{ij} μπορούμε να τα αποθηκεύσουμε στη θέση μνήμης, που καταλάμβανε προηγουμένως το a_{ij} . Τα διαγώνια μοναδιαία στοιχεία β_{ii} δεν τα αποθηκεύουμε. Συνοψίζοντας, ο αλγόριθμος του Crout συμπληρώνει ένα συνδυασμένο πίνακα από α και β ,

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Το γέμισμα του πίνακα αυτού το πραγματοποιούμε, κατά στήλες από αριστερά προς τα δεξιά και κάθε στήλη τη συμπληρώνουμε από κάτω προς τα πάνω.

3.5.2 Τεχνικές Αποθήκευσης Αραιών Πινάκων

Ίσως το μεγαλύτερο πλεονέκτημα των πεπερασμένων στοιχείων έναντι των μεθόδων ολοκληρωτικών εξισώσεων και οριακών στοιχείων είναι η μεγάλη αραιότητα του πίνακα συντελεστών του συστήματος, στο οποίο καταλήγει. Η αραιότητα αυτή είναι αποτέλεσμα του μικρού φορέα των συναρτήσεων βάσης των πεπερασμένων στοιχείων. Είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί, αν την αξιοποιήσουμε κατάλληλα, έχουμε τη δυνατότητα να επιτύχουμε τεράστια κέρδη σε μνήμη και υπολογιστικό χρόνο.

Στην εκμετάλλευση της αραιότητας παίζει μεγάλο ρόλο η τεχνική, που χρησιμοποιούμε για την αποθήκευση του πίνακα συντελεστών. Υπάρχει μία μεγάλη ποικιλία τεχνικών μεθόδων αποθήκευσης αραιών πινάκων στη βιβλιογραφία [18, σελ. 57-67]. Οι περισσότερο γνωστές και δημοφιλείς είναι οι τεχνικές Συμπιεσμένης Γραμμής (Compressed Row Storage), Συμπιεσμένης

Στήλης (Compressed Column ή Harwell-Boeing), Διαγώνιας Αποθήκευσης (Diagonal Storage) και Πριονωτής Διαγώνιας Αποθήκευσης (Jagged Diagonal Storage).

Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε την τεχνική Συμπιεσμένης Γραμμής για την υλοποίηση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.8.1. Με την τεχνική αυτή αποθηκεύουμε τα διαδοχικά μη μηδενικά στοιχεία των γραμμών του αραιού πίνακα σε συνεχόμενες θέσεις μνήμης. Αυτό το επιτυγχάνουμε, χρησιμοποιώντας τρία διανύσματα: δύο ακέραια και ένα μιγαδικό. Το μιγαδικό διάνυσμα περιέχει τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα, που αποθηκεύουμε, με τη σειρά που τα συναντούμε, διασχίζοντας τον πίνακα αυτό γραμμή προς γραμμή. Από τα δύο ακέραια διανύσματα, στο ένα καταχωρούμε τους δείκτες στήλης των μη μηδενικών στοιχείων, με την ίδια σειρά, που χρησιμοποιούμε και στο μιγαδικό διάνυσμα. Στο ακέραιο διάνυσμα, που απομένει, αποθηκεύουμε για κάθε γραμμή, τη θέση του μιγαδικού διανύσματος, από την οποία ξεκινάμε την εναπόθεση των μη μηδενικών στοιχείων της.

Η τεχνική της Συμπιεσμένης Γραμμής είναι από τις πιο γενικές. Δεν βασίζεται σε καμία απολύτως παραδοχή για τη δομή της αραιότητας του πίνακα, που αποθηκεύει. Επιπλέον, σε αντίθεση με άλλες τεχνικές, δεν αποθηκεύει ούτε ένα μηδενικό στοιχείο. Είναι, επομένως, η πιο οικονομική σε μνήμη. Για έναν πίνακα $n \times n$ με n_{nzs} μη μηδενικά στοιχεία, η τεχνική της Συμπιεσμένης Γραμμής απαιτεί μόλις $2n_{nzs} + n + 1$ θέσεις μνήμης για την αποθήκευσή του. Το μοναδικό της, ίσως, αδύνατο σημείο είναι πως, για την αναφορά σε κάθε μη μηδενικό στοιχείο του πίνακα, που αποθηκεύει, παρεμβάλει ένα έμμεσο βήμα διευθυνσιοδότησης.

Τα ακμικά στοιχεία, όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 2.8.1.4, οδηγούν σε πίνακες συντελεστών με αυξημένη αραιότητα. Επιπρόσθετα, η μορφή της Απορροφητικής Οριακής Συνθήκης που χρησιμοποιούμε (σχέση (2.119)), μας εξασφαλίζει τη συμμετρία των πινάκων αυτών. Την ιδιότητα της συμμετρίας μπορούμε να την αξιοποιήσουμε στην τεχνική της Συμπιεσμένης Γραμμής, για να έχουμε ακόμα μεγαλύτερη οικονομία μνήμης. Τη μεγαλύτερη αυτή οικονομία την επιτυγχάνουμε, αποθηκεύοντας μόνον το άνω τριγωνικό τμήμα του πίνακα συντελεστών. Κάθε φορά, που χρειαζόμαστε ένα μη μηδενικό στοιχείο του κάτω τριγωνικού τμήματος, χρησιμοποιούμε το συμμετρικό του, ως προς την κεντρική διαγώνιο. Το τμήμα, επομένως, που πληρώνουμε, για την αυξημένη, λόγω συμμετρίας, οικονομία, είναι μία ελαφρά πιο αργή πρόσβαση στα στοιχεία του κάτω τριγωνικού τμήματος.

Αφού χρησιμοποιούμε ακμικές συναρτήσεις βάσης, κάθε άγνωστος του τελικού συστήματος συνδέεται με μία ακμή του πλέγματος. Επιπλέον, κάθε στοιχείο του πίνακα συντελεστών του συστήματος εκφράζει τη σχέση ανάμεσα σε δύο αγνώστους. Κατά συνέπεια, το στοιχείο αυτό θα είναι μη μηδενικό, μόνον αν οι ακμές, στις οποίες αντιστοιχούν οι άγνωστοι, που συνδέει, ανήκουν στο ίδιο τετράεδρο. Επομένως, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία των ακέραιων διανυσμάτων της τεχνικής της Συμπιεσμένης Γραμμής, βασίζόμενοι μόνο στη γνώση του πλέγματος, και των σχέσεων των στοιχείων του μεταξύ τους.

Έτσι, για να βρούμε το πλήθος και τους δείκτες στήλης των μη μηδενικών στοιχείων κάθε γραμμής, εντοπίζουμε σε πόσα και ποιά τετράεδρα ανήκει η ακμή, στην οποία αντιστοιχεί ο άγνωστος της γραμμής αυτής. Για καθένα από τα τετράεδρα αυτά, βρίσκουμε τους γενικούς δείκτες όλων των ακμών του. Κάθε τέτοιος δείκτης αποτελεί, επίσης, δείκτη στήλης ενός μη μηδενικού στοιχείου της γραμμής που εξετάζουμε. Ελέγχουμε, αν ήδη έχουμε αποθηκεύσει για τη γραμμή, δείκτη ίσο με αυτόν. Αν έχει συμβεί κάτι τέτοιο, δεν κάνουμε τίποτα. Αν, όμως, συναντάμε το δείκτη για πρώτη φορά στη συγκεκριμένη γραμμή, τότε τον τοποθετούμε, ανάλογα με την τιμή του, στην κατάλληλη θέση του διανύσματος των δεικτών στήλης. Είναι πιθανό να χρειαστεί μετατόπιση ορισμένων από τα στοιχεία του διανύσματος αυτού. Πριν προχωρήσουμε στον έλεγχο άλλου δείκτη, αυξάνουμε κατά ένα το περιεχόμενο του στοιχείου του άλλου ακέραιου διανύσματος, που μας δίνει τη θέση αποθήκευσης στο μιγαδικό διάνυσμα του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου της επόμενης γραμμής.

3.5.3 Επαναληπτικές Τεχνικές Επίλυσης Συστημάτων

Ο όρος Επαναληπτική τεχνική χαρακτηρίζει ένα ευρύ φάσμα τεχνικών, που παράγουν ακολουθίες, κατά το δυνατόν ολοένα και ακριβέστερων προσεγγίσεων, στην λύση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Διακρίνουμε δύο είδη Επαναληπτικών τεχνικών: τις Στάσιμες (Stationary) και τις Μη-Στάσιμες (Non-Stationary).

Οι Στάσιμες τεχνικές καλούνται με το όνομα αυτό, γιατί η πραγματική λύση του συστήματος, που επιλύουν, αποτελεί στάσιμο σημείο (stationary point) της αναδρομικής σχέσης, πάνω στην οποία βασίζονται. Οι τεχνικές αυτές είναι παλαιότερες, απλούστερες στην κατανόηση και την υλοποίηση, αλλά, συνήθως, όχι ιδιαίτερα αποτελεσματικές. Στάσιμες είναι οι τεχνικές του Jacobi, των Gauss-Seidel και οι τεχνικές της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (Successive Overrelaxation) και της Συμμετρικής Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (Symmetric Successive Overrelaxation).

Οι Μη-Στάσιμες τεχνικές αποτελούν σχετικά πρόσφατη εξέλιξη. Η θεωρία, από την οποία προκύπτουν, είναι δύσκολη στην κατανόηση, αλλά χαρακτηρίζονται από ιδιαίτερα υψηλή αποτελεσματικότητα. Η πλειοψηφία των τεχνικών αυτών βασίζεται στην ιδέα των ακολουθιών ορθογωνίων διανυσμάτων. Οι πιο γνωστές από τις Μη-Στάσιμες τεχνικές είναι αυτές των Συζυγών Κλίσεων (Conjugate Gradient), του Ελαχίστου Υπολοίπου (Minimum Residual), των Συζυγών Κλίσεων στις Κάθετες Εξισώσεις (Conjugate Gradient on the Normal Equations), της Γενικευμένης Μεθόδου Ελαχίστου Υπολοίπου (Generalized Minimal Residual), των ΔιΣυζυγών Κλίσεων (BiConjugate Gradient), του Ημι-Ελαχίστου Υπολοίπου (Quasi-Minimal Residual), της Τετραγωνισμένης Τεχνικής Συζυγών Κλίσεων (Conjugate Gradient Squared) και της Σταθεροποιημένης Τεχνικής των ΔιΣυζυγών Κλίσεων (BiConjugate Gradient Stabilized).

Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στο σχηματισμό μίας (οθογώνιας) βάσης για το λεγόμενο υποχώρο Krylov. Για το λόγο αυτό και αποκαλούνται συνήθως τεχνικές του υποχώρου Krylov. Κάνοντας μία παρένθεση, αναφέρουμε, πως ο j -

διάστατος υποχώρος Krylov, $K^j(A, r_0)$, για ένα γραμμικό σύστημα $[A][x]=[b]$ με μη ιδιάζοντα πίνακα A , ορίζεται σαν το γραμμικό περίβλημα των διανυσμάτων $[r_0], [A][r_0], \dots, [A]^{j-1}[r_0]$ για ένα δεδομένο αρχικό υπόλοιπο $[r]_0=[b]-[A][x]_0$.

Αναφερόμενοι και πάλι στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.8.1, λόγω της χρήσης της Απορροφητικής Οριακής Συνθήκης (2.119) για τον τερματισμό του πλέγματος, το σύστημα στο οποίο καταλήγουμε είναι μιγαδικό. Η επέκταση της τεχνικής των Συζυγών Κλίσεων στο χώρο των μιγαδικών αριθμών, ισχύει μόνο για τα μιγαδικά συστήματα, που είναι Ερμιτιανά ($[A]=[A]^*$, όπου $[A]^*$ ο ανάστροφος συζυγής του A). Για τα μη-Ερμιτιανά συστήματα είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου των Συζυγών Κλίσεων στις Κάθετες Εξισώσεις $[\tilde{A}]^* [x]=[\tilde{A}]^* [b]$. Εναλλακτικά, μπορούμε να διαχωρίσουμε τα πραγματικά και φανταστικά μέρη ενός μη-Ερμιτιανού συστήματος και να εφαρμόσουμε μία τεχνική, όπως τη Γενικευμένη Ελαχίστου Υπολοίπου (GMRES), που να είναι κατάλληλη για το προκύπτον πραγματικό μη-συμμετρικό σύστημα.

Χάρης στη μορφή της συνθήκης των Kannelopoulos-Webb, που περιλαμβάνει μόνον άρτιας τάξης παραγώγους, το μιγαδικό σύστημα, που πρέπει να λύσουμε, είναι συμμετρικό. Για συμμετρικά μιγαδικά συστήματα μπορούμε να εφαρμόσουμε την τεχνική των Συζυγών Ορθογωνίων Συζυγών Κλίσεων (Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient), που εισήγαγαν οι Van der Vorst και Melissen [16]. Η τεχνική αυτή προκύπτει από την κλασική μέθοδο των Συζυγών Κλίσεων για μιγαδικά συστήματα, αν αντικαταστήσουμε το μιγαδικό (Ερμιτιανό) εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \quad (3.73)$$

με τη διγραμμική (bilinear) μορφή

$$\langle x^*, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (3.74)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, ο αστερίσκος υποδηλώνει μιγαδικό συζυγή. Τα υπόλοιπα $[r_k]$, που παράγει κατά τις επαναλήψεις της η τεχνική αυτή, ικανοποιούν τις συνθήκες Petrov Galerkin. Είναι, επομένως, συζυγώς ορθογώνια μεταξύ τους στο μιγαδικό χώρο και από το γεγονός αυτό προκύπτει το όνομα της τεχνικής. Ο αλγόριθμος της μεθόδου δίνεται σε μορφή ψευδοκώδικα στον

```

Υπολόγισε το  $r_0 = b - Ax_0$  για κάποια αρχική εκτίμηση  $x_0$ 
for    $i=1, 2, \dots$ 
     $\rho_{i-1} = \langle r_{i-1}^*, r_{i-1} \rangle$ 
    if  $i = 1$ 
         $p_i = r_0$ 
    else
         $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$ 
         $p_i = r_{i-1} + \beta_{i-1} p_{i-1}$ 
    end if
     $q_i = Ap_i$ 
     $\alpha_i = \rho_{i-1} / \langle p_i^*, q_i \rangle$ 
     $x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$ 
     $r_i = r_{i-1} - \alpha_i q_i$ 
    Ελεγχξε την σύγκλιση και συνέχισε αν χρειάζεται
end

```

Πίνακας 3.2: Η τεχνική των Συζυγών Ορθογωνίων Συζυγών Κλίσεων.

Ένα πιθανό πρόβλημα της τεχνικής αυτής συναντάται στην περίπτωση που έχουμε $\langle r_k^*, r_k \rangle = 0$, αφού κάτι τέτοιο μπορεί να συμβαίνει, ακόμα και για $\|r^*\| \neq 0$ και $\|r\| \neq 0$, δηλαδή, χωρίς να έχουμε σύγκλιση στη σωστή λύση. Αν συμβεί κάτι τέτοιο, η τεχνική δεν συγκλίνει και δεν έχει τη δυνατότητα να μας δώσει σωστό αποτέλεσμα. Ευτυχώς, στην πράξη, η κατάσταση αυτή είναι σχετικά σπάνια. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος, αν εμφανιστεί, είναι να τεχνική την μέθοδο με μία ελαφρά τροποποιημένη εκτίμηση της λύσης, ή να καταφύγουμε στη χρήση μιας άλλης Επαναληπτικής τεχνικής, όπως η GMRES [17]. Επίσης, έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία και στρατηγικές για την πρόληψη του προβλήματος (βλέπε Freund [18]).

Παρόμοιο πρόβλημα αντιμετωπίζει και η τεχνική των ΔιΣυζυγών Κλίσεων, που είναι εφαρμόσιμη για τα μη-Ερμιτανά μιγαδικά συστήματα. Όταν δεν παρουσιάζονται προβλήματα, έχει παρατηρηθεί [16] ότι, οι τεχνικές των Συζυγών Ορθογωνίων και των ΔιΣυζυγών Κλίσεων, εμφανίζουν, για το ίδιο σύστημα, όμοια συμπεριφορά σύγκλισης. Καθώς η πρώτη απαιτεί μόνο σχεδόν τις μισές αριθμητικές πράξεις ανά επανάληψη, σε σύγκριση με τη δεύτερη, είναι φανερό ότι στην πράξη είναι σχεδόν δύο φορές πιο γρήγορη.

Άλλοι πιθανοί ανταγωνιστές της τεχνικής των Συζυγών Ορθογωνίων Συζυγών Κλίσεων είναι η Γενικευμένη Τεχνική του Ελαχίστου Υπολοίπου (GMRES) και η Τετραγωνισμένη Τεχνική των Συζυγών Κλίσεων (CGS). Στη γενική περίπτωση και οι δύο αυτές τεχνικές χαρακτηρίζονται από ταχύτερη σύγκλιση. Επειδή, όμως, η GMRES έχει μεγάλες απαιτήσεις μνήμης και η CGS υψηλότερο υπολογιστικό κόστος ανά επανάληψη, η τεχνική των Συζυγών Ορθογωνίων Συζυγών Κλίσεων είναι και πάλι, στις περισσότερες περιπτώσεις, προτιμότερη.

3.5.4 Κριτήρια Τερματισμού Επαναληπτικών Τεχνικών

Κάθε Επαναληπτική τεχνική παράγει μία ακολουθία διανυσμάτων $[x_i]$, που συγκλίνουν στο διάνυσμα $[x]$, που ικανοποιεί το $n \times n$ σύστημα $[A][x]=[b]$. Για να είναι αποτελεσματική μία τεχνική, πρέπει να αποφασίζει, τότε να διακόψει τις επαναλήψεις. Αν και συνήθως δεν αποτελεί αντικείμενο ιδιαίτερης προσοχής, το θέμα του κριτηρίου σύγκλισης μιας Επαναληπτικής τεχνικής είναι πολύ σημαντικό, γιατί από την αποτελεσματική εφαρμογή του εξαρτάται, όχι μόνον η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, αλλά και η ταχύτητα, με την οποία θα τις πάρουμε.

Το ιδανικό κριτήριο θα ήταν αυτό, που θα διέκοπτε το βρόχο των επαναλήψεων, όταν το μέγεθος του σφάλματος $[e_i]=[x_i]-[x]$ πέφτει κάτω από ένα επιλεγμένο κατώφλι. Επειδή, όμως, δεν γνωρίζουμε την πραγματική λύση $[x]$, ο υπολογισμός του $[e_i]$ είναι αδύνατος. Αυτό, που έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε σε κάθε επανάληψη, είναι το υπόλοιπο $[r_i]=[A][x_i]-[b]$. Στο υπόλοιπο της παραγράφου αυτής περιγράφουμε τους τρόπους, με τους οποίους μετρούμε τα μεγέθη των διανυσμάτων $[e_i]$ και $[r_i]$, και τις σχέσεις, που τα συνδέουν.

Για την εκτίμηση των σφαλμάτων των Επαναληπτικών τεχνικών χρησιμοποιούμε τις νόρμες διανυσμάτων και πινάκων. Οι περισσότερες χρησιμοποιούμενες διανυσματικές νόρμες είναι

$$\|x\|_{\infty} \equiv \max_j |x_j| \quad (3.75)$$

$$\|x\|_1 \equiv \sum_j |x_j| \quad (3.76)$$

$$\|x\|_2 \equiv \left(\sum_j |x_j|^2 \right)^{1/2} \quad (3.77)$$

Για πίνακες, ορίζονται τρεις αντίστοιχες νόρμες

$$\|A\|_{\infty} \equiv \max_j \sum_k |a_{j,k}| \quad (3.78)$$

$$\|A\|_1 \equiv \max_k \sum_j |a_{j,k}| \quad (3.79)$$

$$\|A\|_E \equiv \left(\sum_{jk} |a_{j,k}| \right)^{1/2} \quad (3.80)$$

Όλες οι νόρμες ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (3.81)$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (3.82)$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad (3.83)$$

Η (3.83) ισχύει για την περίπτωση, που η νόρμα $\|A\|$ και η $\|x\|$ είναι αντίστοιχες. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο ζευγάρι είναι αυτό των $\|A\|_E$ και $\|x\|_2$.

Ένα χαρακτηριστικό, που διαφοροποιεί τις νόρμες αυτές, είναι η εξάρτησή τους από τη διάσταση. Έτσι, ένα διάνυσμα $[x]$ με n στοιχεία ομοίμορφα καταναμημένα μεταξύ 0 και 1 ικανοποιεί τη σχέση $\|x\|_\infty \leq 1$, αλλά η $\|x\|_2$ είναι ανάλογη του \sqrt{n} και η $\|x\|_1$ του n . Συνεπώς, ένα κριτήριο, που βασίζεται στην $\|x\|_1$ (ή $\|x\|_2$), ίσως χρειάζεται να προσαρμόζεται στο n (ή \sqrt{n}), ώστε να μην γίνεται υπερβολικά δύσκολη η ικανοποίησή του, για πολύ μεγάλα n .

Το πραγματικό σφάλμα και το υπόλοιπο για κάθε επανάληψη συνδέονται με τη σχέση

$$[e_i] = [x_i] - [x] = [A]^{-1} ([A][x_i] - [b]) = [A]^{-1} [r_i] \quad (3.84)$$

Κατά συνέπεια, ισχύει η ανισότητα

$$\|e_i\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r_i\| \quad (3.85)$$

Από την (3.85) είναι φανερό πως, ένα κριτήριο, που στηρίζεται στον έλεγχο του $\|r_i\|$, μας εξασφαλίζει ένα άνω φράγμα για τη νόρμα του πραγματικού σφάλματος $\|e_i\|$.

Για τη μελέτη της συμπεριφοράς των Επαναληπτικών τεχνικών, χρησιμοποιείται συχνά το λεγόμενο οπισθοδρομικό σφάλμα (backward error) [18, σελ. 51-57]. Σαν οπισθοδρομικό σφάλμα ορίζουμε τη μικρότερη δυνατή τιμή, που μπορεί να πάρει το $\max \{ \|\delta A\| / \|A\|, \|\delta b\| / \|b\| \}$, όπου με $[\delta A]$ και $[\delta b]$ συμβολίζουμε πίνακα και διάνυσμα για τα οποία το $[x_i]$ αποτελεί ακριβή λύση του συστήματος $([A] + [\delta A])[x_i] = ([b] + [\delta b])$. Επειδή, τα στοιχεία των $[A]$ και $[b]$ έχουν σφάλματα λόγω των αριθμητικών υπολογισμών κατά την παραγωγή τους, δεν αξίζει να συνεχίζουμε τις επαναλήψεις, όταν τα $[\delta A]$ και $[\delta b]$ γίνουν μικρότερα από αυτά τα σφάλματα. Έτσι, για παράδειγμα, αν η

ακρίβεια μηχανής είναι ε , δεν υπάρχει λόγος να προσπαθήσουμε να έχουμε $\|\delta A\| \leq \varepsilon \|A\|$ και $\|\delta b\| \leq \varepsilon \|b\|$, αφού και μόνον η αριθμητική στρωγγυλοποίηση των στοιχείων των $[A]$ και $[b]$ δημιουργεί σφάλματα μεγαλύτερα.

Το κριτήριο τερματισμού, που χρησιμοποιούμε, γράφεται με τη μορφή

$$\|r_i\| \leq S \equiv stop_tol \cdot (\|A\| \cdot \|x\| + \|b\|) \quad (3.86)$$

όπου $stop_tol$ είναι πραγματικός αριθμός, με τον οποίο καθορίζουμε, πόσο μικρό θέλουμε να είναι το τελικό υπόλοιπο. Το $stop_tol$ πρέπει να είναι μικρότερο της μονάδος και μεγαλύτερο της ακρίβειας μηχανής ε . Το κριτήριο (3.86) είναι ισοδύναμο με το να ζητάμε από το οπισθοδρομικό σφάλμα δA και δb να ικανοποιεί τις σχέσεις $\|\delta A\| \leq stop_tol \|A\|$ και $\|\delta b\| \leq stop_tol \|b\|$. Κάνοντας χρήση της (3.85), βρίσκουμε πως, το άνω φράγμα για τη νόρμα του πραγματικού σφάλματος δίνεται από τη σχέση

$$\|e_i\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r_i\| \leq stop_tol \cdot (\|A\| \cdot \|x\| + \|b\|) \quad (3.87)$$

Το κριτήριο που χρησιμοποιείται περισσότερο στην πράξη, έχει τη μορφή $\|r_i\| \leq S' \equiv stop_tol \|r_0\|$. Το κριτήριο αυτό δημιουργεί πολλά προβλήματα. Το βασικό του μειονέκτημα είναι η ισχυρή του εξάρτηση από την αρχική εκτίμηση της λύσης $[x_0]$. Αν $[x_0] = [0]$ (που είναι μια συχνή επιλογή), τότε $[r_0] = [b]$ με αποτέλεσμα το κριτήριο να είναι πολύ δύσκολο να ικανοποιηθεί, αν $\|b\| \ll \|A\| \cdot \|x\|$. Από την άλλη, αν το $[x_0]$ είναι πολύ μεγάλο και ανακριβές, τότε το $\|r_0\|$ θα είναι και αυτό μεγάλο, όπως και το S' και είναι πιθανό να έχουμε πρόωρο τερματισμό των επαναλήψεων.

3.5.5 Δείκτης Κατάστασης

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο των Θεμάτων Υλοποίησης, θα αναφερθούμε σε ένα μέτρο των αριθμητικών δυσκολιών που παρουσιάζονται κατά την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $[A][x] = [b]$. Αυτό είναι ο δείκτης κατάστασης (condition number) του πίνακα συντελεστών του $[A]$, που ορίζεται από την σχέση

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (3.88)$$

όπου με $\|\cdot\|$ συμβολίζουμε νόρμα πίνακα, ενώ $[A]^{-1}$ είναι ο αντίστροφός του A . Όπως είναι προφανές ένας διαγώνιος πίνακας έχει δείκτη κατάστασης μονάδα και αυτή είναι η ιδανική αν και σπάνια συναντώμενη στην πράξη κατάσταση. Αν και είναι σχετικά εύκολο να βρούμε την $\|A\|$, ο υπολογισμός της $\|A^{-1}\|$ δεν είναι καθόλου απλή υπόθεση. Ευτυχώς, σπάνια, απαιτείται η ακριβής τιμή του $cond(A)$. Στην πράξη, οποιαδήποτε καλή εκτίμηση του είναι αρκετή.

Πίνακες με μικρό δείκτη κοντά στη μονάδα χαρακτηρίζονται σαν καλής κατάστασης (well conditioned) και ο ίδιος όρος χρησιμοποιείται και για τα συστήματα, στα οποία εμφανίζονται σαν πίνακες συντελεστών. Ο δείκτης κατάστασης του συστήματος, στο οποίο καταλήγει μια προβολική μέθοδος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, μεγάλο ρόλο παίζουν οι συναρτήσεις βάσης και δοκιμής. Σημαντική, όμως, είναι και η επίδραση της μαθηματικής αναπαράστασης του φυσικού προβλήματος, που χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα οι ολοκληρωτικές εξισώσεις, συνήθως, καταλήγουν σε εξισώσεις πινάκων με καλύτερους δείκτες κατάστασης, από ό,τι τα συνοριακά προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Ένας άλλος παράγοντας, που επηρεάζει το δείκτη κατάστασης ενός συστήματος, είναι και το πλήθος των αγνώστων του. Ένας ιδιαίτερα κακός δείκτης κατάστασης, ίσως μάλιστα, αποτελεί ένδειξη ότι, ο αριθμός αγνώστων, που χρησιμοποιούμε, είναι υπερβολικά μεγάλος. Αυτό σημαίνει πως, το πληροφοριακό περιεχόμενο των συντελεστών του γραμμικού συστήματος δεν επαρκεί για τον ακριβή προσδιορισμό όλων των αγνώστων. Ένας άλλος τρόπος να συλλάβουμε διαισθητικά την έννοια της κακής κατάστασης ενός συστήματος είναι ότι, υποδηλώνει, πως κάποιες εξισώσεις του γίνονται σχεδόν «παράλληλες» (σχεδόν ταυτόσημες), είτε με άλλες μεμονωμένες εξισώσεις, είτε με συνδυασμούς τους.

Όμως, ο δείκτης κατάστασης, όσο πολύτιμος και αν είναι για την εκτίμηση της δυσκολίας επίλυσης ενός συστήματος, δεν είναι σωστό να χρησιμοποιείται και σαν κριτήριο για την αξιολόγηση της υπολογιστικής μεθόδου, από την υλοποίηση της οποίας προέκυψε το σύστημα αυτό, γιατί, τότε, υπάρχει κίνδυνος να καταλήξουμε σε λανθασμένα συμπεράσματα. Και αυτό γιατί έχει αποδειχτεί ότι, υπάρχουν μέθοδοι που, ενώ καταλήγουν σε πίνακες με μεγαλύτερους δείκτες κατάστασης από άλλες, τα αποτελέσματά τους είναι κατά πολύ ακριβέστερα. Μάλιστα, η εισαγωγή a priori πληροφορίας γύρω από το πρόβλημα, που επιλύεται στους αριθμητικούς κώδικες, με τους οποίους μοντελοποιείται, απαιτεί ανοικτές δομές, που συχνά οδηγούν σε πίνακες με κακούς δείκτες κατάστασης.

Βιβλιογραφία

- [1]. I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1967.
- [2]. *Asymptotic error expansion and defect correction in the finite element method*. Habilitationsschrift, Universität Heidelberg, 1991
- [3]. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press, 1989, pp. 47-52

- [4]. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1970, pp. 589-591
- [5]. W. Cheney and D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*. Monterey: Brooks/Cole Publishing, 1980.
- [6]. C. deBoor, "CADRE: An algorithm for numerical quadrature," in *Mathematical Software*, ed. J. Rice. New York: Academic, 1971, pp. 417-449.
- [7]. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [8]. H. Engels, *Numerical Quadrature and Cubature*. London: Academic, 1980.
- [9]. A. W. Mathis and A. F. Peterson, "A primer on Gaussian quadrature rules," *ACES Newslett.*, vol. 11, pp. 50-59, July 1996.
- [10]. A. S. Kronrod, *Nodes and Weights of Quadrature Formulas*, New York: Consultants Bureau, 1965.
- [11]. W. Gautschi and S. Notaris, "Gauss Kronrod quadrature formulas for weight functions of the Bernstein-Szego type," *J. Computat. Appl. Math.*, vol. 29, pp. 199-224, 1989.
- [12]. R. Piessens, E. deDoncker-Kapenga, C. W. Uberhuber, and D. K. Kahaner, *QUADPACK : A Subroutine Package for Automatic Integration*, Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [13]. G. R. Cowper, "Gaussian quadrature formulas for triangles," *Int. J. Numer. Methods*, 1996
- [14]. D. A. Dunavant, "High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 21, pp. 1129-1148, 1985
- [15]. R. Cools and P. Rabinowitz, "Monomial cubature rules since 'Stroud': A compilation," *J. Computat. Appl. Math.*, vol. 48, pp. 309-326, 1993.
- [16]. H. A. van der Vorst and J. B. M. Melissen, "A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax = b$, where A is symmetric complex," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, no. 2, pp. 706-708, Mar. 1990

-
- [17]. Y. Saad and M. Schultz, "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," *SIAM J Sci. Statist. Comput.*, vol. 7, pp. 856-869, 1986
- [18]. R. Freund, "Conjugate gradient-type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices," *SIAM J Sci. Statist. Comput.*, vol. 13, pp. 425-448, 1992.]

Κεφάλαιο 4

Πιστοποίηση Αποτελεσμάτων - Βελτιστοποίηση

4.1 Πιστοποίηση Λογισμικού Μοντελοποίησης Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας

Ο όρος πιστοποίηση, γενικά, αναφέρεται στη διακρίβωση της εγκυρότητας κάποιου αντικειμένου ή διαδικασίας. Κατά την ανάπτυξη λογισμικού μοντελοποίησης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, η πιστοποίηση έχει την έννοια της εκτίμησης της ακρίβειας των αριθμητικών αποτελεσμάτων, που μας παρέχει το λογισμικό αυτό.

Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ενός μοντέλου, που προσομοιώνει ένα σύστημα μετάδοσης πληροφορίας, είναι εξαιρετικά σημαντική για πολλούς λόγους. Ο βασικότερος είναι πως, αποτελέσματα που, βρίσκουμε με εύκολο και αποδοτικό τρόπο, αλλά είναι ανακριβή, δεν έχουν καμιά απολύτως αξία και, ενδέχεται, να είναι και επιβλαβή. Δεν πρέπει να ξεχνάμε πως, ο στόχος μας δεν είναι η ταχεία εύρεση οποιωνδήποτε λύσεων, αλλά ο αποδοτικός εντοπισμός ορθών λύσεων. Στο ίδιο πνεύμα, οφείλουμε να παρατηρήσουμε πως, αποτελέσματα αδιευκρίνιστης ακρίβειας είναι στην καλύτερη περίπτωση, αμφισβητούμενης αξίας.

Το επιθυμητό είναι η ακρίβεια να βρίσκεται κάτω από τον έλεγχο του χρήστη των υπολογιστικών μεθόδων μοντελοποίησης. Επίσης, ο χρήστης πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει, αλλά και να ρυθμίζει, τους συσχετισμούς ανάμεσα στην ακρίβεια και την ταχύτητα της μεθόδου. Για παράδειγμα, καθώς το πλήθος των συναρτήσεων βάσης και, κατά συνέπεια, των αγνώστων αυξάνει, πόσο μειώνεται το σφάλμα και πόσο αυξάνει το υπολογιστικό κόστος;

Υπάρχει μια πλειάδα τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να ελέγξουμε την ορθότητα των υπολογιζόμενων αποτελεσμάτων των μεθόδων, που υλοποιούμε. Μερικοί από τους πιο συνηθισμένους είναι οι ακόλουθοι:

- Έλεγχος ισχύος της αρχής της αμοιβαιότητας.
- Παρατήρηση της συμπεριφοράς των κοντινών πεδίων.
- Έλεγχος του βαθμού ικανοποίησης των οριακών συνθηκών.
- Παρατήρηση ενδεχόμενης μη φυσικής συμπεριφοράς.
- Έλεγχος ικανοποίησης της αρχής διατήρησης της ενέργειας του συστήματος.
- Παρατήρηση της αριθμητικής σύγκλισης.
- Σύγκριση με ανεξάρτητα αριθμητικά αποτελέσματα.
- Σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις.

Δεν πρέπει να συγχέουμε την πιστοποίηση μιας υπολογιστικής μεθόδου με τον έλεγχο του προγράμματος, που την υλοποιεί. Ο έλεγχος αυτός δεν είναι τίποτε άλλο παρά η διαδικασία, που επιβεβαιώνει ότι, ο κώδικας παράγει αποτελέσματα συνεπή με το σχεδιασμό του. Η πιστοποίηση διερευνά το πόσο καλά τα υπολογιζόμενα αποτελέσματα συμφωνούν με τη φυσική πραγματικότητα. Όπως είναι προφανές, ο έλεγχος είναι μια αναγκαία, αλλά όχι και ικανή συνθήκη για την εξασφάλιση αποδεκτής και ικανοποιητικής συμπεριφοράς από τον κώδικα, που αναπτύξαμε. Η πιστοποίηση, είναι που προσδιορίζει πόσο αξιόπιστα είναι τα αποτελέσματα, που παράγει ένας δεδομένος κώδικας για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και μας πληροφορεί, εάν μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυση και σχεδίαση πραγματικού υλισμικού.

Μερικές περιπτώσεις, που ο έλεγχος και η πιστοποίηση είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην πράξη, είναι

- όταν μεταφέρουμε κώδικες μεταξύ υπολογιστών,
- για την επιβεβαίωση της διατήρησης της ορθής λειτουργίας ενός υπολογιστικού κώδικα, σε ένα δεδομένο υπολογιστικό σύστημα, για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα,
- για την παροχή καθοδήγησης στο μοντελοποιητή, σε ό,τι αφορά την εγκυρότητα των υπολογιζόμενων αποτελεσμάτων,
- όταν τα υπολογιζόμενα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται σε σχεδιαστικές εφαρμογές.

Η επίτευξη των παραπάνω στόχων μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον καλύτερο τρόπο, μέσω της καθιέρωσης ενός πρωτοκόλλου εκτίμησης σφαλμάτων μοντελοποίησης. Το πρωτόκολλο αυτό θα χρησιμοποιεί

- προϋπολογισμένες και αποθηκευμένες περιπτώσεις ελέγχου των αριθμητικών προγραμμάτων,
- τυποποιημένες νόρμες σφαλμάτων,
- εσωτερικούς ελέγχους, δηλαδή ελέγχους, που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό ενός κώδικα μοντελοποίησης,
- εξωτερικούς ελέγχους, δηλαδή ελέγχους που απαιτούν δεδομένα από εξωτερικές πηγές.

Όλες οι παραπάνω τεχνικές παρέχουν στο μοντελοποιητή ένα είδος μέτρου αξίας (figure of merit), που αφορά τα παραγόμενα αποτελέσματα.

Από τη σκοπιά του χρήστη, πολλά είναι τα προβλήματα, που μπορούν να παρουσιαστούν, κατά τη φάση της εκτέλεσης ενός κώδικα μοντελοποίησης. Σύμφωνα με τον E. K. Miller [1], τα προβλήματα αυτά χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες:

Τύπου 0, στα οποία ο κώδικας, όπως λέμε «κολλάει». Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται στο λογισμικό του συστήματος, ή στον ίδιο τον κώδικα μοντελοποίησης, περιπτώσεις που και οι δύο είναι εύκολο να διαγνωστούν.

Τύπου 1, κατά τα οποία ο κώδικας «τρέχει» και ολοκληρώνεται, αλλά παρέχει εμφανώς λανθασμένα αποτελέσματα. Όπως και στα προηγούμενου τύπου προβλήματα αυτό μπορεί να οφείλεται στο λογισμικό του υπολογιστικού συστήματος, ή στον ίδιο τον κώδικα. Στην τελευταία περίπτωση, μπορεί να έχουμε να κάνουμε με ένα σφάλμα κατάστρωσης (formulation), υλοποίησης (implementation), ή κωδικοποίησης (coding).

Τύπου 2, όπου ο κώδικας και πάλι «τρέχει», αλλά αυτή τη φορά παρέχοντας αποτελέσματα που, αν και μοιάζουν φυσικώς αποδεκτά, εντούτοις είναι στην πραγματικότητα λανθασμένα. Οι πιθανές αιτίες είναι οι ίδιες, όπως και στις δύο προηγούμενες κατηγορίες. Τα προβλήματα αυτού του τύπου είναι, μάλλον, τα πιο δύσκολα στο χειρισμό τους, καθώς ο μοντελοποιητής έχει μειωμένες πιθανότητες να τα εντοπίσει, πέρα από το γεγονός ότι και οι αιτίες τους είναι λιγότερο εμφανείς.

Τύπου 3, τα οποία χαρακτηρίζονται από την παραγωγή ορθών και χρήσιμων αποτελεσμάτων, που, όμως, ερμηνεύονται λανθασμένα από το χρήστη, δεν αναγνωρίζονται ως ορθά, ή χρησιμοποιούνται με λάθος τρόπο. Αυτού του είδους η κατάσταση μπορεί να προκύψει για διάφορους λόγους, ανάμεσα στους οποίους είναι μη ρεαλιστικές προσδοκίες, αδικαιολόγητος σκεπτικισμός και/ή τυφλή εμπιστοσύνη από την πλευρά του μοντελοποιητή.

Τα πραγματικά λάθη, που συσχετίζονται με ένα υπολογιστικό μοντέλο, μπορούμε να τα ορίσουμε με διάφορους τρόπους. Δύο θεμελιώδεις πηγές σφαλμάτων μοντελοποίησης είναι οι ακόλουθες:

- 1) **Σφάλματα φυσικής μοντελοποίησης** (physical modeling errors ε_p), τα οποία προέρχονται από την αντικατάσταση του πραγματικού φυσικού προβλήματος, που μας ενδιαφέρει, με μια εξιδανικευμένη μαθηματική αριθμητική αναπαράσταση.
- 2) **Σφάλματα αριθμητικής μοντελοποίησης** (numerical modeling error, ε_n), η αιτία των οποίων έγκειται στην εύρεση μιας προσεγγιστικής μόνο λύσης της εξιδανικευμένης αναπαράστασης. Τα σφάλματα αυτά αναλύονται σε δύο συνιστώσες:
 - i. **Σφάλμα λύσης** (solution error), $\varepsilon_{sol} = I_{sol}(s) - I_{true}(s)$, όπου s είναι κάποια μεταβλητή παρατήρησης. Το σφάλμα αυτό είναι η διαφορά, που μπορεί να υπάρχει, ανάμεσα στα υπολογιζόμενα αποτελέσματα και την ακριβή λύση, ακόμα και στην περίπτωση που το προκύπτον γραμμικό σύστημα εξισώσεων μπορούσε να λυθεί επακριβώς. Αιτία του σφάλματος αυτού είναι ο πεπερασμένος αριθμός αγνώστων.
 - ii. **Σφάλμα εξίσωσης** (equation error) ε_{eq} . Η συνιστώσα αυτή του ολικού σφάλματος προέρχεται από τη μη απόλυτη ικανοποίηση της εξίσωσης, που μπορεί να προκύψει κατά την αριθμητική επίλυση, εξαιτίας σφαλμάτων στρογγυλοποίησης (λόγω πεπερασμένης ακρίβειας υπολογισμών), ή όταν χρησιμοποιούμε μια επαναληπτική τεχνική, εξαιτίας περιορισμένης σύγκλισης των λύσεων.

Για τις περισσότερες αριθμητικές λύσεις $\varepsilon_{eq} \sim \varepsilon_{ro}$, όπου ε_{ro} είναι το σφάλμα στρογγυλοποίησης και, έτσι, το σφάλμα αριθμητικής μοντελοποίησης ισούται με το σφάλμα λύσης, δηλαδή $\varepsilon_n \sim \varepsilon_{sol}$ και είναι πρωταρχικού ενδιαφέροντος. Η μείωσή του επιτυγχάνεται, συνήθως, αυξάνοντας τον αριθμό των αγνώστων. Το πλήθος αυτό μπορεί, θεωρητικά, να γίνει τόσο μεγάλο ώστε $\varepsilon_n < \varepsilon_p$.

4.2 Παραδείγματα Πιστοποίησης Λογισμικού με Αναλυτικά Επιλύσιμα Προβλήματα

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε συγκεκριμένα παραδείγματα ελέγχου της ευστάθειας και ακρίβειας του λογισμικού μοντελοποίησης προβλημάτων, για τα οποία υπάρχουν αναλυτικές λύσεις και, επομένως, μπορούν εύκολα να ποσοτικοποιηθούν τα αντίστοιχα σφάλματα μοντελοποίησης.

4.2.1 Αριθμητικός Έλεγχος Κώδικα Πεπερασμένων Στοιχείων

Για να ελέγξουμε την ισχύ και την ακρίβεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 2 και να εξακριβώσουμε τις απαιτήσεις της σε μνήμη και υπολογιστικό χρόνο, στην παράγραφο αυτή την εφαρμόζουμε για ένα πρόβλημα για το οποίο γνωρίζουμε την αναλυτική λύση. Πρόκειται για το πρόβλημα σκέδασης επιπέδου κύματος από διηλεκτρική ομοιογενή σφαίρα.

Θεωρούμε ότι το προσπίπτον πεδίο είναι ένα πολωμένο κύμα

$$\mathbf{E}^{inc} = \hat{\mathbf{x}}E_0 e^{jk_0(\sin\theta' \cos\phi' x + \sin\theta' \sin\phi' y + \cos\theta' z)} \quad (4.1)$$

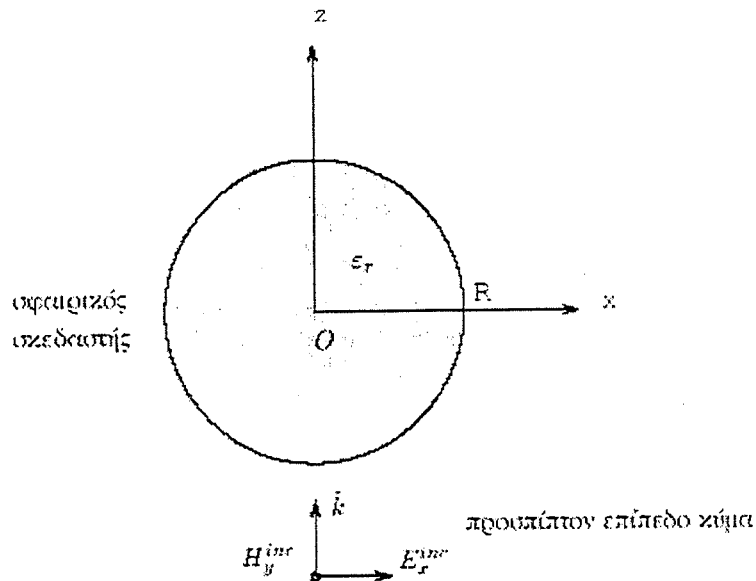
$$\mathbf{H}^{inc} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 (\cos\theta' \hat{\mathbf{y}} - \sin\theta' \sin\phi' \hat{\mathbf{z}}) e^{jk_0(\sin\theta' \cos\phi' x + \sin\theta' \sin\phi' y + \cos\theta' z)} \quad (4.2)$$

όπου $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ο κυματαριθμός ελευθέρου χώρου και (ϕ^i, θ^i) οι γωνίες πρόσπτωσης.

Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζουμε το πρόβλημα σκέδασης, που επιλύουμε. Οι γωνίες πρόσπτωσης του επιπέδου κύματος είναι $\phi^i = 0$, $\theta^i = \pi$ και η συχνότητα του 90 MHz. Η διηλεκτρική σφαίρα έχει ακτίνα $R = 0.265$ m και σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = 16$. Ισχύει $k_0 a = 1/2$, ενώ $E_0 = 1$ V/m.

Η αναλυτική λύση του προβλήματος αυτού, μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της σειράς του Mie [2]. Οι σφαιρικές συνιστώσες του σκεδαζόμενου πεδίου στον ελεύθερο χώρο γύρω από τη σφαίρα ($r > R$) δίνονται από τις σχέσεις

$$E_r^s = \frac{E_0 \cos\phi}{jk_0^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_n \hat{H}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos\theta) \quad (4.3)$$



Σχήμα 4.1: Το πρόβλημα με το οποίο ελέγχουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

$$E_{\theta}^s = -\frac{E_0 \cos \phi}{k_0 r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin \theta} c_n \hat{H}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) - \frac{1}{j} b_n \hat{H}_n^{(2)'}(k_0 r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^1(\cos \theta) \right) \quad (4.4)$$

$$E_{\phi}^s = \frac{E_0 \sin \phi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \hat{H}_n^{(2)}(k_0 r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^1(\cos \theta) - \frac{1}{j \sin \theta} b_n \hat{H}_n^{(2)'}(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \right) \quad (4.5)$$

Στο εσωτερικό της σφαίρας ($r \leq R$), οι σχέσεις, που δίνουν τις σφαιρικές συνιστώσες του σκεδαζόμενου πεδίου, έχουν τη μορφή

$$E_r^s = \frac{E_0 \cos \phi}{j k_0^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) d_n \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) - \cos \phi \sin \theta E_0 e^{-jk_0 r \cos \theta} \quad (4.6)$$

$$E_{\theta}^s = -\frac{E_0 \cos \phi}{k_0 r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin \theta} e_n \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) - \frac{1}{j \sqrt{\epsilon_r}} d_n \hat{J}_n'(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^1(\cos \theta) \right) - \cos \theta \cos \phi E_0 e^{-jk_0 r \cos \theta} \quad (4.7)$$

$$E_{\phi}^s = \frac{E_0 \sin \phi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e_n \hat{J}_n(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^1(\cos \theta) - \frac{1}{j \sqrt{\epsilon_r} \sin \theta} d_n \hat{J}_n'(kr) P_n^1(\cos \theta) \right) + \sin \phi E_0 e^{-jk_0 r \cos \theta} \quad (4.8)$$

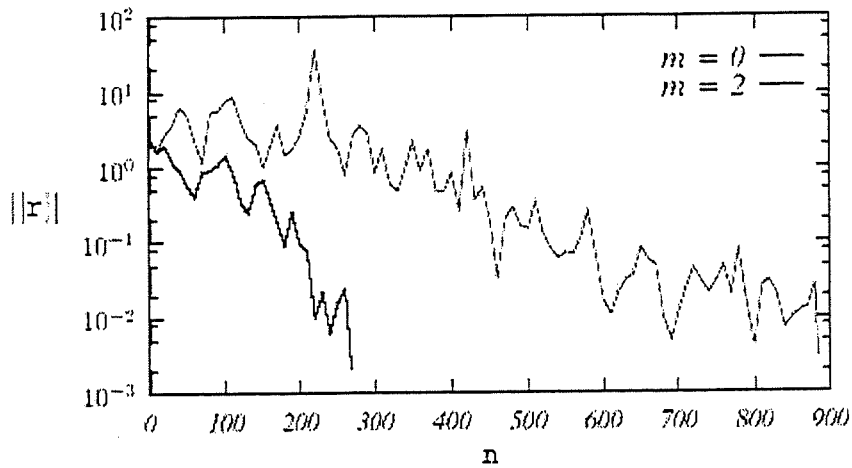
Στις παραπάνω σχέσεις, $k = \sqrt{\epsilon_r} k_0$, είναι ο κυματαριθμός στο εσωτερικό της σφαίρας, $\hat{J}_n(x) = \sqrt{\pi x / 2} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $\hat{H}_n^{(2)} = \sqrt{\pi x / 2} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$ και $P_n^1 = -(\partial P_n^1 / \partial \theta)$. J_n είναι η Bessel συνάρτηση πρώτου είδους και τάξης n , $H_n^{(2)}$ είναι η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους και τάξης n , και το P_n είναι πολυώνυμο Legendre. Ο τόπος υποδηλώνει παραγωγή ως προς $k_0 r$ ή kr , αντίστοιχα. Οι συντελεστές b_n, c_n, d_n και e_n δίνονται στην παραπομπή [2,(6-113)].

Οι Απορροφητικές Οριακές Συνθήκες που χρησιμοποιούμε είναι αυτές του Sommerfeld (2.118) και των Chatterjee-Volakis ((2.119 με $\beta = 1/(2jk_0)$). Το τεχνητό σύνορο, πάνω στο οποίο τις εφαρμόζουμε, έχει κυβικό σχήμα και το τοποθετούμε σε απόσταση $0.3\lambda_0$ από την εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας. Κάνουμε χρήση έξι διαφορετικών μοντέλων, για να μελετήσουμε τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Τα βασικά χαρακτηριστικά, που διαφοροποιούν τα μοντέλα αυτά, είναι οι πυκνότητες των πλεγμάτων τους (και, κατά συνέπεια, το πλήθος των συναρτήσεων βάσης τους) και η Απορροφητική Οριακή Συνθήκη που εφαρμόζουμε. Επομένως, μπορούμε να αναφερόμαστε σε κάθε μοντέλο, χρησιμοποιώντας την τετράδα (n_x, n_y, n_z, m) , που περιέχει τα πλήθη των κόμβων του πλέγματός του στις τρεις καρτεσιανές διευθύνσεις και την τάξη της Απορροφητικής Οριακής Συνθήκης, που επιβάλουμε στο σύνορό της. Στον Πίνακα 4.1 δίνουμε τα πλήθη των κόμβων (n_{nd}), των τετραέδρων (n_{nel}) και των ακμών (n_{ned}), μαζί με τα μη μηδενικά στοιχεία (n_{nze}) του πίνακα συντελεστών του συστήματος, για καθένα από τα έξι μοντέλα.

Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος, στο οποίο καταλήγει η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για κάθε μοντέλο, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των Συζυγώς Ορθογωνίων Συζυγών Κλίσεων. Η μέθοδος συγκλίνει για όλα τα μοντέλα. Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζουμε τα πλήθη των επαναλήψεων, που απαιτούνται για τη σύγκλιση της μεθόδου σε κάθε μοντέλο, καθώς και τη νόρμα του τελικού υπολοίπου της σε κάθε περίπτωση. Στο Σχήμα 4.2 σχεδιάζουμε τη νόρμα του υπολοίπου, σαν συνάρτηση του αριθμού των επαναλήψεων, που έχουν εκτελεστεί, για τα μοντέλα (11,11,11,0) και (11,11,11,2). Τόσο από τον Πίνακα 4.1, όσο και από το Σχήμα 4.2, διαπιστώνουμε ότι, τα μοντέλα με Απορροφητική Οριακή Συνθήκη δευτέρας τάξης παρουσιάζουν αργότερη σύγκλιση.

Μοντέλο	n_{nd}	n_{nel}	n_{ned}	n_{nze}
(11,11,11,0)	1331	5000	6930	70530
(11,11,11,2)	1331	5000	6930	70530
(21,21,21,0)	9261	40000	51660	546060
(21,21,21,2)	9261	40000	51660	546060
(41,41,41,0)	68921	320000	398520	4296120
(41,41,41,2)	68921	320000	398520	4296120

Πίνακας 4.1: Τα τοπολογικά και αλγεβρικά χαρακτηριστικά των μοντέλων που χρησιμοποιούμε.

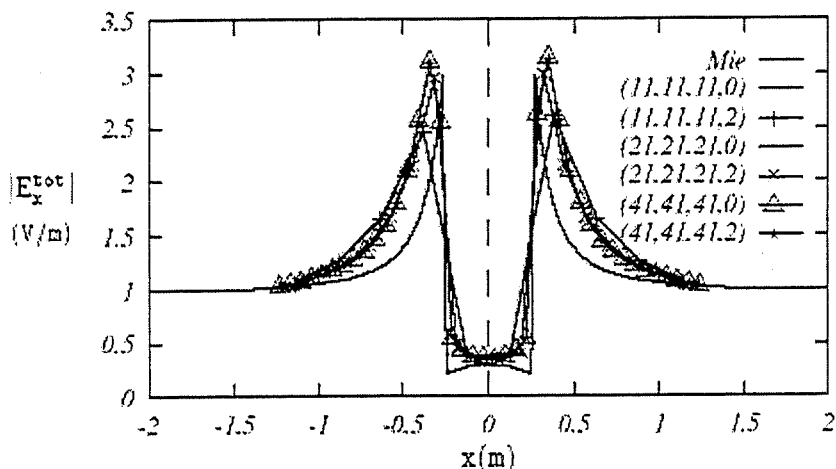


Σχήμα 4.2: Η μείωση της νόρμας του υπολοίπου $\|r\|$, σαν συνάρτηση του πλήθους των επαναλήψεων για τα μοντέλα $(11,11,11,0)$ και $(11,11,11,2)$.

Μοντέλο	Πλήθος Επαναλήψεων για Σύγκλιση	Νόρμα Τελικού Υπολοίπου
$(11,11,11,0)$	268	0.00206
$(11,11,11,2)$	883	0.00301
$(21,21,21,0)$	492	0.00688
$(21,21,21,2)$	3232	0.00904
$(41,41,41,0)$	676	0.01608
$(41,41,41,2)$	5088	0.04604

Πίνακας 4.2: Τα πλήθη των επαναλήψεων και τα τελικά υπόλοιπα για τα έξι αριθμητικά μοντέλα.

Στο Σχήμα 4.3, συγκρίνουμε τις κατανομές του μέτρου της x συνιστώσας του ολικού πεδίου πάνω στον x άξονα για τα έξι μοντέλα, με την αντίστοιχη κατανομή της αναλυτικής λύσης. E_x είναι η κάθετη πεδιακή συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, που είναι ασυνεχής πάνω στην επιφάνεια της διηλεκτρικής σφαίρας, κατά έναν παράγοντα $\epsilon_r = 16$.



Σχήμα 4.3: Το μέτρο της x συνιστώσας του ολικού πεδίου πάνω στον άξονα x , για έξι αριθμητικά μοντέλα και την αναλυτική λύση.

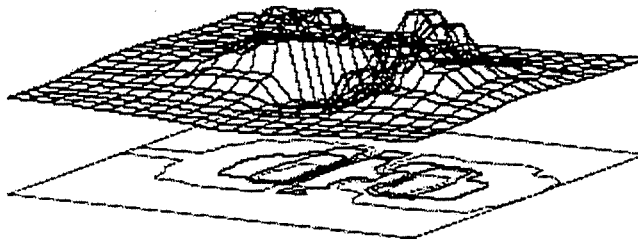
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων δείχνει να έχει συγκλίνει, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 4.3. Επιπλέον, τα αριθμητικά αποτελέσματα βρίσκονται κοντά στην αναλυτική κατανομή και αυτό σημαίνει ότι, χαρακτηρίζονται από ικανοποιητική ακρίβεια, παρά τα σχετικά αραιά πλέγματα που χρησιμοποιούμε και την τοποθέτηση της Απορροφητικής Οριακής Συνθήκης πολύ κοντά στο εξωτερικό σύνορο της διηλεκτρικής σφαίρας.

Ένα άλλο συμπέρασμα, στο οποίο καταλήγουμε από την παρατήρηση του Σχήματος 4.3, είναι ότι, η χρήση της Απορροφητικής Οριακής Συνθήκης δευτέρας τάξης δεν συνεπάγεται για το πρόβλημα αυτό κάποια σημαντική αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων, σε σύγκριση με τη συνθήκη μηδενικής τάξης. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το τίμημα, που πρέπει να πληρώσουμε, για την εφαρμογή της συνθήκης δευτέρας τάξης σε μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων για τη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου, κάνει την επιλογή της όχι ιδιαίτερα ελκυστική.

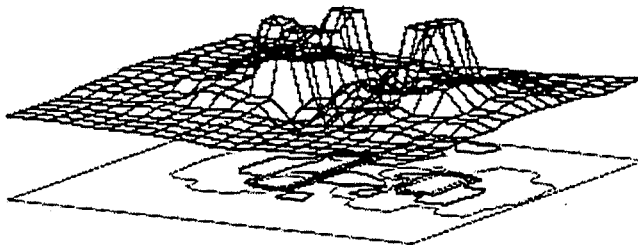
Τα μεγαλύτερα σφάλματα στις αριθμητικές κατανομές του Σχήματος 4.3 εντοπίζονται στην περιοχή γύρω από και πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ διηλεκτρικού και αέρα. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο, καθώς στην περιοχή αυτή παρουσιάζεται η πιο ραγδαία μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου, στο χώρο που εξετάζουμε. Ένας τρόπος, για να μειώσουμε τα σφάλματα στην περιοχή αυτή, είναι να χρησιμοποιήσουμε τοπικά μεγαλύτερη πυκνότητα πλέγματος.

Στα Σχήματα 4.4 και 4.5 βλέπουμε τις κατανομές του μέτρου του ολικού πεδίου πάνω στα επίπεδα xy και xz , αντίστοιχα, για το μοντέλο $(21,21,21,0)$. Διακρίνουμε και στα σχήματα αυτά την έντονη και απότομη μεταβολή του πεδίου στη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στον αέρα και το διηλεκτρικό. Η μεταβολή αυτή γίνεται ολοένα και πιο ομαλή, όσο απομακρυνόμαστε από την

επιφάνεια της σφαίρας. Στις περιοχές αυτές ομαλότερης μεταβολής, μπορούμε να έχουμε αραιότερη πυκνότητα πλέγματος, χωρίς μείωση της ακρίβειας. Παρατηρούμε, επίσης, στα Σχήματα 4.4 και 4.5, τη συμμετρία, που χαρακτηρίζει τις κατανομές του πεδίου και, που είναι άμεση απόρροια της γεωμετρικής συμμετρίας του προβλήματος, που εξετάζουμε. Η συμμετρία αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική σε ρεαλιστικά προβλήματα, γιατί υπάρχουν τρόποι να αξιοποιηθεί, για να πετύχουμε μείωση των υπολογιστικών απαιτήσεων.



Σχήμα 4.4: Η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο επίπεδο xy .



Σχήμα 4.5: Η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο επίπεδο xz .

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις διαφορές ανάμεσα στα αριθμητικά αποτελέσματα των διαφόρων μοντέλων, για να πάρουμε εκτιμήσεις των σφαλμάτων διακριτοποίησης. Η μέθοδος, με την οποία γίνεται αυτό, έχει προταθεί από τον Peterson και βασίζεται στην τεχνική επέκτασης του Richardson. Καθώς το σφάλμα, που εισάγουν τα ακμικά στοιχεία, είναι, όπως είπαμε, της τάξης $O(\Delta)$, τα αριθμητικά αποτελέσματα για δύο διαφορετικά μοντέλα δίνονται από τις σχέσεις

$$R_n = A + c\Delta_n \quad (4.9)$$

$$R_m = A + c\Delta_m \quad (4.10)$$

Μοντέλο	$\Delta(m)$	$ E^{tot}(0,0,0) $ (V/m)	Εκτιμώμενο Σφάλμα	Πραγματικό Σφάλμα
(11,11,11,0)	0.3577	0.342		0.049
(21,21,21,0)	0.1788	0.406	-0.0639	0.113
(41,41,41,0)	0.0894	0.373	0.0327	0.08
(11,11,11,2)	0.3577	0.360		0.067
(21,21,21,2)	0.1788	0.417	-0.0569	0.127
(41,41,41,2)	0.0894	0.373	0.0436	0.08

Πίνακας 4.3: Εκτιμώμενα και πραγματικά σφάλματα στο κέντρο της διηλεκτρικής σφαίρας.

όπου A είναι η ακριβής λύση, Δ_n και Δ_m είναι τα μήκη των μέγιστων ακμών των δύο μοντέλων και c είναι ένας άγνωστος συντελεστής. Από τις (4.9) και (4.10), παίρνουμε

$$E_m = c\Delta_m = \{(R_n - R_m)/(\Delta_n - \Delta_m)\}\Delta_m \quad (4.11)$$

όπου με E_m συμβολίζουμε την εκτίμηση του σφάλματος για το μοντέλο m . Στον Πίνακα 4.3, συγκρίνουμε τις εκτιμήσεις των αριθμητικών σφαλμάτων, που παίρνουμε με την τεχνική, που μόλις περιγράψαμε, με τα πραγματικά σφάλματα, που προσδιορίζουμε από τη γνωστή αναλυτική λύση. Η διαφορά, που παρατηρούμε, οφείλεται στην ύπαρξη του σφάλματος, που εισάγει η χρήση της Απορροφητικής Οριακής Συνθήκης και, το οποίο, δεν έχει τη δυνατότητα να εκτιμήσει η μέθοδος του Peterson. Πρέπει, επομένως, να θεωρούμε τις εκτιμήσεις της μεθόδου αυτής, σαν κάτω φράγματα των πραγματικών σφαλμάτων. Παρά τις όποιες αδυναμίες της, η μέθοδος του Peterson είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τις περιπτώσεις, που δεν έχουμε διαθέσιμη αναλυτική λύση, όπως συμβαίνει κατά κανόνα στην πράξη.

Στον Πίνακα 4.4, δίνουμε τις απαιτήσεις της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε μνήμη και υπολογιστικό χρόνο, για τα έξι αριθμητικά μοντέλα, που μελετούμε. Είναι φανερό πως, καθώς αυξάνεται η πυκνότητα του πλέγματος, αυξάνονται γεωμετρικά οι αριθμητικές πράξεις και οι θέσεις μνήμης, που απαιτούνται. Καταλαβαίνουμε, επομένως, πως, για μεγάλα και σύνθετα τρισδιάστατα προβλήματα, οι υπολογιστικές απαιτήσεις της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να ικανοποιηθούν με συμβατικούς σειριακούς υπολογιστές. Ένας τρόπος για να ξεπεράσουμε την δυσκολία αυτή είναι η χρήση υπερυπολογιστών παράλληλης αρχιτεκτονικής. Με το θέμα αυτό ασχολούμαστε στο κεφάλαιο 6.

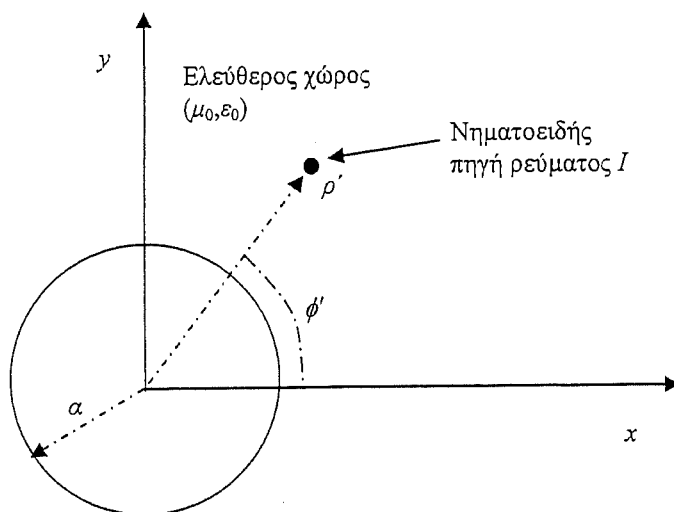
Μοντέλο	Απαιτούμενη Μνήμη (bytes)	Υπολογιστικός Χρόνος (sec)
(11,11,11,0)	3468463	1.2
(11,11,11,2)	3468559	3.5
(21,21,21,0)	26175919	444.1
(21,21,21,2)	26176015	2910.2
(41,41,41,0)	205258383	4831.1
(41,41,41,2)	205258495	36195.6

Πίνακας 4.4: Οι απαιτήσεις σε μνήμη και υπολογιστικό χρόνο για τα έξι αριθμητικά μοντέλα.

4.2.2 Αριθμητικός Έλεγχος Κωδίκων Βοηθητικών Πηγών

Σε συνέχεια της συζήτησης, που προηγήθηκε στην παράγραφο 2.7.4 και, προκειμένου να διευκρινιστούν περαιτέρω τα ζητήματα ευστάθειας και σύγκλισης της MAS και η εξάρτησή τους από τη θέση των βοηθητικών πηγών, σε σχέση με τα ιδιάζοντα σημεία (δηλαδή τα σημεία απειρισμού) του πραγματικού πεδίου, που περιγράφουν οι πηγές αυτές, παρουσιάζονται εδώ τα αριθμητικά αποτελέσματα για δύο διδιάστατα προβλήματα, των οποίων γνωρίζουμε την αναλυτική λύση.

Καταρχήν, εξετάζουμε το πρόβλημα σκέδασης από τέλεια αγωγίμο κύλινδρο απείρου μήκους και κυκλικής διατομής ακτίνας a , στον οποίο προσπίπτει το πεδίο νηματοειδούς πηγής απείρου μήκους και σταθερού ηλεκτρικού ρεύματος I (όπου υποθέτουμε $e^{j\omega t}$ χρονική εξάρτηση), τοποθετημένης παράλληλα στον άξονα του κυλίνδρου, σε απόσταση ρ' από την αρχή των αξόνων και σε γωνία ϕ' (βλέπε Σχήμα 4.6). Τόσο ο αγωγίμος κύλινδρος, όσο και η νηματοειδής πηγή βρίσκονται μέσα στον ελεύθερο χώρο, με μαγνητική διαπερατότητα μ_0 , διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_0 και κυματαριθμό k_0 .



Σχήμα 4.6: Γεωμετρία ενός τέλεια αγωγικού κυλίνδρου κυκλικής διατομής ακτίνας a , που ακτινοβολείται από νηματοειδή πηγή σταθερού ηλεκτρικού ρεύματος I .

Με τη βοήθεια της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών, είναι δυνατό να προσδιοριστεί η αναλυτική λύση για το πρόβλημα ([2], sec. 5-9). Η λύση αυτή δίνεται από τη σχέση

$$E_z^s = E_0 \psi_0 + 2E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \quad (4.12)$$

όπου

$$E_0 = \frac{k_0^2 I}{4\omega \epsilon_0} \quad (4.13)$$

είναι ένας σταθερός παράγοντας και

$$\psi_n = \frac{J_n(k_0 a H_n^{(2)}(k_0 \rho'))}{H_n^{(2)}(k_0 a)} H_n^{(2)}(k_0 \rho') \cos[n(\phi - \phi')], n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (4.14)$$

είναι στοιχειώδεις αδιάστατες κυματικές συναρτήσεις, με k_0 τον κυματαριθμό στον ελεύθερο χώρο, J_n τη συνάρτηση Bessel n -τάξης και $H_n^{(2)}$ τη συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους n -τάξης. Κάνοντας χρήση των ασυμπτωτικών εκφράσεων

$$J_n(k_0 x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ek_0 x}{2n} \right)^n, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.15)$$

$$H_n^{(2)}(k_0 x) \sim j \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ek_0 x}{2n} \right)^{-n}, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.16)$$

εύκολα αποδεικνύεται ότι, για μεγάλες τάξεις n , η (4.14) γίνεται

$$\psi_n = \frac{j}{\pi n} \left(\frac{a^2}{\rho\rho'} \right)^n \cos[n(\phi - \phi')], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (4.17)$$

Επομένως, μελετώντας τη σύγκλιση της σειράς της (4.12), προκύπτει ότι [3], αυτή συγκλίνει απόλυτα στην περίπτωση που $a^2/(\rho\rho') < 1$, ενώ αποκλίνει στην περίπτωση που $a^2/(\rho\rho') > 1$. Επομένως, η σειρά που αναπαριστά το σκεδαζόμενο πεδίο στο εξωτερικό του κυλίνδρου ($\rho \geq a$) συγκλίνει, επίσης, ομοίμορφα και στην περιοχή $a^2/\rho' < \rho < a$ στο εσωτερικό του κυλίνδρου, ενώ αποκλίνει στην περιοχή $\rho \leq a^2/\rho'$. Επομένως, το σκεδαζόμενο πεδίο, το οποίο έχει αναλυτική λύση στο εξωτερικό του κυλίνδρου, μπορεί να έχει αναλυτική συνέχεια και σε μια περιοχή στο εσωτερικό αυτού, μέχρι τα σημεία, για τα οποία ισχύει $\rho \leq a^2/\rho'$.

Προκειμένου να εκτιμηθεί η ακρίβεια της MAS λύσης, ελέγχεται το μέσο σφάλμα ικανοποίησης της οριακής συνθήκης

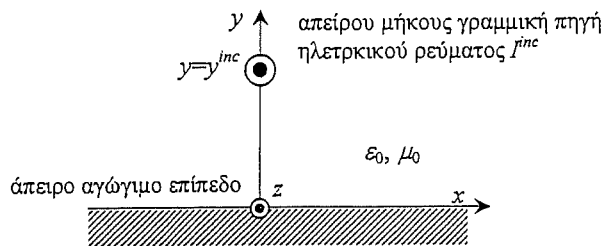
$$\Delta E_{bc} = \frac{1}{ME_0} \sum_{m=1}^M |E_z^{inc}(\rho_m) + \sum_{n=1}^N E_{zn}(\rho_m)|$$

όπου N ο αριθμός των βοηθητικών πηγών (AS) στη βοηθητική επιφάνεια, M ο αριθμός των σημείων ελέγχου (CP) πάνω στη φυσική επιφάνεια, E_z^{inc} το ηλεκτρικό πεδίο, εξαιτίας της επιβαλλόμενης πηγής, E_{zn} το ηλεκτρικό πεδίο, που οφείλεται στη n -στή βοηθητική πηγή και ρ_m η απόσταση (δηλαδή, το μέτρο του διανύσματος θέσης) του μεσοδιαστήματος μεταξύ m και $m+1$ CP.

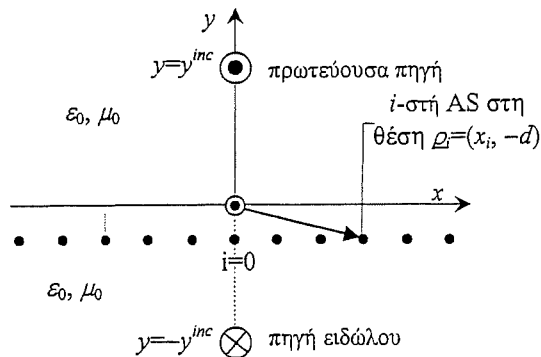
Θεωρούμε το συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, που μελετάται στην [3] ($\alpha = 1/k_0$, $I = 1$, $\rho' = 2a$, $\phi' = 0$ και $k_0 = 1$). Εξετάζοντας την τιμή του μέσου σφάλματος ικανοποίησης της οριακής συνθήκης για διαφορετικό πλήθος N AS, οι οποίες είναι τοποθετημένες σε διάφορες αποστάσεις r_i από τη φυσική επιφάνεια, παρατηρούμε [3] ότι, για $r_i \leq a^2/\rho' = \alpha/2$, η αριθμητική λύση για το σκεδαζόμενο πεδίο αποκλίνει. Επομένως, το πραγματικό σκεδαζόμενο πεδίο έχει σημεία ιδιομορφίας μεταξύ της βοηθητικής και της φυσικής επιφάνειας και φαινόμενα αστάθειας παρατηρούνται, καθώς ο αριθμός των AS αυξάνει, με την έννοια ότι, προκειμένου να επιτευχθεί μικρή βελτίωση του σφάλματος,

απαιτείται σημαντική μεταβολή των AS. Αξίζει να σημειωθεί, ακόμα, ότι, όσο το r_i μειώνεται, τόσο τα φαινόμενα αυτά εντείνονται. Στην περιοχή $r_i \geq a_2/\rho'$, οι AS είναι τοποθετημένες σε τέτοια απόσταση από τη φυσική επιφάνεια, ώστε η αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου συγκλίνει ομοιόμορφα και η βοηθητική επιφάνεια περικλείει όλα τα σημεία ιδιομορφίας του σκεδαζόμενου πεδίου. Στην περίπτωση αυτή [3], το σφάλμα μειώνεται ομοιόμορφα με την αύξηση του N , αλλά ο ρυθμός μείωσης είναι μεγαλύτερος, όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση της βοηθητικής επιφάνειας από τη φυσική επιφάνεια.

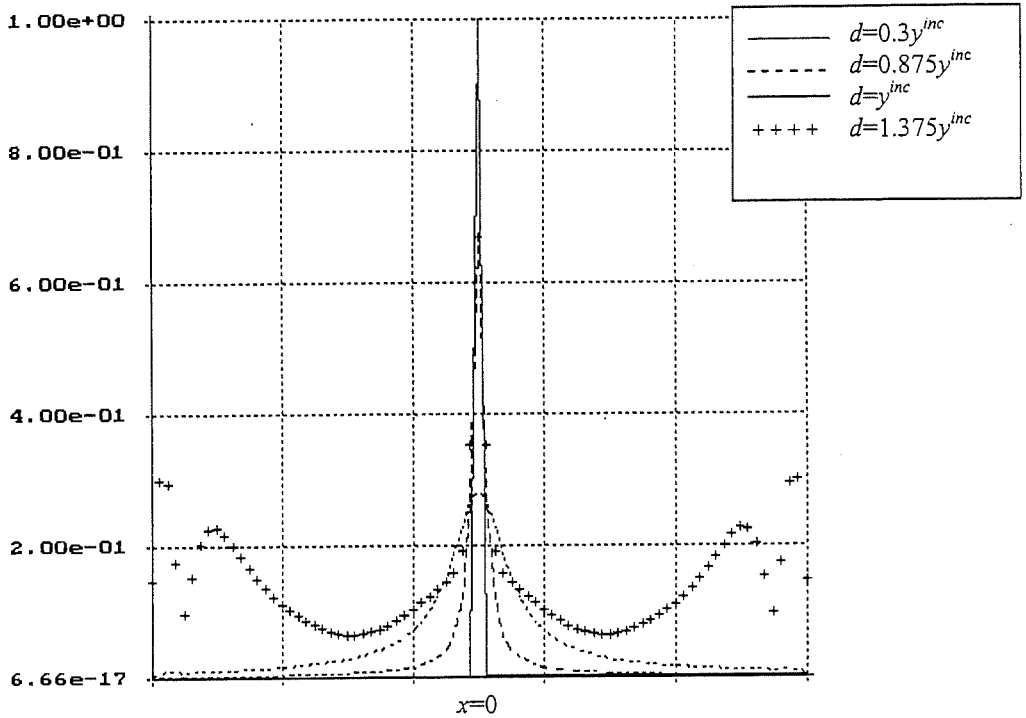
Το δεύτερο διδιάστατο πρόβλημα, το οποίο εξετάζουμε, είναι αυτό μιας γραμμικής πηγής ηλεκτρικού ρεύματος απείρου μήκους, που ακτινοβολεί πάνω από ένα άπειρο, τέλεια αγωγίμο επίπεδο.



Σχήμα 4.7: Ακτινοβολία γραμμικής πηγής απείρου μήκους κατά την z διεύθυνση σταθερού ηλεκτρικού ρεύματος I^{inc} , σε απόσταση y^{inc} πάνω από τέλεια αγωγίμο επίπεδο απείρων διαστάσεων, τοποθετημένο στο $y = 0$.



Σχήμα 4.8: Ισοδύναμο MAS μοντέλο.



Σχήμα 4.9: Πλάτη των βοηθητικών πηγών I_i , κανονικοποιημένα ως I^{inc} , για διάφορες τιμές της απόστασης d .

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7, μια γραμμική πηγή σταθερού ηλεκτρικού ρεύματος, της οποίας το μήκος εκτείνεται άπειρα στον z άξονα ενός xyz καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, ακτινοβολεί στον ελεύθερο ημιχώρο ($y \geq 0$), πάνω από ένα άπειρα αγωγίμο xz επίπεδο, τοποθετημένο στο $y = 0$. Η θέση της πηγής στο xy επίπεδο καθορίζεται από το διάνυσμα θέσης $y^{inc}\hat{y}$. Έτσι, θεωρώντας $e^{+j\omega t}$ χρονική εξάρτηση, η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος της πηγής και το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{J}^{inc}(x, y) = J_z^{inc}(x, y)\hat{z} = I^{inc}\delta(x)\delta(y - y^{inc})\hat{z} \quad (A/m^2) \quad (4.18)$$

και

$$\mathbf{E}^{inc}(x, y) = E_z^{inc}(x, y)\hat{z} = -\frac{\omega\mu_0}{4} I^{inc} H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{x^2 + (y - y^{inc})^2}\right)\hat{z} \quad (V/m) \quad (4.19)$$

αντίστοιχα, όπου I^{inc} (Ampere) είναι το σταθερό ρεύμα της γραμμικής πηγής, $\delta(x)$ είναι η συνάρτηση δέλτα, $H_0^{(2)}$ είναι η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους μηδενικής τάξης και k_0, μ_0 είναι ο κυματαριθμός και η μαγνητική διαπερατότητα

του κενού, αντίστοιχα. Το πρωτεύον πεδίο \mathbf{E}^{inc} επάγει ρεύματα αγωγιμότητας στο αγώγιμο επίπεδο, τα οποία, με τη σειρά τους, παράγουν ένα δευτερεύον πεδίο, το σκεδαζόμενο πεδίο \mathbf{E}^s , στον ημιάπειρο χώρο $y \geq 0$. Αυτή είναι η ποσότητα, που θέλουμε να υπολογίσουμε, σε κάθε σημείο παρατήρησης στον ημιάπειρο χώρο ($y \geq 0$). Αφού όλη η διάταξη είναι ομοιόμορφη κατά μήκος της z διεύθυνσης, τα ρεύματα αγωγιμότητας, που επάγονται στο αγώγιμο επίπεδο xz , έχουν συνιστώσα μόνο στη z διεύθυνση, είναι ανεξάρτητα του z και μπορούν να περιγραφούν από μια συνεχή κατανομή πυκνότητας ρεύματος, σαν

$$\mathbf{J}^s(x, y) = J^s(x)\delta(y)\hat{\mathbf{z}} \quad (A/m^2) \quad (4.20)$$

όπου $J^s(x)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση ρεύματος. Με όμοιο τρόπο, το άγνωστο σκεδαζόμενο πεδίο έχει συνιστώσα μόνο στη z διεύθυνση και μπορεί να περιγραφεί, σαν μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της ρευματικής κατανομής $J^s(x)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(x, y) &= -j\omega A^s(x, y) = E_z^s(x, y)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= -\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{-\infty}^{\infty} J^s(x') H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{(x-x')^2 + y^2}\right) dx' \hat{\mathbf{z}} \quad (V/m) \end{aligned} \quad (4.21)$$

όπου το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^s(x, y) &= A_z^s(x, y)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}'} J^s(x', y') \frac{e^{-jk_0\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \quad (Wb/m) \end{aligned} \quad (4.22)$$

έχει μηδενική απόκλιση, αφού είναι ανεξάρτητο του z και έχει μόνο z συνιστώσα και, για τον υπολογισμό της χωρικού ολοκληρώματος της εξίσωσης (4.22) μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα και η

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ja\sqrt{t^2 + u^2}}}{\sqrt{t^2 + u^2}} dt = -j\pi H_0^{(2)}(au) \quad (4.23)$$

Μια προσέγγιση στο πρόβλημα είναι να λύσουμε ως προς τα άγνωστα ρεύματα $J^s(x)$ (και όχι ως προς το άγνωστο σκεδαζόμενο πεδίο $\mathbf{E}^s(x, y)$) και, μετά, να κάνουμε χρήση της εξίσωσης (4.21), για να υπολογίσουμε το $\mathbf{E}^s(x, y)$. Αυτό επιτυγχάνεται, επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη, που αφορά το ολικό ηλεκτρικό πεδίο πάνω στο τέλεια αγώγιμο επίπεδο,

$$E_z^{inc}(x, y=0) + E_z^s(x, y=0) = 0 \quad (4.24)$$

Εάν οι εξισώσεις (4.19) και (4.21) αντικατασταθούν στην (4.24), προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση ως προς $J^s(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J^s(x') H_0^{(2)}(k_0 |x-x'|) dx' = -I^{inc} H_0^{(2)}\left(k_0 \sqrt{x^2 + (y^{inc})^2}\right) \text{ για } y=0 \quad (4.25)$$

Επιλύοντας την (4.25), παίρνουμε, όπως αναμενόταν, μέγιστη τιμή για το J^s στο σημείο προβολής της πρωτεύουσας πηγής ρεύματος πάνω στο αγωγίμο επίπεδο xz (δηλαδή, στο σημείο $x=0, y=0$).

Μια εναλλακτική προσέγγιση στο πρόβλημα είναι να λύσουμε ως προς το σκεδαζόμενο πεδίο $E^s(x,y)$, κάνοντας χρήση της MAS και, στη συνέχεια, να υπολογίσουμε τα άγνωστα ρεύματα J^s απευθείας από την κατανομή του μαγνητικού πεδίου στο αγωγίμο επίπεδο xz . Ακολουθώντας «κλασική» MAS κατάστρωση (βλέπε παράγραφο 2.7.2), ορίζουμε μια ισοδύναμη κατάσταση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.8, σύμφωνα με την οποία, το σκεδαζόμενο πεδίο $E^s(x,y)$ εκφράζεται ως υπέρθεση των πεδίων, που παράγουν οι $(2N+1)$ AS. Αυτές οι AS έχουν διεύθυνση κατά τον z άξονα και άγνωστα σταθερά ρεύματα I_i ($i = -N, \dots, 0, \dots, N$) και είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, κατά μήκος της «βοηθητικής γραμμής», στις θέσεις $\rho_i = x_i \hat{x} - d \hat{y}$, με $x_{-i} = -x_i$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10. Επομένως, το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο στον ημίγειρο χώρο ($y \geq 0$) δίνεται από τη σχέση

$$E^s(x,y) = -\frac{\omega \mu_0}{4} \sum_{i=-N}^N I_i H_0^{(2)}\left(k_0 \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}\right) \hat{z} \quad (V/m) \quad (4.26)$$

Τα άγνωστα ρεύματα I_i μπορούν να υπολογιστούν, επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη (4.24) (point-matching) σε $(2M+1)$ διακριτά CP, δηλαδή $x = x_j$ ($j = -M, \dots, 0, \dots, M$) στο αγωγίμο επίπεδο $y=0$, όπως

$$\sum_{i=-N}^N I_i H_0^{(2)}\left(k_0 \sqrt{(x_j - x_i)^2 + d^2}\right) = -I^{inc} H_0^{(2)}\left(k_0 \sqrt{x_j^2 + (y^{inc})^2}\right) \quad (4.27)$$

Η απόσταση της «βοηθητικής γραμμής» $y = -d$ από το τέλεια αγωγίμο επίπεδο ($y=0$) επηρεάζει σημαντικά την αποδοτικότητα της MAS λύσης. Για να το δείξουμε αυτό, υπολογίζουμε τη MAS λύση, για διάφορες αποστάσεις d . Τα προκύπτοντα πλάτη των I_i AS παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.11, κανονικοποιημένα ως προς το πλάτος I^{inc} της πρωτεύουσας γραμμικής πηγής. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι, το πλάτος της AS στο σημείο $\rho_{i=0} = -d \hat{y}$ ($x_{i=0} = 0$), που αντιστοιχεί στην προβολή της πρωτεύουσας πηγής πάνω στο αγωγίμο επίπεδο, έχει πάντα τη μέγιστη τιμή. Αυτήν την AS την ονομάζουμε AS μηδενικής τάξης. Τα πλάτη των υπόλοιπων AS ($i \neq 0$) είναι συμμετρικά ως προς τον y άξονα και προοδευτικά μειώνονται, σε σχέση με την AS μηδενικής τάξης. Καθώς η «βοηθητική γραμμή» απομακρύνεται από την επιφάνεια του τέλεια αγωγίμου επιπέδου, το πλάτος της AS μηδενικής τάξης αυξάνει, ενώ η επίλυση του MAS γραμμικού συστήματος δίνει όλο και λιγότερες AS με μη-μηδενικό πλάτος. Η παρατήρηση βρίσκεται, βέβαια, σε αρμονία με τη γενική ιδιότητα της MAS, σύμφωνα με την οποία, όσο πιο κοντά βρίσκονται οι AS στην πραγματική

επιφάνεια του σκεδαστή, τόσο περισσότερες AS χρειάζονται, για να περιγράψουν το σκεδαζόμενο πεδίο. Για $d = y^{inc}$, μόνο μία βοηθητική πηγή, που είναι τοποθετημένη στο σημείο του ειδώλου της πρωτεύουσας πηγής (δηλαδή, η AS μηδενικής τάξης), εμφανίζει μη μηδενικό πλάτος. Στην περίπτωση αυτή, αρκεί μόνον αυτή η AS και ένα μόνον CP, οπουδήποτε πάνω στο $y = 0$ τέλεια αγώγιμο επίπεδο για την ικανοποίηση της οριακής συνθήκης (4.24) και, επομένως, για την περιγραφή της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος $J^s(x)$ στο επίπεδο $y = 0$ και του σκεδαζόμενου πεδίου $E^s(x,y)$ στον ημιάπειρο χώρο ($y \geq 0$). Αυτή η μοναδική AS (η μηδενικής τάξης) είναι μια νηματοειδής πηγή απείρου μήκους κατά μήκος της z -διεύθυνσης (ίδιου τύπου και πόλωσης με την πρωτεύουσα πηγή), τοποθετημένη στο είδωλο της πρωτεύουσας πηγής ως προς το τέλεια αγώγιμο επίπεδο και το σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα που φέρει, υπολογίζεται από τη MAS λύση ότι, είναι ίδιο με το ρεύμα I^{inc} της πρωτεύουσας πηγής, με 180° διαφορά φάσης (δηλαδή, $I_{i=0} = -I^{inc}$). Επομένως, αυτή η λύση, η οποία είναι και η βέλτιστη ως προς το μέγεθος του παραγόμενου γραμμικού συστήματος εξισώσεων, συμπίπτει με τη λύση, που θα παίρναμε, χρησιμοποιώντας την κλασική θεωρία ειδώλων. Για $d > y^{inc}$, η ακρίβεια της MAS λύσης επιδεινώνεται: το πλάτος της AS μηδενικής τάξης μειώνεται, εμφανίζονται «πλευρικές» AS με σημαντικά (μη-μηδενικά) πλάτη κατά μήκος της «βοηθητικής γραμμής» $y = -d$ και παρουσιάζονται αριθμητικές αστάθειες, καθώς αυξάνει ο αριθμός των AS, με την έννοια ότι, μια πολύ μικρή βελτίωση στην ικανοποίηση της οριακής συνθήκης απαιτεί σημαντική αλλαγή στα πλάτη των ρευμάτων των AS.

Επιλέξαμε το παραπάνω απλό παράδειγμα, για να δείξουμε τη σημασία της θέσης των AS στην επίλυση ενός MAS προβλήματος, επειδή μας είναι γνωστή η ακριβής λύση του από τη θεωρία ειδώλων. Σύμφωνα με αυτή, η έννοια της πηγής-ειδώλου εισάγεται, για να ληφθούν υπόψη οι ανακλάσεις από το τέλεια αγώγιμο επίπεδο (δηλαδή, για να αντικατασταθεί το τέλεια αγώγιμο επίπεδο). Με άλλα λόγια, το σκεδαζόμενο πεδίο $E^s(x,y)$ του ημιάπειρου χώρου ($y \geq 0$) υπολογίζεται από αυτή την μοναδική πηγή-είδωλο, το οποίο σημαίνει ότι, το $E^s(x,y)$ παρουσιάζει ιδιομορφία (απειρίζεται) στο σημείο της πηγής-ειδώλου. Η MAS δίνει συγκλίνουσες λύσεις, όταν αυτό το σημείο ιδιομορφίας (απειρισμού) δεν περιλαμβάνεται στο χώρο μεταξύ της «βοηθητικής γραμμής» $y = -d$ και του αγώγιμου επιπέδου $y = 0$. Βέλτιστη λύση δίνει η MAS, εάν οι AS (που, στην περίπτωση μας, είναι μόνο μία, η μηδενικής τάξης) τοποθετηθούν ακριβώς στο σημείο ιδιομορφίας (απειρισμού) του $E^s(x,y)$. Αντίθετα, εάν η ιδιομορφία βρίσκεται μεταξύ της βοηθητικής γραμμής $y = -d$ και του τέλεια αγώγιμου επιπέδου $y = 0$, η MAS λύση δεν συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει διότι, όσο κι αν αυξήσουμε τον αριθμό των AS (οι οποίες, τώρα, είναι τοποθετημένες «πίσω» από το είδωλο της πηγής) δεν μπορεί να υπάρξει κάποιος συνδυασμός τους, που να μπορεί να παράγει σκεδαζόμενο πεδίο $E^s(x,y)$, με ιδιομορφία στο συγκεκριμένο σημείο.

Τα παραπάνω σχόλια μπορούν να γενικευθούν και είναι πολύ σημαντικά στην αντιμετώπιση προβλημάτων, στα οποία δεν είναι γνωστές, εκ των προτέρων, οι ακριβείς θέσεις ιδιομορφίας του σκεδαζόμενου πεδίου και, ακόμη χειρότερα, αυτές οι θέσεις εξαρτώνται από τη συχνότητα. Όπως δηλώνεται στις [3],[4] και έχουμε τονίσει και στην παράγραφο 2.7.4, εάν δεν υπάρχουν

ιδιομορφίες του σκεδαζόμενου πεδίου μεταξύ της επιφάνειας στην οποία τοποθετούνται οι AS και της πραγματικής επιφάνειας του σκεδαστή, τότε η MAS λύση δεν συγκλίνει απαραίτητα. Παρόλα αυτά, θα πρέπει να τονιστεί ότι [3], ακόμα και στην τελευταία αυτή περίπτωση, όπου δεν υπάρχουν μαθηματικά αποδεκτές λύσεις, μπορούμε, ακολουθώντας «κλασική» MAS, να πάρουμε αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας, για συγκεκριμένες εφαρμογές που χρειαζόμαστε σαν μηχανικοί, προτού εμφανιστούν αριθμητικές αστάθειες.

4.3 Γενετικοί Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης

Από τις σημαντικότερες, ίσως, φάσεις στην ανάπτυξη ενός συστήματος μετάδοσης πληροφορίας είναι η βελτιστοποίηση της σχεδίασής του. Οι παραδοσιακές τεχνικές βελτιστοποίησης αναζητούν τις καλύτερες δυνατές λύσεις, χρησιμοποιώντας κλίσεις (gradients) συναρτήσεων, ή και τυχαίες υποθέσεις (random guesses).

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης, που στηρίζονται στον υπολογισμό κλίσεων (gradient methods), συγκλίνουν γρήγορα στη σωστή λύση (το ελάχιστο κάποιου συναρτησιακού), αρκεί να βρισκόμαστε εξ αρχής κοντά στη λύση αυτή. Έχουν, όμως, τα μειονεκτήματα ότι, μπορεί να «κολλήσουν» σε τοπικά ελάχιστα, απαιτούν υπολογισμούς κλίσεων, δουλεύουν μόνο με συνεχείς μεταβλητές και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μικρό αριθμό παραμέτρων. Οι μέθοδοι τυχαίων αναζητήσεων (Monte Carlo techniques) αντιμετωπίζουν, επίσης, προβλήματα με τοπικά ελάχιστα και, επιπλέον, είναι πολύ αργές.

Κατά τη βελτιστοποίηση συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, αντιμετωπίζουμε προβλήματα με μεγάλο αριθμό παραμέτρων, που επιπλέον είναι και διακριτές. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε την ελαχιστοποίηση των πλευρικών λοβών στο διάγραμμα ακτινοβολίας μιας στοιχειοκεραίας, όπου, τόσο το πλάτος, όσο και οι φάσεις των ρευμάτων διέγερσης των στοιχείων της λαμβάνουν κβαντισμένες τιμές. Αν και το πεδίο αναζήτησης δεν έχει άπειρους συνδυασμούς, το πλήθος τους είναι τόσο μεγάλο, ώστε καθίσταται πρακτικά, αδύνατη η εξαντλητική αναζήτηση.

Μια σχετικά νέα τεχνική βελτιστοποίησης, που είναι ικανή να χειριστεί με επιτυχία μεγάλα πλήθη διακριτών παραμέτρων, είναι αυτή των Γενετικών Αλγορίθμων. Πατέρας των Γενετικών Αλγορίθμων θεωρείται ο John Holland, που τους πρότεινε για πρώτη φορά στα μέσα της δεκαετίας του 1960. Σημαντική, όμως, είναι και η συνεισφορά του μαθητή του David Goldberg, που ανέπτυξε την τεχνική, έτσι που να είναι δυνατή η εφαρμογή της στην πράξη για ρεαλιστικά και σημαντικά προβλήματα.

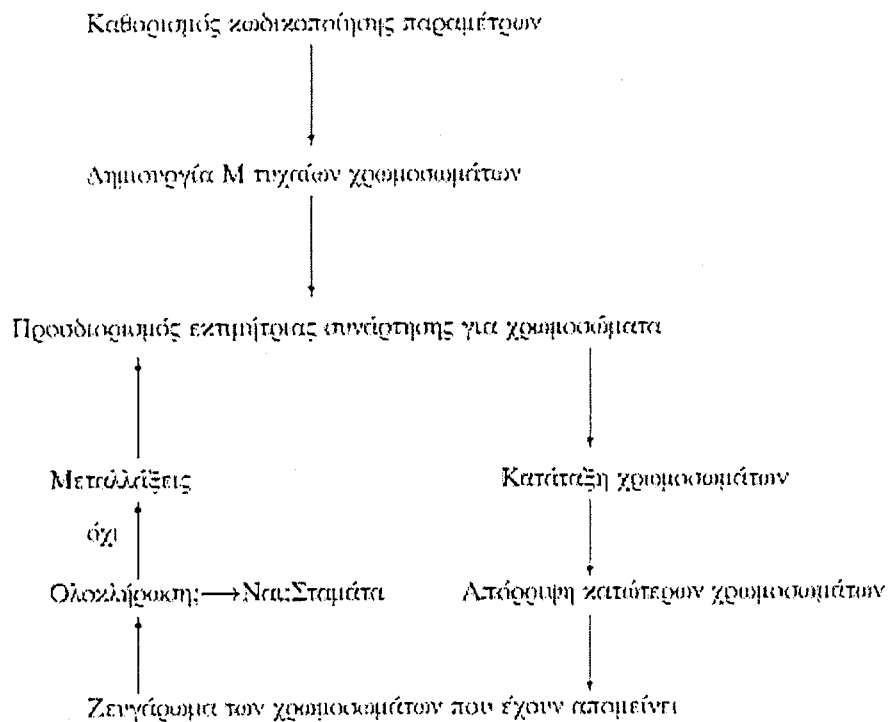
Στον τομέα της προσομοίωσης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, οι Γενετικοί Αλγόριθμοι έχουν βρει ευρεία εφαρμογή [5], όπως, για παράδειγμα, στη βελτιστοποίηση στοιχειοκεραίων, αλλά και στη σχεδίαση πολυστρωματικών μικροκυματικών απορροφητών.

Στην συνέχεια, θα περιγράψουμε τα βασικότερα χαρακτηριστικά των Γενετικών Αλγορίθμων και θα αναφέρουμε τους τρόπους, με τους οποίους

μπορούμε να τους αξιοποιήσουμε, στα πλαίσια της βελτιστοποίησης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας.

Θεμελιώδη λίθο κάθε Γενετικού Αλγόριθμου αποτελεί η δομή, που καλείται Γονίδιο (Gene). Στη γλώσσα των Γενετικών Αλγορίθμων, με τον όρο αυτό αναφερόμαστε σε μια δυαδική κωδικοποίηση (binary encoding) μιας παραμέτρου του συστήματος, που αναλύουμε. Για κάθε σύνολο γονιδίων, χρησιμοποιούμε τον όρο Χρωμόσωμα (Chromosome). Με κάθε χρωμόσωμα πρέπει να συσχετίζουμε μια Συνάρτηση Κόστους (Cost Function), η οποία αποτελεί ένδειξη της καταλληλότητας του εν λόγω χρωμοσώματος.

Ένας Γενετικός Αλγόριθμος ξεκινά με μια μεγάλη συλλογή τυχαία δημιουργημένων χρωμοσωμάτων. Το πρώτο του βήμα είναι να υπολογίσει τις συναρτήσεις κόστους, για καθένα από τα χρωμοσώματα αυτά. Στην συνέχεια, ταξινομεί τα χρωμοσώματα, με βάση τις τιμές της συνάρτησης κόστους. Τα κατατάσσει σε μια διατεταγμένη λίστα, με πρώτα τα καλύτερα προσαρμοσμένα (most-fit), δηλαδή αυτά για τα οποία η συνάρτηση κόστους λαμβάνει τις υψηλότερες τιμές και τελευταία τα λιγότερο προσαρμοσμένα (least fit). Το επόμενο βήμα του Γενετικού Αλγόριθμου περιλαμβάνει την απόρριψη των λιγότερο προσαρμοσμένων χρωμοσωμάτων, δηλαδή εκείνων, που καταλαμβάνουν τις τελευταίες θέσεις στη διατεταγμένη λίστα. Με τον τρόπο αυτό, παραμένει ένα υποσύνολο της αρχικής λίστας, που περιέχει τα καλύτερα (περισσότερο προσαρμοσμένα) χρωμοσώματα της τρέχουσας γενιάς.



Σχήμα 4.10: Διάγραμμα ροής ενός τυπικού Γενετικού Αλγορίθμου.

Τα χρωμοσώματα, που επιβιώνουν, γίνονται γονείς, ζευγαρώνοντας μεταξύ τους. Το ζευγάρωμα αυτό περιλαμβάνει την ανταλλαγή τμημάτων των γενετικών υλικών των γονέων, έτσι ώστε να παραχθούν δύο νέοι απόγονοι. Οι γονείς αναπαράγονται, στο βαθμό που απαιτείται για την αναπλήρωση των απορριφθέντων χρωμοσωμάτων. Έτσι, το συνολικό πλήθος των χρωμοσωμάτων παραμένει σταθερό στο τέλος κάθε επανάληψης του αλγορίθμου. Εκτός από το ζευγάρωμα, κατά την εξέλιξη ενός Γενετικού Αλγορίθμου, λαμβάνει χώρα και το φαινόμενο της Μετάλλαξης (Mutation), που προκαλεί μικρές τυχαίες μεταβολές στο γενετικό υλικό ενός χρωμοσώματος. Μόλις ολοκληρωθούν οι διαδικασίες ζευγαρώματος και μεταλλάξεων, ο Αλγόριθμος επανυπολογίζει τις συναρτήσεις κόστους για τα νέα χρωμοσώματα που έχουν προκύψει και η όλη διαδικασία ξεκινά από την αρχή. Ο αλγόριθμος τερματίζει, είτε μετά την παρέλευση ενός προκαθορισμένου πλήθους επαναλήψεων, ή όταν προκύψει μια αποδεκτή λύση (δηλαδή, με ικανοποιητική τιμή της συνάρτησης κόστους).

Βιβλιογραφία

- [1]. E. K. Miller, "PCs for AP and Other EM Reflections," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 42, no. 6, pp. 94-95, Dec. 2000.
- [2]. R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, New York: McGraw-Hill, 1961.
- [3]. Y. Leviatan, "Analytic Continuation Considerations when Using Generalized Formulations for Scattering Problems", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-38, pp. 1259-1263, 1990.
- [4]. R.S. Zaridze, R. Jobava, G. Bit-Banik, D. Karkasbadze, D.P. Economou and N.K. Uzunoglu, "The Method of Auxiliary Sources and Scattered Field Singularities (Caustics)", *J. Electr. Waves Applic.*, 12, pp. 1491-1507, 1998.
- [5]. R. L. Haupt, "An Introduction to Genetic Algorithms for Electromagnetics," *IEEE Ant. Prop. Magazine.*, Vol. 37, no. 2, pp. 7-15, April 1995.

Κεφάλαιο 5

Αντικειμενοστραφής Προγραμματισμός

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται, αρχικά, μια σύντομη σύγκριση μεταξύ δεδομενο-κεντρικού και αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού και, στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού. Στόχος του κεφαλαίου δεν είναι η κάλυψη όλων των πτυχών του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, αλλά η κατανόηση των βασικών αρχών και χαρακτηριστικών του, επικεντρώνοντας σε αντιστοιχίες με παραδείγματα του πραγματικού κόσμου.

5.1 Σύντομη Σύγκριση Δεδομενο-κεντρικού και Αντικειμενοστραφούς Προγραμματισμού

Ο «κλασικός» τρόπος, για να αντιληφθεί κανείς (και, επομένως, να αναπτύξει) το λογισμικό, είναι να θεωρήσει ένα πρόγραμμα σαν ένα σύνθετο γράφο από μετασχηματισμούς δεδομένων, όπου πληροφορία και δεδομένα ρέουν μέσα στο σύστημα και έξω από αυτό, ενώ υφίστανται αλλαγές, μετασχηματισμούς και, γενικά, κάθε είδους επεξεργασία σε ορισμένους κόμβους του γράφου. Πρόκειται για τη λεγόμενη δεδομενο-κεντρική προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία, τα βασικά συστατικά ενός προγράμματος είναι τα προς επεξεργασία δεδομένα και τα είδη των μετασχηματισμών που εφαρμόζονται πάνω σε αυτά ή οι τύποι των ενεργειών (συμπεριφορών), που προκαλούνται από συγκεκριμένες τιμές δεδομένων. Κυριότεροι εκπρόσωποι του δεδομενο-κεντρικού προγραμματισμού είναι οι λεγόμενες γλώσσες υψηλού επιπέδου (π.χ. Fortran, Pascal και C). Παρόλο που, οι γλώσσες αυτές έχουν το πλεονέκτημα της ανάπτυξης ενός προγράμματος, ανεξάρτητα από τη λειτουργία του υπολογιστή σε επίπεδο

μηχανής, με την έννοια της επαναμεταγλώττισης (re-compilation) του πηγαίου κώδικα (κάτι το οποίο δεν ισχύει στον προγραμματισμό σε γλώσσα assembly, όπου ο πηγαίος κώδικας έχει άμεση σχέση με τη μηχανή, στην οποία προορίζεται να εκτελεστεί), το σημαντικότερο μειονέκτημα του δεδομενο-κεντρικού προγραμματισμού ήταν (και είναι) ότι, δεν παρέχεται η αφαιρετικότητα σε μεγάλο βαθμό. Οι προγραμματιστές, προκειμένου να επιλύσουν ένα πρόβλημα, πρέπει να σκέφτονται με όρους της δομής του υπολογιστή, παρά με όρους της δομής του προβλήματος, που θέλουν να επιλύσουν. Σύμφωνα με το δεδομενο-κεντρικό τρόπο προγραμματισμού, ο προγραμματιστής πρέπει να ορίσει ένα συσχετισμό μεταξύ της μηχανής και του πραγματικού κόσμου. Η προσπάθεια που απαιτείται, προκειμένου να επιτευχθεί αυτή η αντιστοίχιση και το γεγονός ότι, αυτή είναι ανεξάρτητη από τη γλώσσα προγραμματισμού, που χρησιμοποιείται, συντελεί στην παραγωγή προγραμμάτων, τα οποία είναι δύσκολο να αναπτυχθούν και η συντήρησή τους κοστίζει αρκετά. Παρόλα αυτά, πρέπει να σημειωθεί ότι, για συγκεκριμένα πεδία εφαρμογών, μια λειτουργική αποσύνθεση του συστήματος είναι πιο κατάλληλη και η χρήση δεδομενο-κεντρικών γλωσσών, ίσως, αποτελεί την πιο φυσική λύση.

Μια εντελώς άλλη προσέγγιση/αντίληψη του λογισμικού είναι να θεωρήσει κανείς ένα πρόγραμμα σαν ένα σύνολο από αλληλεπιδρούσες οντότητες (αντικείμενα), όπου η κάθε μια εκτελεί μια συγκεκριμένη εργασία. Οι οντότητες αυτές ανταλλάσσουν πληροφορία, μέσω αποστολής μηνυμάτων μεταξύ τους. Πρόκειται, λοιπόν, για την αντικειμενοστραφή προσέγγιση. Εδώ, τα βασικά συστατικά του προγράμματος είναι τα αντικείμενα, που το συνθέτουν. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την, με όσο το δυνατόν καλύτερο τρόπο, αφαιρετική διατύπωση ενός προβλήματος του πραγματικού κόσμου. Η αντικειμενοστραφής προσέγγιση παρέχει εργαλεία στο σχεδιαστή, που του επιτρέπουν να αναπαριστά στοιχεία του πραγματικού κόσμου, ως βασικά ή σύνθετα συστατικά του μοντέλου του. Η αναπαράσταση αυτή είναι αρκετά γενική, έτσι ώστε, από τη στιγμή που ο σχεδιαστής του προγράμματος καταλήξει σε αυτή, δεν υφίσταται περιορισμούς από κανένα σύνολο απαιτήσεων. Καθώς οι απαιτήσεις εξελίσσονται, η αποσύνθεση των στοιχείων του πραγματικού κόσμου και των εννοιών σε αντικείμενα εξακολουθεί να διατηρεί τη συνέφειά της σε μεγάλο βαθμό. Η βασική ιδέα είναι ότι, δίνεται η δυνατότητα στο πρόγραμμα να αυτοπροσαρμόζεται στο πραγματικό πρόβλημα, προσθέτοντας νέους τύπους αντικειμένων, όπου κρίνεται απαραίτητο. Η εκφραστική δύναμη μιας αντικειμενοστραφούς γλώσσας ενισχύεται περαιτέρω, έτσι ώστε, όταν κάποιος διαβάζει τον κώδικα, διαβάζει, επίσης, λέξεις, οι οποίες περιγράφουν τη λύση. Αυτός είναι ένας πιο ευέλικτος και ισχυρός μηχανισμός σε σύγκριση με τις παλαιότερες γλώσσες προγραμματισμού.

Οι επόμενες παράγραφοι παρουσιάζουν τις βασικές αρχές του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, επικεντρώνοντας στην αντιστοιχία με παραδείγματα του πραγματικού κόσμου, ξεκινώντας από τον ορισμό του αντικειμένου και καταλήγοντας στα χαρακτηριστικά, που καθιστούν τον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό ως τον πλέον αποδοτικό τρόπο ανάπτυξης λογισμικού, όπως ο πολυμορφισμός και η κληρονομικότητα. Πιο λεπτομερή ανάλυση των αρχών του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού υπάρχει στις

[1], [2]], ενώ στην [3, κεφ.3] παρουσιάζονται αναλυτικά οι μεθοδολογίες ανάπτυξης αντικειμενοστραφούς λογισμικού για τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές.

5.2 Βασικές Έννοιες Αντικειμενοστραφούς Προγραμματισμού

5.2.1 Η Έννοια του Αντικειμένου

Όπως δηλώνεται από τον όρο «αντικειμενοστραφής», τα αντικείμενα αποτελούν το θεμελιώδες στοιχείο των αντικειμενοστραφών γλώσσων προγραμματισμού. Όπως θα φανεί και στις ακόλουθες παραγράφους, τα αντικείμενα στις γλώσσες αυτές είναι ανεξάρτητες οντότητες, κάθε μια από τις οποίες επιδρά, κυρίως, στη δική της πληροφορία. Ο όρος αντικείμενο στις γλώσσες αυτές δεν διαφέρει, ουσιαστικά, από τον ορισμό, που δίνουμε, όταν αναφερόμαστε στον πραγματικό κόσμο. Ακριβώς όπως τα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, έτσι και τα αντικείμενα λογισμικού έχουν κατάσταση και συμπεριφορά (για παράδειγμα, στην πρόταση «το γρήγορο άλογο τρέχει», το άλογο είναι ένα αντικείμενο, που έχει την κατάσταση «γρήγορο» και συγκεκριμένη συμπεριφορά, η οποία δηλώνεται από τη λέξη «τρέχει»). Προγραμματιστικά, η κατάσταση απεικονίζεται στις μεταβλητές του αντικειμένου, ενώ η συμπεριφορά στις μεθόδους του (π.χ. η κατάσταση στο παράδειγμα, που προαναφέρθηκε, μπορεί να χαρακτηρίζεται από μια μεταβλητή, που δηλώνει την ταχύτητα, ενώ η κλήση μιας μεθόδου, η οποία θα έχει ως αποτέλεσμα το άλογο να σταματήσει, απεικονίζει τη συμπεριφορά του αντικειμένου, εφόσον το άλογο, πλέον, δεν θα τρέχει). Οι μεταβλητές και οι μέθοδοι ενός αντικειμένου χαρακτηρίζονται με τον ορισμό μεταβλητές και μέθοδοι στιγμιότυπου (*instance variables* και *instance methods*), για λόγους που θα εξηγηθούν αργότερα.

5.2.2 Η Έννοια της Ενθυλάκωσης (*encapsulation concept*)

Σε πολλά παραδείγματα του πραγματικού κόσμου, μπορούμε, ως εξωτερικοί παράγοντες, να κινήσουμε κάποια λειτουργία ενός αντικειμένου, προκειμένου να επιτύχουμε κάποιο σκοπό. Για παράδειγμα, πατώντας το πλήκτρο του τηλεχειριστηρίου, μπορούμε να αλλάξουμε κανάλι στην τηλεόραση. Βέβαια, ελάχιστοι τηλεθεατές γνωρίζουν τους μηχανισμούς, που πραγματοποιούνται στα κυκλώματα, που βρίσκονται στο εσωτερικό της τηλεόρασης, προκειμένου να επιτευχθεί η αλλαγή καναλιού. Κατά ακριβώς ανάλογο τρόπο, κάθε αντικείμενο λογισμικού έχει την ιδιότητα να αποκρύπτει από εξωτερικές προς αυτό οντότητες λογισμικού κάποιες μεταβλητές και μεθόδους του. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως ενθυλάκωση. Η ιδιότητα της ενθυλάκωσης είναι μια πολύ ισχυρή ιδέα, η οποία παρέχει δύο πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα, κατά την ανάπτυξη λογισμικού:

1. Τα αντικείμενα μπορούν να χρησιμοποιούνται σε ένα πρόγραμμα σαν «μαύρα κουτιά» και, επομένως, ο κώδικας κάθε αντικειμένου μπορεί να αναπτύσσεται και να εξελίσσεται, ανεξάρτητα από τον κώδικα άλλων αντικειμένων. Επιπρόσθετα, ένα αντικείμενο μπορεί να χρησιμοποιείται

από διάφορες εφαρμογές (κατά τον τρόπο που, το ίδιο βιβλίο μπορεί να διαβαστεί από διαφορετικούς χρήστες και η πληροφορία του να αξιοποιηθεί ανάλογα με τον αναγνώστη).

2. Στην περίπτωση, που ο προγραμματιστής αποφασίσει να κάνει αλλαγές στον κώδικα ενός αντικειμένου, για να επιτύχει πιο αποδοτική υλοποίηση, ο κώδικας των άλλων αντικειμένων δεν χρειάζεται να μεταβληθεί, εφόσον οι ορισμοί των μεταβλητών και των μεθόδων του αντικειμένου αυτού, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από εξωτερικές οντότητες, παραμένουν αμετάβλητοι. Οι μέθοδοι και οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται «δημόσια διεπαφή» (public interface) και δηλώνουν τον τρόπο, με τον οποίο ένα αντικείμενο είναι «ορατό» από εξωτερικές προς αυτό οντότητες λογισμικού. Για παράδειγμα, αν κάποια από τα ηλεκτρονικά κυκλώματα στο εσωτερικό της τηλεόρασης αντικατασταθούν με βελτιωμένα, δεν χρειάζεται να αλλάξει το τηλεχειριστήριο. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται απόκρυψη πληροφορίας (information hiding).

5.2.3 Επικοινωνία Αντικειμένων

Όπως προαναφέρθηκε, στα πλαίσια του αντικειμενοστραφούς αντίληψης, ένα πρόγραμμα θεωρείται ως ανταλλαγή μηνυμάτων μεταξύ ενός συνόλου αντικειμένων, προκειμένου να επιλυθεί κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα. Όταν ένα αντικείμενο A θέλει να ζητήσει την εκτέλεση μιας μεθόδου ενός αντικειμένου B, στέλνει σε αυτό ένα μήνυμα. Κατά συνέπεια, κάθε μήνυμα περιέχει το αντικείμενο, στο οποίο απευθύνεται, το όνομα της μεθόδου, που θα εκτελέσει το αντικείμενο αυτό και τις παραμέτρους της μεθόδου.

Η δημόσια διεπαφή κάθε αντικειμένου καθορίζει τα μηνύματα, που μπορούν να αποσταλούν σε αυτό από άλλα αντικείμενα. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η χρησιμότητα ενός αντικειμένου χαρακτηρίζεται από το βαθμό αλληλεπίδρασης άλλων αντικειμένων με αυτό. Το χαρακτηριστικό αυτό, το οποίο είναι έκδηλο στον πραγματικό κόσμο, απεικονίζεται και στον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό. Μάλιστα, η ανάπτυξη αντικειμένων, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συνθετικά στοιχεία περισσότερων του ενός προγραμμάτων, αποτελεί βασικό στοιχείο σωστού και ευέλικτου προγραμματισμού. Η δημόσια διεπαφή του κάθε αντικειμένου θα πρέπει να καθορίζεται με τέτοιο τρόπο, ώστε το αντικείμενο να θεωρείται σαν αυτόνομη οντότητα. Συγκεκριμένα, σε μια δημόσια διεπαφή θα πρέπει να περιγράφεται τί θα κάνει το αντικείμενο και όχι το πώς θα το κάνει. Με τον τρόπο αυτό, το αντικείμενο αναλαμβάνει περισσότερες «πρωτοβουλίες» στην επιλογή των κατάλληλων διαδικασιών και δεδομένων, προκειμένου να περατώσει την εργασία, που του έχει ανατεθεί. Είναι προφανές ότι, με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνεται επαναχρησιμοποίηση των αντικειμένων. Επιπρόσθετα, όμως, η ανάθεση πρωτοβουλιών στο ίδιο το αντικείμενο συντελεί στην ελαχιστοποίηση των μηνυμάτων μεταξύ των αντικειμένων και, επομένως, αποτελεί στοιχείο αποδοτικού αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού. Θεωρούμε, για παράδειγμα [3], ένα αντικείμενο A, το οποίο αναπαριστά γραφικά στην οθόνη του υπολογιστή. Έστω ότι, ένα αντικείμενο B χρειάζεται να δώσει στο A οδηγίες για να παραστήσει

κάποια πληροφορία στην οθόνη. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, το B θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τη διεπαφή, την οποία το A καθιστά διαθέσιμη. Τί διεπαφή, όμως, θα είναι αυτή; Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, η κατάλληλη διεπαφή θα ήταν αυτή, που ανταποκρίνεται στη φράση «παρουσιάζω την πληροφορία σας». Μία διεπαφή ανάλογη στο «παρουσιάζω τα δεδομένα X σε μπλε χρώμα και γραμματοσειρά Φ και τα δεδομένα Y σε γραμματοσειρά Z» δεν είναι κατάλληλη. Η πρώτη διεπαφή δεν κάνει καμία υπόθεση για τον τρόπο, με τον οποίο είναι δομημένα τα δεδομένα, που απαρτίζουν την πληροφορία, που θα αναπαραστήσει το A. Αντίθετα, η δεύτερη διεπαφή έχει γνώση για τα δεδομένα X και Y και συνιστά αναπαράσταση, η οποία μπορεί να μην είναι εφικτή για μια μονόχρωμη οθόνη ή στην περίπτωση, που οι συγκεκριμένες γραμματοσειρές δεν είναι διαθέσιμες. Στην πρώτη περίπτωση, αν η εσωτερική αναπαράσταση του A ή η πληροφορία μεταβληθεί ή, αν το αντικείμενο A χρησιμοποιηθεί σε ένα σύστημα με στοιχειώδεις δυνατότητες απεικόνισης, η διεπαφή του A ως προς το B θα παραμείνει η ίδια και η υλοποίηση του B δε θα χρειαστεί να μεταβληθεί, κάτι το οποίο, οπωσδήποτε, δεν ισχύει στην περίπτωση, που χρησιμοποιηθεί η δεύτερη διεπαφή.

Η επικοινωνία των αντικειμένων μέσω μηνυμάτων δεν θέτει περιορισμούς, ως προς το περιβάλλον εκτέλεσης των αντικειμένων. Για παράδειγμα, τα αντικείμενα δεν είναι απαραίτητο να εκτελούνται στην ίδια διεργασία ή ακόμα και στον ίδιο υπολογιστή, προκειμένου να ανταλλάσσουν μεταξύ τους μηνύματα. Το χαρακτηριστικό αυτό καθιστά τον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό ιδιαίτερα εφαρμόσιμο σε προβλήματα κατανεμημένης επεξεργασίας και, σε συνδυασμό με την εξέλιξη του διαδικτύου, δίνει τη δυνατότητα ανάπτυξης εφαρμογών με πρόσβαση σε υπολογιστικούς πόρους, οι οποίοι είναι κατανεμημένοι σε παγκόσμια κλίμακα (βλέπε το κεφάλαιο 7 περί κατανεμημένης επεξεργασίας).

5.2.4 Η Έννοια της Κλάσης

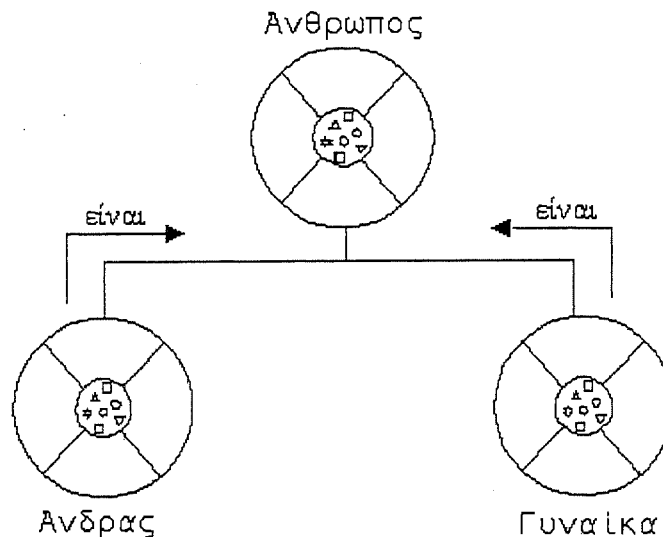
Στον πραγματικό κόσμο, συναντούμε μια πληθώρα αντικειμένων με κοινές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η τηλεόρασή μας είναι μια από τις πολλές τηλεοράσεις, που υπάρχουν ανά τον κόσμο και, οι οποίες έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά (για παράδειγμα, οθόνη, δέκτη, τηλεχειριστήριο). Με την ορολογία του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, μπορούμε να πούμε ότι, η τηλεόρασή μας είναι ένα στιγμιότυπο (instance) της κλάσης των τηλεοράσεων. Με την έννοια στιγμιότυπο υποδηλώνεται το ότι, ναι μεν η τηλεόρασή μας έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με τις άλλες τηλεοράσεις, αλλά και κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία την κάνουν να είναι μοναδική (για παράδειγμα, ρυθμίσεις, που έχουν γίνει σύμφωνα με τις προσωπικές μας προτιμήσεις). Η έννοια της κλάσης, επομένως, δηλώνει όλα τα χαρακτηριστικά, τα οποία είναι κοινά σε ένα σύνολο αντικειμένων (με την έννοια των προδιαγραφών). Κάθε φορά που δημιουργείται ένα αντικείμενο, λαμβάνει, εξ ορισμού, τα χαρακτηριστικά αυτά (μεταβλητές και μέθοδοι της κλάσης – class variables and class methods). Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό των μεταβλητών και των μεθόδων της κλάσης είναι το ότι, αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν από εξωτερικές οντότητες λογισμικού, χωρίς να έχει

δημιουργηθεί κάποιο αντικείμενο της συγκεκριμένης κλάσης. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι κάθε τραπέζι έχει τέσσερα πόδια (χαρακτηριστικό της κλάσης τραπέζι), επομένως, δεν είναι δόκιμο να δημιουργήσουμε ένα τραπέζι και να μετρήσουμε τον αριθμό των ποδιών του (χαρακτηριστικό του αντικειμένου).

Η έννοια της κλάσης στον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό προσφέρει ακόμα ένα σημαντικό πλεονέκτημα, την επαναχρησιμοποίηση της πληροφορίας. Η ίδια κλάση (και, επομένως, ο ίδιος κώδικας) χρησιμοποιείται πολλές φορές, προκειμένου να στιγμιτυπηθούν πολλά αντικείμενα.

5.2.5 Η Έννοια της Κληρονομικότητας (*inheritance*)

Σε γενικές γραμμές, τα αντικείμενα καθορίζονται, σε μεγάλο βαθμό, από την κλάση, στην οποία ανήκουν. Ακόμα και, αν δεν γνωρίζουμε κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου, γνωρίζοντας τα χαρακτηριστικά της κλάσης, στην οποία αυτό ανήκει, είμαστε σε θέση να το προσδιορίσουμε σε μεγάλο βαθμό. Επιπρόσθετα, όπως και στον πραγματικό κόσμο, μια κλάση μπορεί εννοιολογικά να αποτελεί υποσύνολο μιας άλλης κλάσης. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε μια κλάση «άνθρωπος», η οποία προδιαγράφει τα κοινά χαρακτηριστικά όλων των ανθρώπων. Επειδή, όμως, οι άνθρωποι είναι, είτε άνδρες, είτε γυναίκες, θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια υπο-κλάση (sub-class) ή κλάση-παιδί (child class) «άνδρας» και μια υπο-κλάση «γυναίκα», οι οποίες προδιαγράφουν, εξ ορισμού, αφενός τα χαρακτηριστικά ενός ανθρώπου, τα οποία καθορίζονται από την υπερ-κλάση (super-class) ή κλάση-γονέα (parent class) «άνθρωπος» και αφετέρου τα χαρακτηριστικά του άνδρα και της γυναίκας, αντίστοιχα (Σχήμα 5.1). Η κληρονομικότητα μπορεί πολύ εύστοχα να παρασταθεί, με τη χρήση της λέξης είναι. Για παράδειγμα, λέμε ότι «ο άνδρας είναι άνθρωπος» και «η γυναίκα είναι άνθρωπος».



Σχήμα 5.1: Παράδειγμα κληρονομικότητας.

Στην αντικειμενοστραφή ορολογία, μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε μια ιεραρχία κλάσεων. Η βασική κλάση είναι η κλάση αντικείμενο (Object) και κάθε κλάση αποτελεί υπο-κλάση της κλάσης Object. Η παραπάνω δήλωση περιγράφεται πολύ εύστοχα με τη φράση «Οτιδήποτε είναι αντικείμενο – Everything is an Object», η οποία είναι πολύ δημοφιλής στον κόσμο του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού.

Πρέπει να σημειωθεί πως, το σημαντικότερο χαρακτηριστικό της κληρονομικότητας δεν είναι το ότι, μια υπο-κλάση κληρονομεί τα χαρακτηριστικά της υπερ-κλάσης, αλλά το ότι, βασιζόμενη σε αυτά, προσθέτει νέα χαρακτηριστικά (δηλαδή, νέες μεταβλητές και μεθόδους) ή διαφοροποιεί αυτές της υπερ-κλάσης. Για παράδειγμα, ως μέθοδος της κλάσης «γυναίκα», θα μπορούσε να προστεθεί η μέθοδος «γεννάω», η οποία είναι κοινό χαρακτηριστικό των γυναικών, όχι όμως και όλων των ανθρώπων. Επιπρόσθετα, με βάση το ότι, για παράδειγμα «όλοι οι άνθρωποι αναπτύσσονται», η μέθοδος «αναπτύσσομαι», η οποία έχει οριστεί στην κλάση «άνθρωπος», μπορεί να έχει διαφορετική υλοποίηση στην κλάση «άνδρας», από ό,τι στην κλάση «γυναίκα», αφού «οι άνδρες αναπτύσσονται διαφορετικά από τις γυναίκες». Το βασικό, επομένως, πλεονέκτημα της κληρονομικότητας στα πλαίσια του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού είναι η επαναχρησιμοποίηση του κώδικα, αφού, κατά τη δημιουργία μιας υπο-κλάσης, αναπτύσσεται μόνον ο κώδικας, που αφορά τα επιπρόσθετα ή διαφοροποιημένα χαρακτηριστικά της υπο-κλάσης. Οι προγραμματιστές, επομένως, μπορούν να αναπτύξουν αφηρημένες κλάσεις (abstract classes), οι οποίες μερικώς υλοποιούν μια συμπεριφορά, αλλά μεγάλο μέρος αυτών των κλάσεων δεν έχει υλοποιηθεί. Το μέρος αυτό υλοποιείται στις υπο-κλάσεις.

5.2.6 Η Έννοια των Διεπαφών (interfaces)

Με δεδομένο ένα αντικείμενο, ένα βασικό ερώτημα, που μπορεί να τεθεί, είναι «ποιά είναι η σχέση του αντικειμένου αυτού με άλλα αντικείμενα». Όπως προαναφέρθηκε, η σχέση με άλλα αντικείμενα καθορίζεται από τις μεθόδους του αντικειμένου, οι οποίες μπορούν να κληθούν από τα αντικείμενα αυτά. Όπως όμως και στον πραγματικό κόσμο, η κατάσταση μπορεί να είναι πολύ πιο σύνθετη. Θεωρούμε, για παράδειγμα, ένα αντικείμενο της κλάσης «άνδρας». Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι, το αντικείμενο αυτό μπορεί να είναι γιατρός για τους ασθενείς του, σύζυγος για τη γυναίκα του, πατέρας για τα παιδιά του κ.ο.κ. Ανάλογα, επομένως, με τα αντικείμενα, με τα οποία αλληλεπιδρά το συγκεκριμένο αντικείμενο, δίνει τη δυνατότητα σε αυτά να εκτελέσουν διαφορετικές μεθόδους του. Το ίδιο, δηλαδή, αντικείμενο μπορεί να παρουσιάζει διαφορετικούς ρόλους για τα αντικείμενα, με τα οποία αλληλεπιδρά. Το χαρακτηριστικό αυτό υλοποιείται προγραμματιστικά με τη χρήση των διεπαφών (interfaces) στη Java. Οι διεπαφές σε άλλες αντικειμενοστραφείς γλώσσες είναι γνωστές και ως πρωτόκολλα (protocols). Πρέπει να τονιστεί ότι, η έννοια της διεπαφής, στα πλαίσια της παραγράφου αυτής, είναι τεχνική και δεν πρέπει να συγχέεται με τη δημόσια διεπαφή του αντικειμένου, που αναφέρθηκε

στις προηγούμενες παραγράφους 5.2.2 και 5.2.3. Οι διεπαφές ή πρωτόκολλα, επομένως, καθορίζουν τη βάση (προγραμματιστικά το σύνολο των μεθόδων), επάνω στην οποία μπορεί να επιτευχθεί επικοινωνία μεταξύ του συγκεκριμένου αντικείμενου και μιας εξωτερικής οντότητας, η οποία «βλέπει» το αντικείμενο αυτό από μια συγκεκριμένη διάστασή (ρόλο) του. Πρέπει να σημειωθεί ότι, ο ρόλος των διεπαφών είναι μόνον ο ορισμός των μεθόδων. Η υλοποίησή τους γίνεται στην ίδια την κλάση.

Επιπρόσθετα, σε σχέση με τις διεπαφές, παρατηρούμε ότι, αντικείμενα διαφορετικών κλάσεων μπορούν να υλοποιούν μια συγκεκριμένη διεπαφή. Αυτό σημαίνει ότι, μια εξωτερική οντότητα μπορεί να ομαδοποιήσει αυτά τα αντικείμενα, με βάση αυτή τη διεπαφή. Για παράδειγμα, θεωρώντας μια οντότητα «συνεργείο», παρατηρούμε ότι, η οντότητα αυτή διαχειρίζεται κάθε αντικείμενο, το οποίο υλοποιεί τη διεπαφή «επισκευάσιμος». Τα αντικείμενα, που υλοποιούν τη διεπαφή αυτή, μπορεί να είναι πολύ διαφορετικά μεταξύ τους και, επομένως, ο τρόπος επισκευής τους να είναι, επίσης, πολύ διαφορετικός. Η κοινή διεπαφή, όμως, την οποία υλοποιούν, επιτρέπει τον προσδιορισμό κοινών τους λειτουργιών σε αφηρημένο επίπεδο.

5.2.7 Η Έννοια του Πολυμορφισμού (*polymorphism*)

Δεδομένης της ιεραρχίας των κλάσεων, σε πολλές περιπτώσεις, ένα αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί, όχι αντικείμενο της κλάσης του, αλλά αντικείμενο της υπερ-κλάσης. Το βασικό αυτό χαρακτηριστικό επιτρέπει την ανάπτυξη κώδικα, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από συγκεκριμένους τύπους αντικειμένων. Θεωρώντας, για παράδειγμα, την κλάση «όχημα» και τις υπο-κλάσεις «αυτοκίνητο», «λεωφορείο», «φορτηγό», μπορούμε να σκεφτούμε λειτουργίες (συναρτήσεις), οι οποίες εφαρμόζονται σε όλα τα οχήματα, ανεξάρτητα από το αν το όχημα, στο οποίο θα εφαρμοστούν, είναι αυτοκίνητο, λεωφορείο, φορτηγό ή ακόμα και κάποιο άλλο όχημα, το οποίο μπορεί και να μην έχει οριστεί. Για παράδειγμα, όλα τα οχήματα μπορούν να ξεκινήσουν, να επιταχύνουν, να σταματήσουν κλπ. Οι συναρτήσεις αυτές στέλνουν ένα μήνυμα σε ένα αντικείμενο της κλάσης όχημα, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τον τρόπο, με τον οποίο το αντικείμενο θα διαχειριστεί αυτό το μήνυμα.

Είναι προφανές ότι, εφόσον οι συναρτήσεις αυτές στηρίζονται σε μια αφηρημένη θεώρηση, η οποία δεν λαμβάνει υπόψη τις υπο-κλάσεις της κλάσης, στην οποία αναφέρονται, ο κώδικας, ο οποίος τις υλοποιεί, θα είναι πολύ ευέλικτος και ανεπηρέαστος από την εισαγωγή νέων υπο-κλάσεων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που δημιουργήσουμε ένα αντικείμενο της κλάσης «ποδήλατο», η οποία είναι υπο-κλάση της κλάσης «όχημα», οι συναρτήσεις, οι οποίες στέλνουν μηνύματα σε ένα «όχημα», δεν χρειάζεται να τροποποιηθούν. Ακολουθώντας μια τέτοια λογική στον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό, είναι δυνατή η ανάπτυξη εύκολα επεκτάσιμων προγραμμάτων, τα οποία, επιπρόσθετα, παρουσιάζουν μικρό κόστος συντήρησης.

Δημιουργείται, όμως, ένα πρόβλημα, όταν χειριζόμαστε ένα αντικείμενο ως αντικείμενο της υπερ-κλάσης του. Αν μια συνάρτηση λείει, για παράδειγμα, σε ένα «όχημα» να επιταχύνει, κατά τη διαδικασία της μεταγλώττισής της, δεν είναι

γνωστό ποιό κομμάτι κώδικα θα εκτελεστεί, εφόσον δεν είναι γνωστός ο τύπος του οχήματος, που θα επιταχυνθεί. Η συνάρτηση «επιταχύνω» μπορεί να εφαρμοστεί ισότιμα σε αντικείμενα κάθε υπο-κλάσης της κλάσης «όχημα» και κάθε αντικείμενο θα εκτελέσει τον αντίστοιχο κώδικα, ανάλογα με τον τύπο του. Το χαρακτηριστικό αυτό επιτρέπει την εύκολη πρόσθεση νέων υποκλάσεων, χωρίς να γίνουν αλλαγές στον τρόπο, με τον οποίο καλείται η δεδομένη συνάρτηση (αφού η κλήση της γίνεται με βάση την υπερ-κλάση). Στις αντικειμενοστραφείς γλώσσες προγραμματισμού, παρόλο που κατά τη διαδικασία μεταγλώττισης της μεθόδου «επιταχύνω», δεν είναι γνωστό ποιό κομμάτι κώδικα θα εκτελεστεί κατά την κλήση της, κατά τη διαδικασία εκτέλεσης, θα εκτελεστεί το κατάλληλο κομμάτι κώδικα, σύμφωνα με την υλοποίησή της συνάρτησης στην υπο-κλάση, στην οποία ανήκει το αντικείμενο. Η ιδιότητα αυτή των αντικειμενοστραφών γλωσσών ονομάζεται *late binding*. Στη Java [1], η ιδιότητα αυτή ισχύει εξ ορισμού, ενώ στη C++ [2], ο προγραμματιστής πρέπει να δηλώσει ότι, θέλει μια συνάρτηση να έχει την ιδιότητα *late binding*, προσθέτοντας κατάλληλες λέξεις-κλειδιά.

5.3 Παράδειγμα Εφαρμογής στην Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Προκειμένου να φανούν ορισμένα από τα χαρακτηριστικά του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού στην πράξη, θα παρουσιαστεί [4] η διαδικασία σχεδιασμού ενός προγράμματος για την επίλυση ενός γραμμικού αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων $[A][x]=[b]$, όπου $[A]$ είναι ένας πίνακας $n \times n$ και $[x]$, $[b]$ είναι πίνακες-στήλες με n στοιχεία.

Εστω ότι, επιθυμούμε να επιλύσουμε το σύστημα, με χρήση της επαναληπτικής μεθόδου SOR (Successive Over Relaxation). Σύμφωνα με τη μέθοδο SOR, ξεκινώντας από μια αρχική εκτίμηση για το άγνωστο πίνακα $[x]$, υπολογίζουμε, με τη βοήθεια μιας αναδρομικής σχέσης, μια νέα εκτίμηση για το $[x]$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επαναληπτικά, έως ότου δύο διαδοχικοί πίνακες είναι αρκετά «κοντά» μεταξύ τους, με την έννοια της νόρμας.

Το πρώτο βήμα είναι η υλοποίηση της SOR, ως μιας αυτοτελούς κλάσης SORSolver. Κατά το σχεδιασμό της κλάσης αυτής, θα πρέπει αρχικά, να αποφασίσουμε, ποιές θα είναι οι μεταβλητές και οι μέθοδοι των αντικειμένων της κλάσης. Η κλάση SORSolver θα πρέπει να έχει μια μεταβλητή `xnew[]` (πίνακας), στην οποία θα αποθηκεύεται ο πίνακας $[x]$ μετά από κάθε επανάληψη, μια `boolean` μεταβλητή `convergence`, η οποία θα δηλώνει, εάν επιτεύχθηκε σύγκλιση, καθώς και μια μεταβλητή `iterations`, στην οποία αποθηκεύεται ο αριθμός των επαναλήψεων. Όταν μια οντότητα εξωτερική της κλάσης SORSolver χρησιμοποιήσει ένα αντικείμενο της κλάσης αυτής, είναι προφανές ότι, θα θέλει να γνωρίζει τον αριθμό των επαναλήψεων, αν επιτεύχθηκε η σύγκλιση, όπως επίσης και να έχει πρόσβαση στο αποτέλεσμα. Επειδή οι παραπάνω μεταβλητές δεν έχουν κάποια συγκεκριμένη τιμή, που να χαρακτηρίζεται από τις προδιαγραφές της κλάσης SORSolver, είναι μεταβλητές του αντικειμένου (`instance variables`). Επιπρόσθετα, επειδή, όπως προαναφέρθηκε, εξωτερικά αντικείμενα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα

πρόσβασης σε αυτές, οι μεταβλητές αυτές χαρακτηρίζονται από τη λέξη- κλειδί "public".

Όσον αφορά στις μεθόδους, η κλάση SORSolver περιέχει μια μέθοδο solve, η οποία παίρνει ως παραμέτρους όλες τις απαραίτητες πληροφορίες, προκειμένου να επιτευχθεί η επίλυση, καθώς και μια συνάρτηση normLinfinity, η οποία καλείται από τη συνάρτηση solve και υπολογίζει την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων, με βάση την infinity norm. Επειδή η μέθοδος solve καλείται από κάποια εξωτερική οντότητα, πρέπει οπωσδήποτε να ανήκει στη δημόσια διεπαφή του αντικειμένου και χαρακτηρίζεται από τη λέξη-κλειδί "public". Για τη μέθοδο normLinfinity, όμως, δεν ισχύει το ίδιο, εφόσον αυτή καλείται μόνον από τη solve και, επομένως, τα εξωτερικά αντικείμενα δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουν την ύπαρξή της. Η μέθοδος αυτή χαρακτηρίζεται από τη λέξη-κλειδί "private" και δεν ανήκει στη δημόσια διεπαφή ενός αντικειμένου της κλάσης SORSolver.

Έχοντας δημιουργήσει την κλάση SORSolver, όπως αναφέρεται παραπάνω, μπορούμε να στιγμιοτυπήσουμε ένα αντικείμενό της, μέσα σε οποιοδήποτε πρόγραμμα, το οποίο περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, την επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο SOR. Για παράδειγμα, στη Java έχουμε :

```
SORSolver mySOR =new SORSolver() ; (δημιουργία
αντικειμένου)
mySOR.solve (παράμετροι της μεθόδου)
```

Η πρόσβαση στις μεθόδους του αντικειμένου mySOR επιτυγχάνεται μετά την επίλυση, με τις ακόλουθες γραμμές κώδικα:

```
int totalIterations=mySOR.iterations;
double x[]=mySOR.xnew;
```

Στα πλαίσια της κληρονομικότητας, θα μπορούσε να είχε οριστεί κάποια γενικευμένη κλάση επίλυσης γραμμικών συστημάτων GeneralSolver και, με βάση αυτή, να οριστούν διάφορες μέθοδοι, για παράδειγμα:

```
class SORSolver extends GeneralSolver (κλάση, που
χρησιμοποιεί τη μέθοδο SOR)
class LUSolver extends GeneralSolver (κλάση, που
χρησιμοποιεί τη μέθοδο LU)
class GaussSolver (κλάση, που υλοποιεί τη μέθοδο
άπαλοιφής Gauss)
```

Η κλάση `GeneralSolver` θα περιέχει μια μέθοδο `solve`, η οποία μπορεί να μην έχει καθόλου υλοποίηση. Μάλιστα, η κλάση αυτή μπορεί να είναι μια `abstract class`. Μέσα σε κάθε κλάση, που κληρονομεί την `GeneralSolver`, θα υπάρχει η υλοποίηση της μεθόδου `solve`, ανάλογα με τη μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, που υιοθετείται κάθε φορά.

```
SORSolver mySOR=new SORSolver();
LUSolver myLU=new LUSolver();
GaussSolver myGauss=new GaussSolver();
mySOR.solve (παράμετροι της μεθόδου solve για την
κλάση SORSolver)
myLU.solve (παράμετροι της μεθόδου solve για την κλάση
LUSolver)
myGauss.solve (παράμετροι της μεθόδου solve για την
κλάση GaussSolver)
```

Στηριζόμενος σε μια τέτοια λογική, ο προγραμματιστής έχει τη δυνατότητα ανάπτυξης μιας βιβλιοθήκης από μεθόδους επίλυσης γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων, με δομημένο, ευέλικτο και εύκολα αναβαθμίσιμο τρόπο.

Βιβλιογραφία

- [1]. Bruce Eckel, *Thinking in Java (Second Edition)*, Prentice Hall, 8 June, 2000.
- [2]. Bruce Eckel, *Thinking in C++*, Prentice Hall, 15 April, 2000.
- [3]. Iakovos Venieris, Fabrizio Zizza, Thomas Magedanz, *Object Oriented Software Technologies in Telecommunications: From Theory to Practice*, John Wiley, June 2000.
- [4]. Judith Bishop and Nigel Bishop, *Java Gently For Engineers and Scientists*, Pearson Education, 2000.

Κεφάλαιο 6

Παραλληλισμός

6.1 Παράλληλες Αρχιτεκτονικές

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, οι απαιτήσεις των υπολογιστικών μεθόδων σε μνήμη και χρόνο εκτέλεσης είναι ιδιαίτερα υψηλές για τρισδιάστατα προβλήματα μοντελοποίησης και μεγάλες συχνότητες (ηλεκτρικά μεγάλες διαστάσεις) και αυξάνονται ακόμη περισσότερο, για προβλήματα που χαρακτηρίζονται από έντονη ανομοιογένεια και σύνθετη γεωμετρία, θέτοντας, έτσι, πρακτικούς περιορισμούς στην πολυπλοκότητα και το μέγιστο ηλεκτρικό μέγεθος των συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, που μπορούμε να προσομοιώσουμε.

Η χρήση παράλληλων υπολογιστών συντελεί καθοριστικά στην αντιμετώπιση ολόένα και πιο απαιτητικών υπολογιστικά προβλημάτων, καθώς και στην εκτέλεση τους σε όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο. Οι υπολογιστές αυτοί είναι εφοδιασμένοι με περισσότερους από έναν επεξεργαστές και έχουν τη δυνατότητα να εργάζονται ταυτόχρονα σε πολλά διαφορετικά κομμάτια του ίδιου προβλήματος. Ακόμα και για προβλήματα, που είναι επιλύσιμα σε ένα μόνον επεξεργαστή, μπορούμε να πετύχουμε σημαντικά κέρδη σε ταχύτητα, καταφεύγοντας στην παράλληλη επεξεργασία.

Σε αντίθεση με τον προγραμματισμό σε σειριακούς υπολογιστές, η ανάπτυξη παράλληλων προγραμμάτων απαιτεί, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, γνώση της παράλληλης αρχιτεκτονικής αλλά και ειδικών χαρακτηριστικών του μηχανήματος, που χρησιμοποιείται. Ακόμα και στις σπάνιες περιπτώσεις, που υπάρχουν διαθέσιμοι αυτόματι παραλληλοποιητές, η χρήση τους αποφεύγεται, καθώς οι κώδικες, στους οποίους καταλήγουν, δεν εμφανίζουν υψηλή αποδοτικότητα.

Ένας τρόπος ταξινόμησης των υπολογιστών είναι με βάση τις ροές εντολών που μπορούν να εκτελούν ταυτόχρονα και το πλήθος των συνόλων δεδομένων, πάνω στα οποία μπορούν να εφαρμόζουν τις εντολές αυτές. Πρόκειται για τη γνωστή κατάταξη του Flynn [1]. Οι δύο κατηγορίες της κατάταξης αυτής, που αναφέρονται σε παράλληλες αρχιτεκτονικές, είναι οι SIMD (Single Instruction Multiple Data) και MIMD (Multiple Instruction Multiple Data).

Όπως φανερώνει και το όνομά τους, οι υπολογιστές SIMD αποτελούνται από επεξεργαστές, που εκτελούν όλοι τις ίδιες εντολές, ο καθένας στο δικό του διαφορετικό σύνολο δεδομένων. Ο προγραμματισμός τους είναι απλούστερος σε σύγκριση με τους MIMD και το γεγονός ότι, γι' αυτούς υπάρχουν διαθέσιμοι αυτόματοι παραλληλοποιητές αλλά και παράλληλες αριθμητικές βιβλιοθήκες, βοηθά σημαντικά. Όμως, ο περιορισμός ότι, οι ίδιες εντολές πρέπει να εκτελούνται σε όλους τους επεξεργαστές, έχει σαν αποτέλεσμα σημαντικούς περιορισμούς και προβλήματα. Για τον λόγο αυτό δεν είναι και ιδιαίτερα δημοφιλείς τα τελευταία χρόνια. Είναι, επίσης, γνωστοί και με τον όρο διανυσματικοί επεξεργαστές (vector processors).

Στην κατηγορία MIMD ανήκουν οι παράλληλοι υπολογιστές, που ο κάθε επεξεργαστής τους έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει διαφορετικές από τους υπολοίπους εντολές, στο δικό του σύνολο δεδομένων. Αυτό συνεπάγεται πολυπλοκότερο και δυσκολότερο προγραμματισμό, αλλά και περισσότερες δυνατότητες. Η μεγάλη πλειοψηφία των παράλληλων υπολογιστών, που κατασκευάζονται τα τελευταία χρόνια, είναι MIMD.

Αν όλοι οι επεξεργαστές ενός παράλληλου υπολογιστή βλέπουν την ίδια μνήμη, τότε ο υπολογιστής αυτός καλείται Κοινής Μνήμης (Shared Memory). Η ύπαρξη κοινής μνήμης διευκολύνει σημαντικά το έργο του προγραμματιστή, αλλά το πλήθος των επεξεργαστών, που μπορούν να βλέπουν την ίδια μνήμη, είναι περιορισμένο. Κοινής Μνήμης είναι ο υπερυπολογιστής Power Challenge της Silicon Graphics.

Πρόβλημα μεγίστου πλήθους επεξεργαστών δεν αντιμετωπίζουν οι παράλληλοι υπολογιστές Κατανεμημένης Μνήμης (Distributed Memory). Στους υπολογιστές αυτούς ο κάθε επεξεργαστής έχει τη δική του τοπική μνήμη και, όταν χρειάζεται δεδομένα, που έχουν αποθηκευτεί στη μνήμη άλλων επεξεργαστών, λαμβάνει χώρα επικοινωνία για την αίτηση και τη λήψη τους. Επειδή για την επικοινωνία πρέπει να φροντίσει ο προγραμματιστής, το έργο του στους υπολογιστές αυτούς είναι σαφώς δυσκολότερο. Όμως, οι δυνατότητες που του προσφέρονται είναι πολύ μεγαλύτερες, σε σύγκριση με οποιαδήποτε άλλη αρχιτεκτονική. Κατανεμημένης Μνήμης είναι οι υπολογιστές GCel της Parsytec και Paragon της Intel.

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την παραλληλοποίηση των υπολογιστικών μεθόδων σε MIMD παράλληλους υπολογιστές Κατανεμημένης Μνήμης. Στις επόμενες παραγράφους περιγράφουμε τον τρόπο, με τον οποίο κατανέμουμε τα δεδομένα και τις αριθμητικές πράξεις της μεθόδου στους διαφόρους επεξεργαστές. Αναλύουμε, επίσης, την οργάνωση της επικοινωνίας ανάμεσά τους. Τέλος, ορίζουμε κατάλληλα μεγέθη για τη μελέτη της συμπεριφοράς των παράλληλων προγραμμάτων.

6.2 Τεχνικές Παράλληλου Προγραμματισμού

Στον παράλληλο προγραμματισμό παρουσιάζονται προβλήματα, που δεν συναντάμε στην ανάπτυξη σειριακών προγραμμάτων. Από τα βασικότερα είναι η αποδοτική διαμέριση των δεδομένων και των υπολογισμών του παράλληλου προγράμματος στους διάφορους επεξεργαστές. Η λύση του προβλήματος αυτού δεν είναι καθόλου απλή, γιατί εξαρτάται, όχι μόνον από τον κώδικα του προγράμματος που παραλληλοποιούμε, αλλά και από τα δεδομένα, με τα οποία το τρέχουμε κάθε φορά.

Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι να αναπτύξουμε ένα παράλληλο αριθμητικό πρόγραμμα. Ο πρώτος είναι, να χωρίσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ψάχνουμε σε μικρότερα τμήματα και να επιλύσουμε σε κάθε επεξεργαστή την (διαφορική ή ολοκληρωτική) εξίσωση, που ικανοποιεί η άγνωστη συνάρτηση στο τμήμα που του αναθέτουμε. Εναλλακτικά, μπορούμε να καταστρώσουμε την αριθμητική μέθοδο σε ολόκληρο το χώρο, όπου αναζητούμε το πεδίο και να μοιράσουμε στους διάφορους επεξεργαστές το αλγεβρικό σύστημα, στο οποίο μετασχηματίζουμε το φυσικό πρόβλημα. Από τους δύο τρόπους, ο πρώτος χαρακτηρίζεται από υψηλότερη αποδοτικότητα, αλλά και μεγαλύτερη δυσκολία υλοποίησης. Γι' αυτό και στην πράξη προτιμάται συχνότερα ο δεύτερος.

Πάντως και στις δύο παραπάνω προσεγγίσεις, παίζει πολύ σημαντικό ρόλο η κατανομή του υπολογιστικού έργου στους διαθέσιμους επεξεργαστές. Το πρόβλημα αυτό έχει αποδειχθεί ότι είναι NP-πλήρες (NP-complete) [2]. Αυτό σημαίνει πως, η εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης είναι εξαιρετικά χρονοβόρα και, συνεπώς, ασύμφορη.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού, έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι, που επιχειρούν να εντοπίσουν κάποια αποδεκτή διαμέριση σε προσιτό χρόνο. Οι περισσότεροι γνωστές από τις μεθόδους αυτές είναι η Μέθοδος της Προσομοιωμένης Σκλήρυνσης (Simulated Annealing) [2], η Μέθοδος της Αναδρομικής Φασματικής Διχοτόμησης (Recursive Spectral Bisection) [3], η Μέθοδος των Kernighan και Lin [4], η Μέθοδος της Κυκλικής Ανά Ζεύγη Ανταλλαγής (Cyclic-Pairwise-Exchange) [5] και η λεγόμενη Αδρανειακή Μέθοδος (Inertial Method) [5].

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι είναι προσεγγιστικές. Όσο περισσότερο χρόνο έχουν στη διάθεσή τους, τόσο καλύτερες είναι οι διαμερίσεις, στις οποίες καταλήγουν. Οι περισσότερες από αυτές στηρίζονται στη θεωρία γράφων και η υλοποίησή τους είναι, συχνά, εξαιρετικά πολύπλοκη. Για το λόγο αυτό και δεν θα τις αναλύσουμε περισσότερο.

Για να καταστήσουμε περισσότερο σαφείς τις έννοιες που σχετίζονται με την παραλληλοποίηση ενός αριθμητικού κώδικα, θα περιγράψουμε ορισμένα βασικά σημεία της παραλληλοποίησης του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων, που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 4.2.1. Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για να παραλληλίσουμε πρόγραμμα εκείνο, έχει πολλές ομοιότητες και κοινά στοιχεία με τον Αυτόματο Διαμεριστή Πεπερασμένων Στοιχείων (Automatic Finite Element Decomposer) του Farhat [6]. Πρόκειται για μια άπληστη (greedy)

μέθοδο ενός περάσματος. Ο αλγόριθμος ξεκινά από κάποιο οριακό σημείο του χώρου που θέλουμε να διαμερίσουμε και αναθέτει γειτονικά του τετράεδρα σε μία δεδομένη υποδιαίρεση, μέχρι το πλήθος τους να φτάσει κάποια προκαθορισμένη τιμή. Η τιμή αυτή, συνήθως, ισούται με το λόγο του συνόλου των τετραέδρων προς τον αριθμό των επεξεργαστών που διαθέτουμε. Στη συνέχεια, επιλέγουμε έναν κόμβο σε ένα εσωτερικό σύνορο της προηγούμενης περιοχής και συνεχίζουμε την ανάθεση τετραέδρων σε κάποιο άλλο επεξεργαστή. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, μέχρι να ανατεθούν όλα τα τετράεδρα. Η ποιότητα των διαμερίσεων, που δίνει η μέθοδος αυτή, δεν είναι το ίδιο υψηλή, σε σύγκριση με τις μεθόδους, που αναφέραμε πιο πάνω, πρόκειται όμως για μια πολύ γρήγορη μέθοδο και σχετικά απλή στην εφαρμογή της.

6.3 Η Κατανομή του Υπολογιστικού Φορτίου στους Επεξεργαστές

Στην προηγούμενη παράγραφο τονίσαμε τη μεγάλη σημασία της αποτελεσματικής διαμέρισης στην αποδοτικότητα κάθε παράλληλου προγράμματος. Η διαμέριση αυτή δεν αφορά μόνον τα γεωμετρικά και τοπολογικά χαρακτηριστικά (τετράεδρα, κόμβους, ακμές) της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και τα αλγεβρικά (αγνώστους και μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα συντελεστών του συστήματος). Πρέπει, επομένως, να ληφθούν και αυτά υπόψη στην επιλογή του τρόπου διαμέρισης.

Το μεγαλύτερο μέρος της μνήμης, που απαιτείται από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, χρησιμοποιείται για την αποθήκευση του πίνακα συντελεστών του συστήματος, στο οποίο καταλήγει. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι, με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τον πίνακα αυτό στους επεξεργαστές, που έχουμε στην διάθεσή μας. Ένας τρόπος είναι να αποθηκεύσουμε την i γραμμή του πίνακα στον επεξεργαστή με δείκτη $modulo(i, nr)$, όπου nr είναι το συνολικό πλήθος των επεξεργαστών. Ένας άλλος τρόπος είναι να διαιρέσουμε τον ολικό πίνακα σε τόσους τετραγωνικούς υποπίνακες, όσοι είναι οι επεξεργαστές που διαθέτουμε και να αποδώσουμε από έναν υποπίνακα σε κάθε επεξεργαστή.

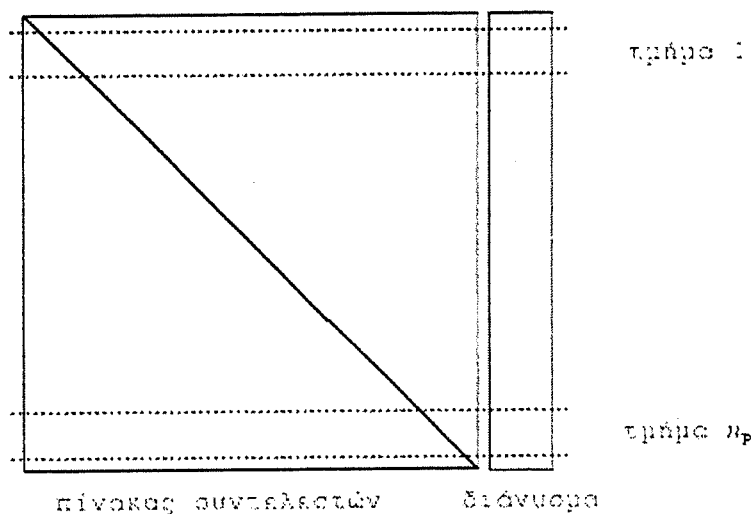
Η τεχνική, που υιοθετούμε συνδυάζει στοιχεία και από τις δύο παραπάνω μεθόδους. Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 6.1, σε κάθε επεξεργαστή αναθέτουμε ένα συγκεκριμένο πλήθος γραμμών του πίνακα συντελεστών. Οι γραμμές αυτές είναι συνεχόμενες. Έτσι, ο κάθε επεξεργαστής διαθέτει ένα ορθογώνιο και όχι τετραγωνικό υποπίνακα της ολικής μήτρας του συστήματος.

Στην τοπική μνήμη κάθε επεξεργαστή αποθηκεύουμε μόνον τα μη μηδενικά στοιχεία των γραμμών, που του αντιστοιχούν. Για να το πετύχουμε αυτό, κάνουμε χρήση της μεθόδου αποθήκευσης αραιών πινάκων Συμπιεσμένης Γραμμής, που περιγράψαμε στην παράγραφο 3.5.2. Πρέπει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι, τα διανύσματα δεικτών, που χρησιμοποιεί η μέθοδος Συμπιεσμένης Γραμμής, αναφέρονται, πλέον, στον τοπικό υποπίνακα κάθε επεξεργαστή και όχι στον ολικό πίνακα του συστήματος.

Σε κάθε επεξεργαστή ανατίθεται εκτός από ένα κομμάτι του πίνακα συντελεστών και από ένα τμήμα κάθε διανύσματος της μεθόδου των

πεπερασμένων στοιχείων. Τα διανύσματα, που μοιράζουμε στους διαθέσιμους επεξεργαστές, είναι τα διανύσματα σταθερών όρων και λύσεων του συστήματος, καθώς και τα διανύσματα κατευθύνσεων και υπολοίπων της επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης. Σε κάθε επεξεργαστή δίνουμε τα στοιχεία των διανυσμάτων, που έχουν τους δείκτες των γραμμών, που του αναθέτουμε.

Κάθε επεξεργαστής πρέπει να γνωρίζει, σε ποιόν επεξεργαστή αντιστοιχεί οποιοδήποτε στοιχείο του πίνακα συντελεστών ή κάποιου διανύσματος. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε δύο ακέραια διανύσματα με πλήθος στοιχείων ίσο με το συνολικό αριθμό των επεξεργαστών. Στα διανύσματα αυτά αποθηκεύουμε τους δείκτες της μικρότερης και της μεγαλύτερης αντίστοιχα γραμμής στη γενική αρίθμηση, που ανατίθεται σε κάθε επεξεργαστή.

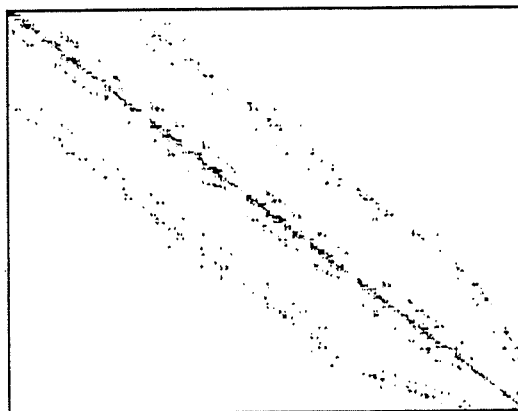


Σχήμα 6.1: Η διαμέριση κατά ομάδες συνεχόμενων γραμμών του πίνακα συντελεστών.

Το κριτήριο, με το οποίο κάνουμε τη διανομή των γραμμών στους επεξεργαστές, είναι να έχουν όλοι τους σχεδόν το ίδιο πλήθος μη μηδενικών στοιχείων. Με τον τρόπο αυτό ισοκατανέμονται, όχι μόνον οι απαιτήσεις μνήμης, αλλά και οι αριθμητικές πράξεις, που είναι ανάλογες του πλήθους των μη μηδενικών στοιχείων για αραιά συστήματα. Το κριτήριο αυτό ικανοποιείται, αναθέτοντας τον ίδιο αριθμό γραμμών σε κάθε επεξεργαστή, μόνο αν το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων εμφανίζει κανονικότητα και ομοιομορφία. Σε διαφορετική περίπτωση, η επιλογή της διαμέρισης περιπλέκεται, καθώς πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τα γεωμετρικά και τοπολογικά χαρακτηριστικά του ειδικού προβλήματος που μελετάμε, για να εντοπίσουμε τις θέσεις των μη μηδενικών στοιχείων.

Στο Σχήμα 6.2 βλέπουμε τη διασπορά των μη μηδενικών στοιχείων ενός πίνακα συντελεστών, που προκύπτει από χρήση ακμικών συναρτήσεων βάσης.

Παρατηρούμε ότι, η πλειοψηφία των μη μηδενικών στοιχείων συγκεντρώνεται γύρω από την κύρια διαγώνιο του πίνακα. Συνεπώς, για πίνακες τέτοιας μορφής, ο χωρισμός τους σε σύνολα συνεχόμενων γραμμών υπερτερεί ξεκάθαρα της υποδιαίρεσης σε τετραγωνικούς υποπίνακες.



Σχήμα 6.2: Η κατανομή των μη μηδενικών στοιχείων ενός πίνακα συντελεστών που προκύπτει από την χρήση ακμικών συναρτήσεων βάσης.

Η κατανομή των μη μηδενικών στοιχείων στον πίνακα συντελεστών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό και από την αριθμηση, που επιλέγουμε για τις ακμές του πλέγματος. Κάνοντας χρήση της κατάλληλης αριθμησης, είναι δυνατόν να συγκεντρώσουμε όλα τα μη μηδενικά στοιχεία σε μια στενή ζώνη γύρω από την κύρια διαγώνιο. Υπάρχουν ειδικές αριθμητικές τεχνικές, που το επιτυγχάνουν αυτό. Η περισσότερο γνωστή και διαδεδομένη είναι αυτή των Gibbs-Poole-Stockmeyer.

Έχει δειχθεί [5] ότι, η ελαχιστοποίηση του εύρους ζώνης του πίνακα συντελεστών ενός αραιού συστήματος αυξάνει σημαντικά την αποτελεσματικότητα των μεθόδων διαμέρισης. Επιπλέον, ακόμα και σε συμβατικούς σειριακούς υπολογιστές, επιταχύνει σε μεγάλο βαθμό τη σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης. Τέλος, μειώνει δραστικά το χρόνο επικοινωνίας ανάμεσα στους επεξεργαστές τους, κάτι που είναι ιδιαίτερο σημαντικό στους παράλληλους υπολογιστές. Με το θέμα αυτό ασχολούμαστε, πιο αναλυτικά, στην επόμενη παράγραφο.

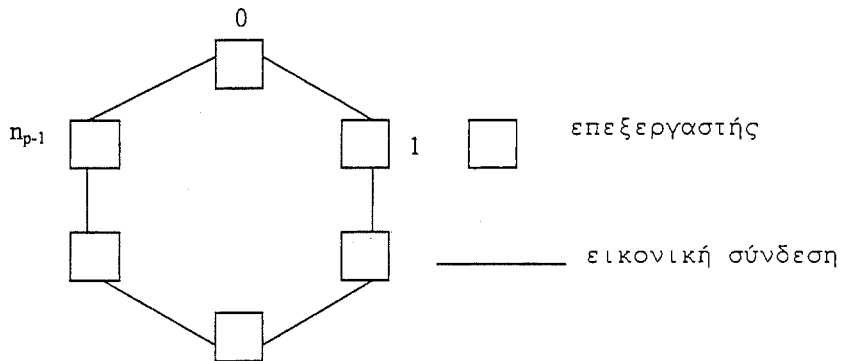
6.4 Η Επικοινωνία Ανάμεσα στους Επεξεργαστές

Στους παράλληλους υπολογιστές Κατανεμημένης Μνήμης είναι αναγκαία η επικοινωνία ανάμεσα στους επεξεργαστές τους. Το τμήμα της επικοινωνίας αυτής είναι η μείωση της ταχύτητας των παραλλήλων προγραμμάτων, που την χρησιμοποιούν. Είναι, επομένως, πολύ σημαντικό να εξασφαλίσουμε, όχι μόνον

την ορθότητά της, αλλά και τον κατά το δυνατόν περιορισμό του χρόνου, που απαιτεί.

Ο χρόνος, που αφιερώνεται στην επικοινωνία, εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Εξαρτάται από την αρχιτεκτονική διασύνδεσης των επεξεργαστών, από την τεχνολογία των συνδέσεων ανάμεσά τους και από τον τρόπο διοχέτευσης των μηνυμάτων στο δίκτυο επικοινωνίας. Άλλοι παράγοντες, που παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην ταχύτητα επικοινωνίας, είναι η μορφή του ίδιου του παράλληλου προγράμματος, τα δεδομένα για τα οποία το τρέχουμε και ο τρόπος, με τον οποίο τα κατανέμουμε στους διάφορους επεξεργαστές. Στους παράγοντες αυτούς μπορούμε να ασκήσουμε έλεγχο, για να βελτιώσουμε τις επιδόσεις των παράλληλων προγραμμάτων, που αναπτύσσουμε.

Σκοπός ενός παράλληλου προγράμματος δεν είναι μόνον η εξαγωγή ορθών αποτελεσμάτων, αλλά και η εκτέλεσή του σε χρόνο μικρότερο από αυτόν, που θα απαιτείτο σε ένα σειριακό μηχάνημα. Για να συμβεί αυτό, πρέπει ο κύριος όγκος των υπολογισμών του να χαρακτηρίζεται από ικανοποιητική ανεξαρτησία. Επιπλέον, πρέπει ο χρόνος, που αφιερώνεται στους αριθμητικούς υπολογισμούς, να είναι πολύ μεγαλύτερος από το χρόνο επικοινωνίας. Σε διαφορετική περίπτωση, δεν δικαιολογείται η επιπρόσθετη δυσκολία, που συνεπάγεται ο παράλληλος προγραμματισμός.



Σχήμα 6.3: Εικονική τοπολογία δακτυλίου.

Με τον όρο τοπολογία χαρακτηρίζουμε κάθε οικογένεια γράφων, που δημιουργούνται, κάνοντας χρήση του ίδιου γενικού κανόνα ή έχουν κοινές ορισμένες βασικές τους ιδιότητες. Η έννοια της τοπολογίας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την περιγραφή των τρόπων διασύνδεσης των επεξεργαστών κάθε παράλληλου υπολογιστή Κατανεμημένης Μνήμης. Ανάμεσα στις περισσότερο χρησιμοποιούμενες τοπολογίες είναι αυτές του διδιάστατου πλέγματος, του δακτυλίου, του τόρου και του υπερκύβου.

Φυσική τοπολογία ενός παράλληλου μηχανήματος καλούμε το γράφο, που αποτελείται από τις πραγματικές συνδέσεις μεταξύ των επεξεργαστών του. Η πλέον διαδεδομένη φυσική τοπολογία είναι αυτή του διδιάστατου πλέγματος. Εκτός από τις πραγματικές συνδέσεις, είναι δυνατόν με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού να οριστούν εικονικές συνδέσεις ανάμεσα σε δύο επεξεργαστές, που

μπορεί να μην είναι ενωμένοι φυσικά. Οι εικονικές συνδέσεις χρησιμοποιούν με τρόπο διαφανή στο χρήστη τις πραγματικές και αυτό είναι κάτι που διευκολύνει σημαντικά τον παράλληλο προγραμματισμό.

Οι τοπολογίες, στις οποίες οργανώνουμε τις εικονικές συνδέσεις επεξεργαστών, καλούνται, όπως είναι φυσικό, εικονικές τοπολογίες (*virtual topologies*). Οι εικονικές τοπολογίες μας επιτρέπουν να επιλέξουμε την πλέον κατάλληλη τοπολογία για το πρόβλημά μας, ανεξάρτητα από τη φυσική τοπολογία του υπολογιστή, που χρησιμοποιούμε.

Στο Σχήμα 6.3 δείχνουμε την εικονική τοπολογία, που εφαρμόζουμε στην παραλληλοποίηση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Πρόκειται για την τοπολογία δακτυλίου (*ring topology*). Στην τοπολογία αυτή ο κάθε επεξεργαστής συνδέεται, μέσω εικονικών συνδέσεων, με δύο γείτονές του. Κάθε επικοινωνία μεταξύ μη άμεσα συνδεδεμένων επεξεργαστών γίνεται σε περισσότερα από ένα βήματα, περνώντας από τους επεξεργαστές, που βρίσκονται ανάμεσά τους. Πάντως, ο κύριος όγκος της επικοινωνίας λαμβάνει χώρα ανάμεσα σε γειτονικούς επεξεργαστές, όταν έχουμε αραιούς πίνακες με μικρό εύρος ζώνης.

Η επικοινωνία, κατά την οποία οι επεξεργαστές, που συμμετέχουν σ' αυτή, περιμένουν να ολοκληρωθεί για να συνεχίσουν την εκτέλεση των εντολών τους, καλείται σύγχρονη (*synchronous communication*). Η σύγχρονη επικοινωνία είναι η απλούστερη στην υλοποίηση, αλλά επειδή κατά τη διάρκειά της δεν λαμβάνουν χώρα χρήσιμοι υπολογισμοί, έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της αποδοτικότητας των προγραμμάτων, στα οποία γίνεται χρήση της.

Για να μειωθεί το κόστος της επικοινωνίας, οι περισσότεροι παράλληλοι υπολογιστές προσφέρουν και τη δυνατότητα της λεγόμενης ασύγχρονης επικοινωνίας (*asynchronous communication*). Κατά τη διάρκεια της επικοινωνίας αυτής, ένας επεξεργαστής μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα και άλλες, άσχετες προς την επικοινωνία, εντολές. Η ασύγχρονη επικοινωνία είναι δυσκολότερη στην εφαρμογή της και μπορεί να αποτελέσει την πηγή σημαντικών προβλημάτων, αν δεν υλοποιηθεί με μεγάλη προσοχή. Στο παράλληλο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, που παρουσιάζουμε, το μεγαλύτερο μέρος της επικοινωνίας γίνεται ασύγχρονα, κάτι που εξασφαλίζει υψηλή αποδοτικότητα.

Το μεγάλο πλεονέκτημα της ασύγχρονης επικοινωνίας είναι ότι, επιτρέπει την υπέρθεση επικοινωνίας και υπολογισμών. Η υπέρθεση αυτή έχει σαν αποτέλεσμα να καλύπτεται το επικοινωνιακό κόστος σε χρόνο. Τα προγράμματα που είναι δομημένα με τρόπο τέτοιο, που να καθιστούν δυνατή την αλληλεπικάλυψη ανταλλαγής μηνυμάτων και αριθμητικών πράξεων, είναι αυτά που έχουν τις καλύτερες παράλληλες επιδόσεις.

Σε όλα σχεδόν τα παράλληλα προγράμματα υπάρχουν σημεία, στα οποία απαιτείται συγχρονισμός ανάμεσα στους επεξεργαστές. Στα σημεία αυτά πρέπει να έχουν φτάσει όλοι οι επεξεργαστές, για να επιτραπεί σε οποιονδήποτε απ' αυτούς να συνεχίσει την εκτέλεση των εντολών του. Ο χρόνος, που σπαταλείται σε επεξεργαστές, που αναμένουν άλλους να συγχρονιστούν μαζί τους, μπορεί να αποτελέσει τη βασική αιτία χαμηλής αποδοτικότητας σε ένα παράλληλο πρόγραμμα. Ο χρόνος αυτός μπορεί να ελαχιστοποιηθεί με τη σωστή κατανομή

του υπολογιστικού φορτίου ανάμεσα στους επεξεργαστές. Επιπλέον, καλόν είναι τα σημεία συγχρονισμού σε ένα πρόγραμμα να περιοριστούν στο μικρότερο δυνατό αριθμό τους.

6.5 Ο Παραλληλισμός της Επαναληπτικής Μεθόδου

Τα σημαντικότερα τμήματα ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων, είναι:

- Η δημιουργία του πλέγματος.
- Ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα των συντελεστών και του διανύσματος σταθερών όρων.
- Η επίλυση του γραμμικού συστήματος.

Το μεγαλύτερο ποσοστό του υπολογιστικού χρόνου ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων αναλώνεται στην αριθμητική επίλυση του συστήματος της μεθόδου. Δυστυχώς, το τμήμα της επίλυσης είναι και το δυσκολότερο στην παραλληλοποίηση, τόσο λόγω αναγκών επικοινωνίας, όσο και λόγω απαιτήσεων συγχρονισμού.

Αντίθετα, ο πλεγματοποιητής δεν εμφανίζει δυσκολίες στον παραλληλισμό του. Κάθε επεξεργαστής γεμίζει από ένα κομμάτι κάθε πίνακα, που περιγράφει το πλέγμα και, μόλις τελειώσει, στέλνει στους υπόλοιπους επεξεργαστές τα κομμάτια που έφτιαξε και λαμβάνει απ' αυτούς τα δικά τους. Τα στοιχεία του πλέγματος, που προσδιορίζουμε με τον τρόπο αυτό, παίζουν σημαντικό ρόλο στην αποτελεσματική κατανομή ανάμεσα στους επεξεργαστές του πίνακα συντελεστών της μεθόδου.

Σχετικά απλή είναι και η παραλληλοποίηση του υπολογισμού των στοιχείων του πίνακα συντελεστών και του διανύσματος σταθερών όρων. Αρχικά, κάθε επεξεργαστής προσδιορίζει τα τετράεδρα, στα οποία ανήκουν οι ακμές, που αντιστοιχούν στις γραμμές του πίνακα συντελεστών, που του έχουν ανατεθεί. Στη συνέχεια, υπολογίζει τους τοπικούς πίνακες συντελεστών και σταθερών όρων για καθένα από τα τετράεδρα αυτά. Όσα από τα στοιχεία των πινάκων πρέπει να προστεθούν σε στοιχεία του ολικού πίνακα συντελεστών ή του ολικού διανύσματος σταθερών όρων, που ανήκουν στα τμήματα, που του έχουν ανατεθεί, τα προσθέτει. Τα υπόλοιπα τα αγνοεί. Με τον τρόπο, που περιγράψαμε, δεν απαιτείται καθόλου επικοινωνία. Το τίμημα γι' αυτό είναι πως, για λίγα τετράεδρα οι τοπικοί πίνακες τους θα υπολογιστούν σε δύο επεξεργαστές. Το τίμημα είναι πρακτικά μηδαμινό, καθώς η ταχύτητα εκτέλεσης υπολογισμών είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα επικοινωνίας.

Για την αριθμητική επίλυση του γραμμικού συστήματος χρησιμοποιούμε μια επαναληπτική μέθοδο. Οι υπολογιστικές πράξεις, που λαμβάνουν χώρα κατά την διάρκεια κάθε επανάληψης της μεθόδου, είναι οι ενημερώσεις διανυσμάτων, τα εσωτερικά γινόμενα και τα γινόμενα του πίνακα συντελεστών με τα διανύσματα διεύθυνσης. Από τις πράξεις αυτές, οι ευκολότερα παραλληλίσιμες είναι οι ενημερώσεις διανυσμάτων. Ο κάθε επεξεργαστής απλώς ενημερώνει μόνον τα κομμάτια των διανυσμάτων, που του έχουν ανατεθεί.

Για τον προσδιορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, κάθε επεξεργαστής υπολογίζει το εσωτερικό γινόμενο των τμημάτων των διανυσμάτων, που του ανήκουν. Πρόκειται για το λεγόμενο τοπικό εσωτερικό γινόμενο. Στη συνέχεια, όλα τα τοπικά εσωτερικά γινόμενα πρέπει να αθροιστούν, για να πάρουμε το ολικό. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο ένας είναι, ο κάθε επεξεργαστής να στείλει σε όλους τους υπόλοιπους το τοπικό του γινόμενο και να λάβει τα δικά τους, για να κάνει την άθροιση. Ο δεύτερος τρόπος είναι, να συγκεντρώσει ένας επεξεργαστής όλα τα τοπικά εσωτερικά γινόμενα, να υπολογίσει το άθροισμά τους και, ακολούθως, να το μεταδώσει στους υπόλοιπους επεξεργαστές. Οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι και, όποιον και να επιλέξουμε, απαιτείται επικοινωνία μεταξύ όλων των επεξεργαστών.

Στην επαναληπτική μέθοδο των Συζυγών Ορθογωνίων Συζυγών Κλίσεων, που χρησιμοποιούμε, τα εσωτερικά γινόμενα επιβάλλουν συγχρονισμό ανάμεσα στους επεξεργαστές, καθώς κανένας τους δεν μπορεί να συνεχίσει, όταν φθάσει σε κάποιο απ' αυτά αν δεν υπολογιστεί το αντίστοιχο ολικό αποτέλεσμα. Οι προσδιορισμοί των $x^{(i+1)}$ και $r^{(i+1)}$ μπορούν να ξεκινήσουν, μόνο μετά την ολοκλήρωση του εσωτερικού γινομένου, που μας δίνει το α_i . Και, καθώς απαιτείται επικοινωνία για το εσωτερικό γινόμενο, δεν μπορούμε να υπερθέσουμε την επικοινωνία αυτή με χρήσιμους υπολογισμούς. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τον προσδιορισμό του διανύσματος διεύθυνσης $p^{(i)}$, που μπορούμε να τον αρχίσουμε, μόνον αφού έχουμε τελειώσει με τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου για το β_{i-1} .

Στον Πίνακα 6.1 παρουσιάζουμε μία παραλλαγή της μεθόδου των Συζυγών Ορθογωνίων Συζυγών Κλίσεων, στην οποία όλος ο χρόνος επικοινωνίας μπορεί να υπερτεθεί με αριθμητικές πράξεις. Πρόκειται απλώς για μια αναδιοργανωμένη εκδοχή της αρχικής μορφής της μεθόδου και, για το λόγο αυτό, είναι ακριβώς το ίδιο σταθερή. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα της, σε σύγκριση με άλλες τροποποιήσεις για καλύτερο παραλληλισμό, είναι ότι, δεν εισάγει επιπρόσθετες αριθμητικές πράξεις.

Η τροποποίηση, που επιβάλλουμε στην επαναληπτική μέθοδο στον Πίνακα 6.1, είναι να καθυστερήσουμε κατά ένα βήμα την ενημέρωση του διανύσματος των λύσεων. Αυτό μας επιτρέπει να υπερθέσουμε στην ενημέρωση αυτή την επικοινωνία για τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου γ . Η παραλλαγή του Πίνακα 6.1 έχει προταθεί από τους Demmel, Heath και Van der Vorst στη δημοσίευση [7].

Επικοινωνία απαιτείται και κατά τον υπολογισμό των γινομένων του ολικού πίνακα συντελεστών με τα διανύσματα διεύθυνσης. Αυτό συμβαίνει, γιατί κάθε επεξεργαστής διαθέτει ένα μόνο τμήμα του διανύσματος που πολλαπλασιάζεται και, ανάλογα με τις θέσεις των μη μηδενικών στοιχείων των γραμμών του, χρειάζεται και στοιχεία του διανύσματος, που δεν του ανήκουν. Αν το εύρος ζώνης του ολικού πίνακα συντελεστών είναι μικρό, τα στοιχεία που χρειάζεται θα ανήκουν μόνο στους γειτονικούς του ή σε λίγους από τους κοντινούς του επεξεργαστές. Είναι προφανές, επομένως, γιατί επιδιώκουμε την ελαχιστοποίηση του εύρους ζώνης. Η επικοινωνία κάθε επεξεργαστή με τους γείτονές του για τη λήψη των στοιχείων του $p^{(i)}$ που χρειάζεται και για την απόδοση αυτών, που οι

άλλοι έχουν ανάγκη απ' αυτόν, μπορεί να υπερτεθεί με τους υπολογισμούς του γινομένου, που αναφέρονται μόνο στα τοπικά του στοιχεία.

```

 $x^{(-1)} = x^{(0)} = \alpha \rho \chi \iota \kappa \eta \ \epsilon \kappa \tau \acute{\iota} \mu \eta \sigma \eta ; r^{(0)} = b - Ax^{(0)} ;$ 
 $p^{(-1)} = 0 ; \beta_{-1} = 0 ; \alpha_{-1} = 0 ;$ 
 $\rho_0 = \langle r^{(0)*}, r^{(0)} \rangle ;$ 
for i=0,1,2,...
     $p^{(i)} = r^{(i)} + \beta_{i-1} p^{(i-1)} ;$ 
     $q^{(i)} = Ap^{(i)} ;$ 
     $\gamma = \langle p^{(i)*}, q^{(i)} \rangle ;$ 
     $x^{(i)} = x^{(i-1)} + \alpha_{i-1} p^{(i-1)} ;$ 
     $\alpha_i = \rho_i / \gamma ;$ 
     $r^{(i+1)} = r^{(i)} - \alpha_i q^{(i)} ;$ 
     $\rho_{i+1} = \langle r^{(i+1)*}, r^{(i+1)} \rangle ;$ 
    if  $\|r^{(i+1)}\|$  αρκετά μικρό then
         $x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha_i p^{(i)} ;$ 
        σταμάτα ;
    end if
     $\beta_i = \rho_{i+1} / \rho_i ;$ 
end

```

Πίνακας 6.1: Η αναδιάρθρωση της μεθόδου των Συζυγών Ορθογωνίων Συζυγών Κλίσεων για αποτελεσματικότερο παραλληλισμό.

6.6 Επιτάχυνση και Αποδοτικότητα

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων της παραλληλοποιημένης μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, στην παράγραφο αυτή εισάγουμε δύο μεγέθη, που χρησιμοποιούνται κατά κόρον στην αξιολόγηση των επιδόσεων των παραλλήλων προγραμμάτων. Πρόκειται για τα μεγέθη της επιτάχυνσης και της αποδοτικότητας.

Σαν επιτάχυνση (speedup) ορίζουμε το λόγο του χρόνου T_1 , που απαιτεί ένα πρόγραμμα για να τρέξει σε έναν επεξεργαστή, προς το χρόνο εκτέλεσης T_p του προγράμματος σε p επεξεργαστές,

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} \quad (6.1)$$

Η επιτάχυνση, συνήθως, αναφέρεται σαν συνάρτηση του πλήθους των επεξεργαστών, αλλά είναι, επίσης, συνάρτηση και του μεγέθους του προβλήματος, που καλούμαστε να λύσουμε.

Ένα μέγεθος, που σχετίζεται με την επιτάχυνση, είναι αυτό της αποδοτικότητας (efficiency). Η αποδοτικότητα ορίζεται ως ο λόγος της επιτάχυνσης, που επιτυγχάνεται σε p επεξεργαστές, προς το πλήθος τους p ,

$$e_p = \frac{S_p}{p} \quad (6.2)$$

Η αποδοτικότητα αποτελεί μέτρο της αξιοποίησης των υπολογιστικών δυνατοτήτων, που έχουμε στη διάθεσή μας για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

6.7 Το Παράλληλο Προγραμματιστικό Περιβάλλον PVM

Τα αρχικά PVM ανήκουν στις λέξεις Parallel Virtual Machine (Παράλληλη Εικονική Μηχανή). Όπως φανερώνει και το όνομά του, το PVM είναι ένα λογισμικό πακέτο, που επιτρέπει τη χρήση ενός ετερογενούς δικτύου παραλλήλων και σειριακών υπολογιστών με τη μορφή μιας ενιαίας υπολογιστικής μονάδας. Αυτό το επιτυγχάνει παρέχοντας ένα προγραμματιστικό περιβάλλον ανάπτυξης και εκτέλεσης παραλλήλων εφαρμογών. Οι εφαρμογές αυτές μπορούν να απαρτίζονται από πολλές αλληλεπιδρώσες, αλλά και, σε κάποιο βαθμό, ανεξάρτητες μεταξύ τους συνιστώσες.

Το PVM αναπτύχθηκε αρχικά από τους Robert Manchek και Vaidy Sunderam στο Emory University και στο Oak Ridge National Laboratory. Αργότερα, στην παραπάνω ομάδα εργασίας προστέθηκαν και οι Adam Beguelin και Jack Dongara.

Το PVM πακέτο αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο είναι μία διαδικασία δαίμονα που καλείται `rnmtd` και είναι εγκατεστημένη μόνιμα σε κάθε υπολογιστή του δικτύου. Το `rnmtd` είναι έτσι σχεδιασμένο ώστε, κάθε χρήστης με απλή πρόσβαση να είναι σε θέση να το εγκαταστήσει. Το άλλο κομμάτι του πακέτου είναι μία βιβλιοθήκη, που περιλαμβάνει ρουτίνες για την ενεργοποίηση και τον τερματισμό διαδικασιών επικοινωνίας και συγχρονισμού μέσα στο δίκτυο. Για να μπορεί μια εφαρμογή να χρησιμοποιήσει το PVM, πρέπει να έχει προηγηθεί η σύνδεσή της με τη βιβλιοθήκη αυτή.

Στο PVM, κάθε εφαρμογή διαχωρίζεται με κάπως χονδροειδή τρόπο σε διακριτές συνιστώσες, που μπορούν να τρέχουν συγχρόνως. Κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης μίας εφαρμογής στο PVM, μπορούν να ενεργοποιηθούν περισσότερα από ένα αντίγραφα κάθε συνιστώσας της. Από τη σκοπιά του

συστήματος, κάθε συνιστώσα αντιστοιχεί σε ένα μεταγλωττισμένο αρχείο, που μπορεί να εκτελεστεί σαν μια διαδικασία επίπεδου χρήστη.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι, αποτελεί ευθύνη του προγραμματιστή να μεταγλωττίσει κάθε τμήμα του προγράμματος σε όλες τις αρχιτεκτονικές, στις οποίες ενδέχεται να εκτελεστεί. Ανάλογα με την αρχιτεκτονική, η μεταγλωττισμένη μορφή μιας συνιστώσας μπορεί να συνδεθεί, είτε με τη βιβλιοθήκη του PVM, είτε με κάποια ειδική βιβλιοθήκη για τη συγκεκριμένη αρχιτεκτονική, είτε και με τις δύο. Κάθε συνιστώσα είναι, επομένως, μια στατική οντότητα, που προσδιορίζεται από το όνομά της.

Μια πλήρης περιγραφή των συνιστώσων μιας εφαρμογής, δηλαδή τα ονόματα των συνιστώσων της και όλα τα εκτελέσιμα, που τους αντιστοιχούν, λαμβάνεται από το λογισμικό υποστήριξης του PVM. Η πληροφορία αυτή συλλέγεται, είτε από κάποιο αρχείο, είτε από μιά διαδικασία εκκίνησης. Κάθε διαδικασία στο PVM είναι ένα εκτελούμενο αντίτυπο κάποιας συνιστώσας και προσδιορίζεται από το όνομα της συνιστώσας αυτής και ένα θετικό αριθμό. Οι διάφορες διαδικασίες μπορούν να ενεργοποιηθούν, είτε από τις ίδιες τις συνιστώσες, είτε από κάποια διαδικασία εκκίνησης, που μπορεί να εκτελεστεί από το χρήστη σε οποιοδήποτε συμμετέχον στην εκτέλεση μηχανήμα.

Από την άλλη μεριά, τα προγράμματα εφαρμογών βλέπουν το PVM σαν μια γενική και ευέλικτη παράλληλη υπολογιστική μονάδα, που υποστηρίζει τα υπολογιστικά μοντέλα κοινής μνήμης, διοχέτευσης μηνυμάτων, καθώς και υβριδικές μορφές τους. Η μονάδα αυτή είναι διαθέσιμη, μέσω τριών διαφορετικών επιπέδων πρόσβασης.

Το πρώτο είναι εντελώς διαφανές στο χρήστη, καθώς οι διάφορες συνιστώσες κατανέμονται αυτόματα στις πιο κατάλληλες θέσεις. Στο δεύτερο, ο χρήστης έχει την ευχέρεια επιλογής συγκεκριμένων αρχιτεκτονικών για την εκτέλεση ορισμένων από τις συνιστώσες, αν το επιθυμεί. Τέλος, προσφέρεται και η δυνατότητα ελέγχου σε πολύ χαμηλό επίπεδο, μέσω του αστηρού καθορισμού του μηχανήματος, στο οποίο θα τρέξει κάθε συνιστώσα. Η διαστρωμάτωση αυτή του ελέγχου εξασφαλίζει ευελιξία, διατηρώντας παράλληλα και την ικανότητα πλήρους αξιοποίησης των ιδιαίτερων ισχυρών στοιχείων κάθε μηχανήματος του δικτύου.

Στο PVM, η υποστήριξη της λειτουργίας σε ένα ετερογενές περιβάλλον προσφέρεται στη μορφή ειδικών δομών, που εκτελούν μετατροπές δεδομένων ανάμεσα σε μηχανήματα (όπου αυτό είναι απαραίτητο) και στοιχείων επικοινωνίας μεταξύ συνιστώσων, που ενσωματώνονται σε υπάρχουσες διαδικαστικές γλώσσες και δίνουν τη δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης. Όλη η επικοινωνία, που λαμβάνει χώρα στο PVM, κάνει χρήση του προτύπου εξωτερικής αναπαράστασης δεδομένων XDR. Επίσης, οφείλουμε να προσθέσουμε ότι, διατίθενται εντολές υψηλού επιπέδου για την κλήση διαδικασιών, αποστολή και λήψη μηνυμάτων, συγχρονισμό, αμοιβαίο αποκλεισμό και προσομοίωση κοινής μνήμης.

Ένα από τα μειονεκτήματα του PVM είναι ότι, οι επιδόσεις του σε επικοινωνιακές διαδικασίες (όπως είναι αυτές της εκπομπής, ανταλλαγής και συλλογής μηνυμάτων) μειώνεται, όταν το μέγεθος των εκπεμπόμενων πινάκων

υπερβαίνει τα 0.5×10^6 bytes. Αυτό, πιθανώς, συμβαίνει, λόγω της εσωτερικής αναδιάρθρωσης των πινάκων, που πρόκειται να εκπεμφθούν, μία διαδικασία που είναι τελείως διάφανη.

Επίσης, το PVM απαιτεί η ανάθεση των διαδικασιών σε κάθε κόμβο να γίνεται από τον ίδιο το χρήστη (εκτός και αν τα υπολογιστικά στοιχεία μοιράζονται τον ίδιο χώρο δίσκου στο NFS). Πάντως, αναμφισβήτητα, το PVM είναι ένα από τα πιο διαδεδομένα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στον παράλληλο προγραμματισμό και είναι διαθέσιμο, χωρίς καμιά οικονομική επιβάρυνση, για έναν πολύ μεγάλο αριθμό σειριακών, διανυσματικών και παράλληλων υπολογιστών.

6.8 Το Σύστημα Παράλληλης Επεξεργασίας MPI

Στα παράλληλα συστήματα κατανεμημένης μνήμης είναι ουσιώδης η ανάγκη για επικοινωνιακές διαδικασίες, που οργανώνουν το συγχρονισμό και την ανταλλαγή δεδομένων μεταξύ των διαφόρων επεξεργαστών. Εξέχουσα θέση ανάμεσα στις διάφορες βιβλιοθήκες τέτοιου τύπου διαδικασιών, που έχουν κατά καιρούς εμφανιστεί, κατέχει το σύστημα Message Passing Interface (Διαπροσωπεία Διαβίβαση Μηνυμάτων). Μάλιστα, δεν καθιστά υπερβολή να αναφέρουμε πως, τα τελευταία χρόνια, το MPI τείνει να καθιερωθεί σαν *de facto standard* για τη διαχείριση μηνυμάτων, τόσο σε υπερυπολογιστικά συστήματα MIMD, όσο και σε κατανεμημένα συστήματα δικτύων υπολογιστών (Beowulf Clusters).

Ο πιο θεμελιώδης επικοινωνιακός μηχανισμός, που παρέχει το MPI, είναι ένα ζεύγος εντολών για αποστολή και λήψη μηνυμάτων (`MPI_Send` και `MPI_Recv` αντίστοιχα). Η εντολή `MPI_Send`, όπως, άλλωστε, φανερώνει και το όνομά της, αποστέλλει δεδομένα από μια συγκεκριμένη πηγή προς ένα καθορισμένο προορισμό. Για τη λήψη των δεδομένων αυτών, απαιτείται η χρήση μιας εντολής `MPI_Recv` από την πλευρά του προορισμού.

Όταν κάποια διαδικασία ενεργοποιεί μια από τις παραπάνω εντολές, η εκτέλεση της διαδικασίας αναστέλλεται, μέχρι τη διεκπεραίωση της επικοινωνίας. Εκτός από την συγχρονισμένη αυτή μορφή επικοινωνίας, το MPI παρέχει στους χρήστες του και τη δυνατότητα ασύγχρονης ανταλλαγής μηνυμάτων (`MPI_Isend` και `MPI_Irecv`), κατά τη διάρκεια της οποίας δεν μπλοκάρει η εκτέλεση των εμπλεκόμενων διαδικασιών.

Πέραν, όμως, από τις ένα-προς-ένα (one-to-one) επικοινωνίες, η πραγματική ισχύς του MPI έγκειται στο γεγονός ότι, υποστηρίζει προηγμένες τεχνικές ομαδικής επικοινωνίας μεταξύ διαδικασιών. Οι τεχνικές αυτές ρυθμίζουν την επικοινωνία από μια-προς-πολλές (one-to-many) διαδικασίες, από πολλές-προς-μια (many-to-one) και μεταξύ πολλαπλών αποστολέων και αποδεκτών (many-to-many).

Μια χαρακτηριστική περίπτωση ομαδικής επικοινωνίας είναι η μετάδοση (broadcasting). Για την υποστήριξη της μετάδοσης, που είναι, ουσιαστικά, μια

ταυτόχρονη αποστολή του ίδιου μηνύματος σε πολλαπλούς αποδέκτες, το MPI παρέχει την εντολή `MPI_Bcast`.

Το MPI προσφέρει, επίσης, ένα σύνολο εντολών δημιουργίας ομάδων επικοινωνίας (των οποίων τη σπουδαιότητα επισημάναμε σε προηγούμενη παράγραφο), καθώς και μέσα οργάνωσης διαδικασιών, ακόμα και με τη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων. Μάλιστα, η νέα έκδοση του MPI (MPI Version 2.0) παρέχει δυνατότητες δυναμικής δημιουργίας διαδικασιών, μονόπλευρης (one-sided) επικοινωνίας και υποστηρίζει παράλληλη είσοδο έξοδο (parallel I/O).

Ο προγραμματιστής, που ενδιαφέρεται να αξιοποιήσει τις δυνατότητες του MPI στα παράλληλα προγράμματά του, έχει πολλές επιλογές στη διάθεσή του. Μια από τις πιο δημοφιλείς είναι το MPICH, μια δωρεάν υλοποίηση πάνω στην οικογένεια πρωτοκόλων TCP/IP, που αναπτύχθηκε από τα Argonne National Labs και το Mississippi State University (<http://www-c.msc.anl.gov/mpi/mpich>). Κλείνοντας τη σύντομη αυτή αναφορά στο MPI, αξίζει να αναφέρουμε πως, μια εξαιρετική πηγή πληροφοριών, που το αφορούν, από προδιαγραφές προτύπων, μέχρι συνδέσμους για διαθέσιμες υλοποιήσεις, είναι το ιστόπεδο του MPI Forum (<http://www.mpi-forum.org/>).

Βιβλιογραφία

- [1]. M. J. Flynn, "Some computer organizations and their effectiveness," *IEEE Trans. Computers*, vol. C-21, no. 9, 1972.
- [2]. F. Ercal, J. Ramanujam, and P. Sadayappan, "Task allocation onto hypercube by recursive raincut bipartitioning," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, vol. 10, pp. 35-44, 1990.
- [3]. A. Pothen, H. D. Simon, and K. Liou, "Partitioning of sparse matrices with eigenvectors of graphs," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 11, pp. 430-452, Jul. 1990.
- [4]. B. W. Kernighan, and S. Lin, "An efficient heuristic procedure for partitioning graphs," *The Bell System Technical Journal*, pp. 291-307, 1970.
- [5]. L. Hmandi, R. Lee, and F. Ozguner, "Review of domain-decomposition methods for the implementation of FEM on Massively Parallel Computers," *IEEE Antennas Propagat. Magazine*, vol. 37, no., 1, pp. 93-96, Feb. 1995.
- [6]. C. Farhat, "A simple and efficient automatic FEM domain decomposer," *Computers and Structures*, vol. 28, no. 5, pp. 579-602, 1988.

-
- [7]. J. Demmel, M. Heath, and H. Van der Vorst, "Parallel linear algebra," Acta Numerica, vol. 2, Cambridge Press, New York, 1993.
- [8]. K. Tanabe, "Projection methods for solving a singular system of linear equations and its applications," Numer. Math., vol. 17, pp. 203-214, Mar. 1971.
- [9]. G. M. Baudet, "Asynchronous iterative methods for multiprocessors," J. Assoc. Comput. Mach., vol. 25, no. 2, pp. 226-244, Apr. 1978.
- [10]. B. Stupfel, "A fast domain decomposition method for the solution of electromagnetic scattering by large objects," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 44, no. 10, pp. 1375-1385, Oct. 1996.
- [11]. T. F. Chan and D. Goovaerts, "A note on the efficiency of domain decomposed incomplete factorizations," *SIAM J. Sc. Stat. Comput.*, vol. 11, no. 4, pp. 794-803, Mar. 1990.

Κεφάλαιο 7

Κατανεμημένη Επεξεργασία

7.1 Οι Εξελίξεις στα Δίκτυα Υπολογιστών - Συναφείς Τεχνολογίες και Αρχιτεκτονικές

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 6, η προσπάθεια της αντιμετώπισης ολοένα και πιο απαιτητικών υπολογιστικά προβλημάτων, καθώς και της εκτέλεσής τους σε όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο, αποτελεί θεμελιώδη ερευνητική δραστηριότητα στον τομέα της προσομοίωσης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας. Οι τεχνικές του παραλληλισμού, οι οποίες περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 6, αποτέλεσαν μια πρώτη προσέγγιση. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται οι τεχνικές της κατανεμημένης επεξεργασίας, οι οποίες πρόκειται να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο, καθώς δίνουν στους μηχανικούς τη δυνατότητα για την επίλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας, σε συνεχώς λιγότερο χρόνο και με πολύ καλή σχέση κόστους / απόδοσης. Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των τεχνικών αυτών αποτελεί η δυνατότητα, που παρέχουν για την αξιοποίηση της υπολογιστικής ισχύος σε δίκτυα υπολογιστών.

Τα δίκτυα υπολογιστών εξελίσσονται συνεχώς με ραγδαίους ρυθμούς και η εξέλιξη αυτή προχωρά σε διάφορα επίπεδα. Το μέγεθος των δικτύων αυξάνει και το φαινόμενο αυτό δεν οφείλεται αποκλειστικά στο διαδίκτυο, του οποίου η ανάπτυξη είναι εμφανής. Τα δίκτυα των οργανισμών, καθώς και τα δίκτυα, που συνδέουν διάφορους οργανισμούς μεταξύ τους, γνωρίζουν, επίσης, ταχεία ανάπτυξη, με στόχο τη δημιουργία ομοιόμορφων, ανοικτών και αποτελεσματικών διαύλων πληροφορίας στο εσωτερικό των οργανισμών, αλλά και μεταξύ αυτών. Η εξέλιξη αυτή υποστηρίζεται από τη διαθεσιμότητα φθηνού υλικού. Μια σημαντική παρενέργεια της ανάπτυξης αυτής είναι η χαρακτηριστική αύξηση του όγκου της πληροφορίας, που διακινείται μέσα από τα δίκτυα, η οποία, με τη σειρά της, ωθεί την επιστημονική κοινότητα στη

διερεύνηση νέων τρόπων, με στόχο τη βελτίωση της απόδοσης της επικοινωνιακής υποδομής. Οι διασυνδέσεις των δικτύων βελτιώνονται συνεχώς και οι τεχνολογικές εξελίξεις οδηγούν σε αύξηση της υπολογιστικής ισχύος, τόσο στους ενδιάμεσους, όσο και στους τελικούς κόμβους των δικτύων.

Η αύξηση του μεγέθους και της απόδοσης των δικτύων υπολογιστών αποτελούν, τόσο την αιτία, όσο και το αποτέλεσμα ενός σημαντικού φαινομένου: η διασύνδεση στο δίκτυο δεν αποτελεί, πλέον, μια ακριβή διαδικασία και υποστηρίζεται από πολλά προϊόντα του εμπορίου, ενώ, επιπρόσθετα, καθίσταται δυνατή, ανεξάρτητα από τη φυσική θέση του χρήστη. Οι εξελίξεις στις ασύρματες επικοινωνίες αποδεσμεύουν τους κόμβους του δικτύου από τον περιορισμό της φυσικής τους τοποθέτησης σε συγκεκριμένο σημείο και ενισχύουν την ανάπτυξη του λεγόμενου *mobile computing*. Στο σενάριο αυτό, οι χρήστες μπορούν να μετακινούνται μαζί με τους υπολογιστές τους σε διάφορες φυσικές τοποθεσίες και γεωγραφικές περιοχές, ενώ εξακολουθούν να είναι συνδεδεμένοι στο δίκτυο μέσω ασύρματης ζεύξης.

Ένα ακόμα σημαντικό φαινόμενο είναι η αυξημένη διαθεσιμότητα εύκολων στη χρήση τεχνολογιών, οι οποίες είναι προσβάσιμες, ακόμα και από μη εξειδικευμένους χρήστες (για παράδειγμα το World Wide Web). Οι τεχνολογίες αυτές πυροδότησαν τη δημιουργία νέων πεδίων εφαρμογών, καθώς και νέων αγορών, μεταβάλλοντας σημαντικά το ρόλο των δικτύων και ειδικά του διαδικτύου. Τα δίκτυα, πλέον, δεν μπορούν να θεωρηθούν αποκλειστικά ως επικοινωνιακές τεχνολογίες. Τα σύγχρονα δίκτυα υπολογιστών υποστηρίζουν τη μεταφορά καινοτόμων μέσων, τα οποία υποστηρίζουν τη συνεργασία και την επικοινωνία μεταξύ των χρηστών. Όροι όπως «ηλεκτρονικό εμπόριο», ή «τηλεφωνία βασισμένη στο διαδίκτυο» αποδεικνύουν αυτή τη δραστική μεταβολή.

Παρόλη τη ραγδαία αυτή εξέλιξη, όμως, διάφορα προβλήματα πρέπει να αντιμετωπιστούν. Η συνεχόμενη αύξηση του μεγέθους των δικτύων δημιουργεί το πρόβλημα της κλιμάκωσης. Αποτελέσματα και συμπεράσματα, τα οποία έχουν εξαχθεί κατά τη λειτουργία μικρών δικτύων, δεν ισχύουν πια κατά τη μετάβαση σε ένα παγκοσμίου εμβέλειας δίκτυο, όπως το διαδίκτυο. Επίσης, η ασύρματη διασύνδεση των κόμβων στα δίκτυα δημιουργεί επιπρόσθετα προβλήματα. Οι κόμβοι του δικτύου είναι δυνατό να μετακινούνται και η διασύνδεσή τους στο δίκτυο να μην είναι συνεχής (λόγω αδυναμίας λήψης σήματος), επομένως, η τοπολογία του δικτύου δεν είναι πλέον στατική. Ως συνέπεια του παραπάνω, μερικά από τα βασικά σημεία έρευνας στα κατανομημένα συστήματα δεν έχουν ακόμη διαλευκανθεί και είναι απαραίτητη η υιοθέτηση, καθώς και η επέκταση, των ήδη ανεπτυγμένων θεωρητικών και τεχνολογικών αποτελεσμάτων στο νέο αυτό σενάριο. Τίθεται, επίσης, το ζήτημα της διάχυσης των δικτυακών υπηρεσιών σε όλο και μεγαλύτερο μέρος της κοινωνίας, η οποία δίνει στους χρήστες τη δυνατότητα να προσαρμόσουν τη λειτουργικότητα και τις διεπαφές μιας υπηρεσίας, ανάλογα με τις ατομικές τους ανάγκες και προτιμήσεις. Τέλος, η δυναμική φύση, τόσο της επικοινωνιακής υποδομής όσο και των απαιτήσεων της αγοράς, απαιτεί αυξημένη ευελιξία και επεκτασιμότητα κατά τη διαδικασία σχεδιασμού των υπηρεσιών και των εφαρμογών.

Κατά καιρούς, έχουν πραγματοποιηθεί πολλές προσπάθειες, προκειμένου να απαντηθούν τα ερωτήματα, που σχετίζονται με το πολυδιάστατο αυτό πρόβλημα. Οι περισσότερες από τις προτεινόμενες προσεγγίσεις, παρόλα αυτά, προσπαθούν να προσαρμόσουν ήδη κατοχυρωμένα μοντέλα και τεχνολογίες στο νέο αυτό σενάριο και, συνήθως, λαμβάνουν ως δεδομένη την παραδοσιακή αρχιτεκτονική πελάτη-εξυπηρετητή. Για παράδειγμα, η αρχιτεκτονική CORBA ολοκληρώνει τις απομακρυσμένες κλήσεις διεργασιών (RPCs) με το αντικειμενοστραφές παράδειγμα, με στόχο να συνδυάσει τα πλεονεκτήματα του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού με τους καλά κατοχυρωμένους επικοινωνιακούς μηχανισμούς των απομακρυσμένων κλήσεων διεργασιών. Η προσέγγιση αυτή, όμως, δεν εξασφαλίζει το βαθμό ευελιξίας, προσαρμοστικότητας και επαναπροσδιορισμού, που απαιτείται προκειμένου να εκπληρωθούν οι απαιτήσεις, που περιγράφονται παραπάνω.

Μια διαφορετική προσέγγιση πηγάζει από την πολλά υποσχόμενη ερευνητική περιοχή, η οποία χαρακτηρίζεται με την ορολογία κινητός κώδικας. Οι τεχνολογίες κινητού κώδικα συνέπεσαν χρονικά με την εμφάνιση της Java και της Ιδεατής Μηχανής Java (Java Virtual Machine), που για πρώτη φορά έδωσαν τη δυνατότητα υλοποίησης με πιο σύγχρονα μέσα της παλιάς ιδέας της απομακρυσμένης υποβολής και εκτέλεσης εργασιών δέσμης (remote submission and execution of batch jobs). Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1990, πολλά από αυτά τα συστήματα αναφέρονταν ως συστήματα κινητών πρακτόρων (mobile agent systems). Ο όρος «πράκτορας» ή “agent” χρησιμοποιήθηκε με ποικίλους τρόπους και σε πολλά διαφορετικά περιβάλλοντα στην περασμένη δεκαετία. Περιληπτικά, μπορεί να ειπωθεί ότι, αντιπροσωπεύει ένα καινούργιο παράδειγμα λογισμικού και ένα σύνολο συναφών προτύπων, τεχνολογιών κ.ο.κ., το οποίο θεωρείται σαν το επόμενο βήμα στην εξέλιξη του λογισμικού μετά τον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό και την Τεχνολογία Κατανεμημένων Αντικειμένων (Distributed Object Technology). Λόγω της μεγάλης σημασίας της, η τεχνολογία των κινητών πρακτόρων θα εξεταστεί πιο αναλυτικά στο κεφάλαιο 8.

Οι επόμενες παράγραφοι παρουσιάζουν μια επισκόπηση των τρόπων, με τους οποίους είναι δυνατή η κατανεμημένη υπολογιστική επεξεργασία, καλύπτοντας ουσιαδείς έννοιες και δημοφιλείς υλοποιήσεις αυτών των εννοιών, παρουσιάζοντας παράλληλα τα δυνατά και αδύνατα σημεία τους.

7.2 Η Κοινή Βάση

7.2.1 Δικτυακή Επικοινωνία

Ένα σύνολο υπολογιστών, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους με ένα φυσικό μέσο μεταφοράς, λέμε ότι αποτελούν ένα δίκτυο υπολογιστών. Η έννοια της επικοινωνίας μεταξύ των υπολογιστών είναι ένα από τα βασικά στοιχεία, πάνω στα οποία δομούνται οι κατανεμημένες υπολογιστικές αρχιτεκτονικές.

Η επικοινωνία μεταξύ των υπολογιστών πραγματοποιείται με την αποστολή πακέτων μεταξύ τους. Κάθε πακέτο περιέχει, εκτός από την πληροφορία που αποστέλλεται, τις διευθύνσεις του αποστολέα και του παραλήπτη, έτσι ώστε να είναι δυνατή η δρομολόγησή του μέσα στο δίκτυο. Στην περίπτωση που, το μέγεθος ενός πακέτου υπερβεί κάποιο καθορισμένο όριο, είναι δυνατός ο τεμαχισμός του σε μικρότερα κομμάτια, τα οποία επανασυντίθενται στον τελικό προορισμό.

Όπως σε κάθε περίπτωση επικοινωνίας, έτσι και στην επικοινωνία μεταξύ των υπολογιστών, είναι απαραίτητη η ύπαρξη κάποιων κανόνων, οι οποίοι ονομάζονται πρωτόκολλα. Ένα επικοινωνιακό πρωτόκολλο είναι, στην ουσία ένα σύνολο από κανόνες, που περιγράφουν το πώς λαμβάνει χώρα η επικοινωνία σε ένα δίκτυο υπολογιστών και επιτρέπουν στα συστήματα υπολογιστών να ερμηνεύουν σωστά τα πακέτα, που λαμβάνουν από άλλα συστήματα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που τα πακέτα φτάνουν στον κόμβο προορισμού με διαφορετική σειρά από αυτή που έχουν στην πραγματικότητα, θα πρέπει να τοποθετηθούν στην κατάλληλη σειρά, προκειμένου η πληροφορία να παρουσιαστεί με τον κατάλληλο τρόπο.

Λόγω της πολυπλοκότητας, η οποία χαρακτηρίζει την επικοινωνία μεταξύ των υπολογιστών, αυτή δεν ρυθμίζεται από ένα και μοναδικό πρωτόκολλο. Αντιθέτως, ο μηχανισμός της επικοινωνίας αποσυντίθεται σε μια ιεραρχία λειτουργιών, κάθε μια από τις οποίες αντιμετωπίζει ένα κομμάτι της επικοινωνίας και, κατά συνέπεια, τα επικοινωνιακά πρωτόκολλα είναι οργανωμένα σε επίπεδα. Προκειμένου να επιτευχθεί η επικοινωνία, οι λειτουργίες του κάθε επιπέδου ζητούν υπηρεσίες από το κατώτερο του επίπεδο, χωρίς, όμως, να έχουν γνώση για τον τρόπο, με τον οποίο οι υπηρεσίες αυτές θα υλοποιηθούν από το επίπεδο αυτό. Επιπρόσθετα, λοιπόν, με την ιεραρχική διάσπαση του μηχανισμού της επικοινωνίας, η αφαιρετικότητα, που προσδίδεται μέσα από την απόκρυψη της πληροφορίας των κατωτέρων επιπέδων, αποτελεί ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της επικοινωνίας των υπολογιστών.

7.2.2 Σύγχρονη και Ασύγχρονη Μετάδοση

Κατά τη διαδικασία αποστολής ενός πακέτου δεδομένων από μια διεύθυνση πηγής (source address) σε μια διεύθυνση προορισμού (destination address), διακρίνουμε δύο τρόπους μετάδοσης :

Σύγχρονη μετάδοση: Κατά τη σύγχρονη μετάδοση πακέτων, ο αποστολέας ζητά επιβεβαίωση λήψης από τον κόμβο προορισμού κάθε πακέτου, που έστειλε, προτού αποστείλει το επόμενο πακέτο πληροφορίας.

Ασύγχρονη μετάδοση: Κατά την ασύγχρονη μετάδοση, ο αποστολέας στέλνει πακέτα στο δίκτυο, χωρίς να περιμένει επιβεβαίωση λήψης για τα πακέτα αυτά. Όπως σε ένα ταχυδρομικό πακέτο, το ενδιαφέρον του αποστολέα για την λήψη ή μη, του πακέτου καθώς και οι ενέργειες, που εκτελούνται κατά τη λήψη του πακέτου, ποικίλουν. Υπάρχουν φορές, όπου ο αποστολέας δεν ενδιαφέρεται πότε ή εάν το πακέτο έφτασε στον προορισμό του. Σε άλλες περιπτώσεις ο αποστολέας επιζητά την επιβεβαίωση λήψης του πακέτου,

αλλά δεν χρειάζεται να λάβει την επιβεβαίωση, για να συνεχίσει να μεταδίδει πακέτα.

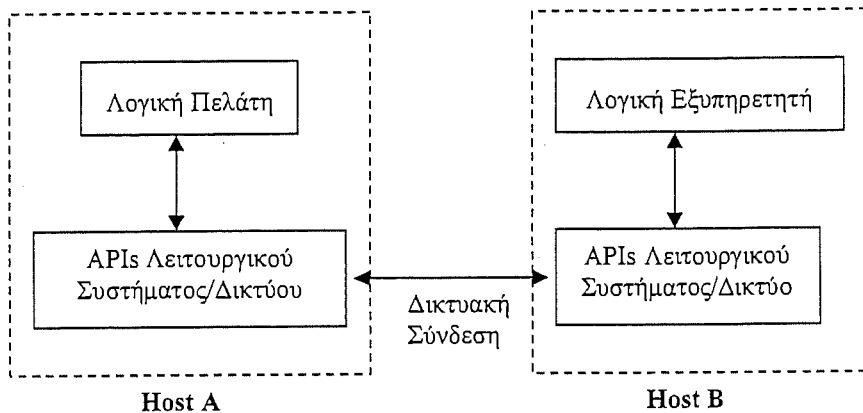
Ο σύγχρονος τρόπος μετάδοσης είναι εκείνος, όπου ο αποστολέας χρειάζεται επιβεβαίωση από τον παραλήπτη προτού συνεχίσει ενώ κατά τον ασύγχρονο τρόπο, ο αποστολέας δεν απαιτεί κάποια απάντηση από τον παραλήπτη. Αυτή η διαφορά είναι, γενικά, ένας πρωταρχικός παράγοντας στον καθορισμό ενός πρωτοκόλλου κατάλληλου για μία συγκεκριμένη εργασία.

7.2.3 Πελάτες, Εξυπηρετητές και Ομότιμες Οντότητες

Η λογική, στην οποία βασίζεται η κατανεμημένη επεξεργασία, είναι η υπόθεση ότι, μια εφαρμογή λογισμικού μπορεί να χωριστεί σε θεμελιώδη κομμάτια λογισμικού (modules), από τα οποία αποτελείται. Τα κομμάτια αυτά δεν είναι απαραίτητο να εκτελούνται στον ίδιο χώρο μνήμης. Σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή, προκειμένου να εκτελεστεί η εφαρμογή, θα πρέπει να υπάρχει επικοινωνία μεταξύ των κομματιών λογισμικού. Οι όροι «πελάτης», «εξυπηρετητής» και «ομότιμη οντότητα» χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τους ρόλους των κομματιών λογισμικού κατά τη διαδικασία εκτέλεσης της εφαρμογής. Τα κομμάτια, τα οποία ζητούν κάποια υπηρεσία από άλλα κομμάτια, ονομάζονται «πελάτες», ενώ τα κομμάτια τα οποία προσφέρουν υπηρεσίες ονομάζονται «εξυπηρετητές». Βέβαια, κατά την εκτέλεση της εφαρμογής, οι ρόλοι μπορούν να μεταβάλλονται. Για παράδειγμα, ένα κομμάτι λογισμικού μπορεί, σε κάποια περίπτωση, να δρα ως πελάτης ενώ, σε κάποια άλλη, ως εξυπηρετητής. Στην περίπτωση που, ένα κομμάτι λογισμικού δρα ταυτόχρονα ως πελάτης και ως εξυπηρετητής, αυτό χαρακτηρίζεται με τον όρο «ομότιμη οντότητα».

7.2.4 Διεπαφές Προγραμματισμού Εφαρμογών (*Application Programming Interfaces - APIs*)

Προκειμένου να επικοινωνήσουν μεταξύ τους τα κομμάτια μιας κατανεμημένης εφαρμογής, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η δικτυακή υποδομή. Κατά τη διάρκεια ανάπτυξης της εφαρμογής, όμως, θα ήταν πολύ πολύπλοκο να αναπτύσσεται προγραμματιστικά η διαδικασία επικοινωνίας σε χαμηλό επίπεδο παράλληλα με τη λογική της εφαρμογής. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται οι Διεπαφές Προγραμματισμού Εφαρμογών (APIs), οι οποίες αποτελούν ένα σύνολο από συναρτήσεις, που καλούνται μέσα από το πρόγραμμα και αναλαμβάνουν την υλοποίηση των μηχανισμών μετάδοσης και λήψης των δεδομένων (βλέπε Σχήμα 7.1). Γενικά, αυτές οι συναρτήσεις χαμηλού επιπέδου παρέχουν περιορισμένη αφαίρεση της επικοινωνιακής συνόδου, αφήνοντας στους προγραμματιστές την παροχή της διευθυνσιοδότησης και της μετατροπής των δεδομένων.



Σχήμα 7.1: Ευθεία δικτυακή επικοινωνία.

Η χρησιμοποίηση APIs παρέχει στους προγραμματιστές τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- Ευκολότερη και ταχύτερη υλοποίηση των εφαρμογών, εφόσον οι προγραμματιστές επικεντρώνονται στην ανάπτυξη της κατανεμημένης εφαρμογής και όχι στις λεπτομέρειες της επικοινωνίας (π.χ. υλοποίηση του πρωτοκόλλου επικοινωνίας).
- Επαναχρησιμοποίηση λογισμικού, εφόσον οι ίδιες APIs χρησιμοποιούνται από πολλές εφαρμογές.
- Φορητότητα των εφαρμογών, εφόσον, στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται από τη δικτυακή υποδομή APIs, οι οποίες έχουν καθοριστεί από διαδικασίες τυποποίησης (standardized APIs), οι εφαρμογές μπορούν να αναπτύσσονται ανεξάρτητα από το δίκτυο, το οποίο θα μεταφέρει την πληροφορία.

7.2.5 Τερματικές Διεπαφές

Η παλαιότερη μορφή της κατανεμημένης επεξεργασίας είναι η διαδικασία της σύνδεσης με έναν απομακρυσμένο υπολογιστή, μέσω ενός απλού τερματικού ή μιας νοητής τερματικής υπηρεσίας, που τρέχει σε ένα σταθμό εργασίας. Παρόλο που η μέθοδος αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ευέλικτη, έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα αποτελεσματική. Για το είδος αυτό της επικοινωνίας, έχουν αναπτυχθεί μια σειρά από πρωτόκολλα, μεταξύ αυτών το telnet, rsh και rexec.

Η βασική ιδέα και η υλοποίησή της είναι σχετικά απλές. Ο πελάτης δρα βασικά ως ένα απευθείας συνδεδεμένο τερματικό, με ορισμένες επιπρόσθετες δυνατότητες, που του επιτρέπουν την επικοινωνία μέσω απομακρυσμένης

σύνδεσης. Κάθε φορά που ένα πλήκτρο πιέζεται, ο πελάτης αποστέλλει ένα πακέτο, το οποίο περιέχει έναν κωδικό, που δίνει τη δυνατότητα στον εξυπηρετητή να αναγνωρίσει το συγκεκριμένο πλήκτρο. Ο εξυπηρετητής, με τη σειρά του, επιστρέφει στον πελάτη πακέτα, που περιέχουν δεδομένα, τα οποία θα προβληθούν στην οθόνη του πελάτη. Παρόλο που, γενικά, οι βασισμένες σε εξυπηρετητές εφαρμογές είναι περιορισμένες σε διεπαφές κειμένου, έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν χρώμα και επιπρόσθετα πλήκτρα, προκειμένου να ενισχύσουν τη λειτουργικότητα της διεπαφής του πελάτη.

Ανάμεσα στα πλεονεκτήματα των τερματικών διεπαφών είναι το γεγονός ότι, σε πολλές περιπτώσεις, δεν απαιτούν τη χρήση API για την επικοινωνία κατά την ανάπτυξη της εφαρμογής, επιτρέποντας στα προγράμματα, που είναι γραμμένα χωρίς προοπτικές για καταναλωμένη επεξεργασία, να μπορούν να χρησιμοποιηθούν απομακρυσμένα χωρίς τροποποιήσεις.

7.2.6 Μηνύματα

Επόμενη στην εξέλιξη του καταναλωμένου προγραμματισμού έρχεται η έννοια του μηνύματος. Ως μήνυμα ορίζουμε ένα πακέτο από δεδομένα με κατάλληλη ετικέτα, που φανερώνει την πληροφορία που περιέχει. Αυτό επιτρέπει, σε ένα ενδιάμεσο επίπεδο στον εξυπηρετητή να κατευθύνει το μήνυμα ή τα δεδομένα, που αυτό περιέχει, στον κατάλληλο αποδέκτη. Τα συστήματα μηνυμάτων μπορούν να λειτουργήσουν με βάση μια ασύγχρονη ή σύγχρονη αρχιτεκτονική. Λόγω του ότι η βασισμένη σε μηνύματα επικοινωνία είναι κατάλληλη για ενδιάμεση δρομολόγηση, τα χαρακτηριστικά αυτά μπορούν να συνδυαστούν, προκειμένου να παρέχουν ένα επίπεδο αφαίρεσης στην επικοινωνιακή υποδομή.

Κατά την ασύγχρονη λογική, τα μηνύματα αποθηκεύονται σε μια ουρά από τον εξυπηρετητή/δρομολογητή, από την οποία λαμβάνονται και διαβιβάζονται σε ένα ή περισσότερους λογικούς επεξεργαστές. Οι επεξεργαστές αυτοί μπορεί να μην αποκρίθουν στα μηνύματα καθόλου, ή να αποκρίθουν απευθείας στον πελάτη. Παρόλα αυτά, προκειμένου να διατηρηθεί η αφαίρεση, μπορούν να στείλουν ένα μήνυμα πίσω στον εξυπηρετητή, μέσω μιας άλλης ουράς, το οποίο δρομολογείται πίσω στον πελάτη.

Αντίθετα, κατά τη σύγχρονη μετάδοση μηνυμάτων, ο εξυπηρετητής/δρομολογητής διαβιβάζει το μήνυμα στον επεξεργαστή, ο οποίος διαβιβάζει, με τη σειρά του, μια απόκριση στον εξυπηρετητή, για να επιστραφεί στον πελάτη. Υπάρχει, ακόμα, μια υβριδική κατάσταση λειτουργίας, στην οποία ο εξυπηρετητής συμπεριφέρεται ασύγχρονα, ενώ ο πελάτης συμπεριφέρεται σύγχρονα, επιτρέποντας στον εξυπηρετητή να έχει την αποδοτικότητα της ασύγχρονης λειτουργίας και στον πελάτη να επωφελείται από την απλότητα και την ασφάλεια της σύγχρονης επεξεργασίας. Σε αυτή τη βασική αρχιτεκτονική της επικοινωνίας του πελάτη με έναν εξυπηρετητή, ο οποίος εκτέμνει μηνύματα με βάση το περιεχόμενό τους, βασίζονται πολλά καταναλωμένα μοντέλα.

7.2.7 Κλήση Απομακρυσμένων Διαδικασιών - Remote Procedure Call

Μια εφαρμογή εκτελείτε ως ένα σύνολο διεργασιών (processes), κάθε μια από τις οποίες εκτελεί ορισμένες διαδικασίες (procedures). Η Κλήση Απομακρυσμένων Διαδικασιών (RPC) αποτελεί έναν τρόπο ανάπτυξης εφαρμογών κατανεμημένης επεξεργασίας και, ουσιαστικά, σχετίζεται με την αλληλεπίδραση μεταξύ διαδικασιών, καθορίζοντας τους μηχανισμούς, που λαμβάνουν χώρα προκειμένου να κληθεί, μέσα από μια διεργασία, κάποια διαδικασία, η οποία εκτελείται σε ένα απομακρυσμένο σύστημα. Οι μηχανισμοί αυτοί θα πρέπει να φροντίσουν για τη σωστή μεταφορά των παραμέτρων κλήσης της απομακρυσμένης διαδικασίας, καθώς και για την επιστροφή των αποτελεσμάτων της στην καλούσα διεργασία. Ουσιαστικά, σειριοποιούν τα δεδομένα κλήσης μιας συνάρτησης και τα μεταφέρουν στο απομακρυσμένο σύστημα, όπου και τα ανακατασκευάζουν. Η καλούσα διεργασία αναμένει την επιστροφή από την κλήση της απομακρυσμένης μεθόδου, όπως ακριβώς συμβαίνει σε ένα πρόγραμμα δεδομένο-κεντρικού προγραμματισμού.

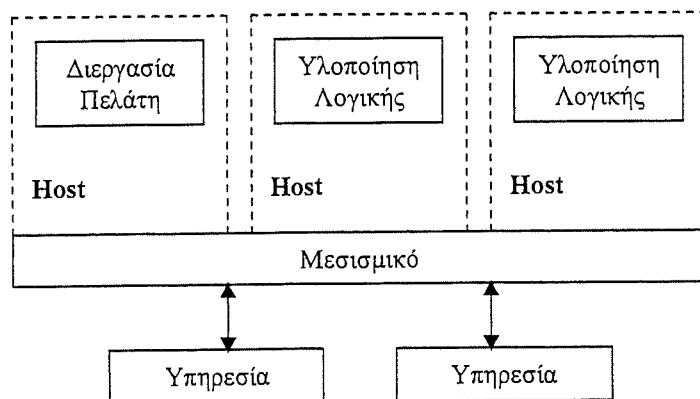
Σημαντικό ρόλο στην Απομακρυσμένη Κλήση Διαδικασιών διαδραματίζουν τα λεγόμενα στέλεχη (stubs), τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν ως πράκτορες των απομακρυσμένων διαδικασιών στο σύστημα, στο οποίο πραγματοποιείται η κλήση. Χρησιμοποιώντας το στέλεχος, η κλήση της συνάρτησης πραγματοποιείται με τον ίδιο τρόπο, που θα πραγματοποιούταν, αν αυτή εκτελούταν τοπικά. Το στέλεχος συλλέγει τις παραμέτρους και τις τοποθετεί σε ένα μήνυμα. Η λειτουργία αυτή είναι γνωστή ως συγκέντρωση παραμέτρων (parameter marshalling). Κατόπιν, το μήνυμα μεταφέρεται σε ένα στέλεχος, το οποίο βρίσκεται στο απομακρυσμένο περιβάλλον εκτέλεσης. Το στέλεχος αυτό διαχωρίζει τις παραμέτρους κλήσης και καλεί την απομακρυσμένη διεργασία με το γνωστό τρόπο κλήσης μιας συνάρτησης. Όταν ολοκληρωθεί η εκτέλεση της συνάρτησης, με αντίστοιχη λειτουργία των στελεχών, η τιμή που επιστρέφεται από την απομακρυσμένη διαδικασία, σειριοποιείται και μεταβιβάζεται στην καλούσα διεργασία.

7.3 Client/Server

Όπως προαναφέρθηκε, οι όροι «πελάτης» και «εξυπηρετητής», στην πραγματικότητα, αναφέρονται σε γενικευμένους ρόλους, που αναλαμβάνουν οι συμβαλλόμενοι σε μία επικοινωνιακή σύνοδο. Παρόλα αυτά, ο όρος πελάτης/εξυπηρετητής έχει χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή ενός υψηλότερου επιπέδου, αλλά παρόμοιας, όσον αφορά στη σύλληψη, αρχιτεκτονικής. Στην αρχιτεκτονική αυτή, η κύρια επεξεργασία γίνεται στον πελάτη, ο οποίος αποστέλλει οδηγίες εκτέλεσης στον εξυπηρετητή. Σε αυτό τον τύπο αρχιτεκτονικής, υποτίθεται η αποστολή σύγχρονων μηνυμάτων, ενώ ο πελάτης αναμένει επιβεβαίωση ότι, η οδηγία έχει εκτελεστεί, πριν να συνεχίσει.

7.4 Μεσισμικό - Middleware

Στις κλασικές αρχιτεκτονικές πελάτη/εξυπηρετητή, ο πελάτης επικοινωνεί απ' ευθείας με τον εξυπηρετητή. Μια τέτοια επικοινωνία προϋποθέτει ότι, ο πελάτης γνωρίζει τον τρόπο, με τον οποίο ο εξυπηρετητής θα δεχθεί την κλήση του (π.χ. το τρόπο, με τον οποίο αναπαρίσταται η πληροφορία στον εξυπηρετητή, το πρωτόκολλο επικοινωνίας μαζί του κλπ.) και, επομένως, κατά την ανάπτυξη της εφαρμογής του πελάτη, θα πρέπει τα στοιχεία του εξυπηρετητή να λαμβάνονται υπόψη. Η τεχνολογία μεσισμικού παρεμβάλλει ένα λειτουργικό επίπεδο μεταξύ αυτών του πελάτη και του εξυπηρετητή, το οποίο παρέχει υπηρεσίες, όπως location and alias resolution, πιστοποίηση (authentication) και σημασιολογία συναλλαγής (transaction semantics). Άλλες λειτουργίες, σχετιζόμενες με το μεσισμικό, περιλαμβάνουν το συγχρονισμό και τη μετάφραση μεταξύ διαφορετικών τρόπων αποθήκευσης και αναπαράστασης της πληροφορίας (translation between data formats).



Σχήμα 7.2: Αρχιτεκτονική μεσισμικού.

Με τη χρήση του μεσισμικού, οι πελάτες αλληλεπιδρούν με τον εξυπηρετητή σε ένα περισσότερο αφηρημένο επίπεδο, αντί να αλληλεπιδρούν απευθείας με ένα συγκεκριμένο host και/ή διεργασία (βλέπε Σχήμα 7.2). Οι διάφορες υπηρεσίες παρέχονται, επίσης, μέσα από αφηρημένα επίπεδα, μειώνοντας, με τον τρόπο αυτό, τη διάκριση μεταξύ των υπηρεσιών, που παρέχονται από το μεσισμικό και τη λειτουργικότητα, που προστίθεται από τους εξυπηρετητές. Η παροχή των υπηρεσιών με αυτό τον αφηρημένο τρόπο επιτρέπει την ανάπτυξη εφαρμογών, βασισμένων σε τυποποιημένες APIs, χωρίς γνώση της τοποθεσίας ή της υλοποίησης της εξωτερικής λειτουργικότητας. Η απόκρυψη της υλοποίησης αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά στοιχεία του μοντέλου του μεσισμικού, παρόλο που καθίσταται δύσκολο, σε μερικές περιπτώσεις, για τον πελάτη να καθορίσει, τι απόδοση μπορεί περιμένει από την κάθε λογική υλοποίηση.

7.4.1 Κατανεμημένο Περιβάλλον Υπολογισμών

Το OSF DCE επισημοποιεί πολλές από τις έννοιες που περιγράφονται στην παρούσα ενότητα, μαζί με ένα σύνολο από προδιαγραφές [1]. Στην ουσία, το OSF DCE παρέχει τα εργαλεία και τις υπηρεσίες, που υποστηρίζουν την ανάπτυξη κατανεμημένων εφαρμογών. Το DCE περιλαμβάνει ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον, μέσα από το οποίο μπορούν να αναπτυχθούν, αλλά και να εκτελεστούν, οι κατανεμημένες εφαρμογές. Τα εργαλεία, τα οποία βοηθούν την ανάπτυξη των εφαρμογών, είναι κυρίως τα DCE RPC και DCE Threads, ενώ παρέχονται υπηρεσίες καταλόγου (Directory Service) για παροχή πληροφοριών σχετικά με τους πόρους του κατανεμημένου συστήματος (χρήστες, υπολογιστές, υπηρεσίες), ασφάλειας (Security Service) για παροχή ασφαλούς επικοινωνίας και ελεγχόμενης πρόσβασης στο κατανεμημένο σύστημα και κατανεμημένου χρόνου (Distributed Time Service) για το συγχρονισμό των υπολογιστών, που συμμετέχουν στο Κατανεμημένο Περιβάλλον Επεξεργασίας. Το βασικό πλεονέκτημα του DCE είναι ότι, όλα τα εργαλεία και οι υπηρεσίες για την ανάπτυξη και την εκτέλεση των κατανεμημένων εφαρμογών είναι ολοκληρωμένα, απαλλάσσοντας τον προγραμματιστή από την ανάπτυξη κώδικα για την επικοινωνία των κατανεμημένων διεργασιών.

Επιπρόσθετα, πρέπει να αναφερθεί ότι, το DCE προσανατολίζεται στην υποστήριξη της ανάπτυξης κατανεμημένων εφαρμογών για ανομοιογενή συστήματα, επιτρέποντας την εκτέλεση της κατανεμημένης εφαρμογής σε ένα σύνολο κόμβων, οι οποίοι υποστηρίζουν διαφορετικά λειτουργικά συστήματα και πλατφόρμες υλισμικού.

Τέλος, μέσω των υπηρεσιών καταλόγου και κατανεμημένων αρχείων (Distributed File Service –DFS), που παρέχονται από την αρχιτεκτονική DCE, επιτρέπεται στους χρήστες της κατανεμημένης εφαρμογής να έχουν πρόσβαση σε κοινά δεδομένα, καθώς και να μοιράζονται αρχεία με άλλους χρήστες του συστήματος, ανεξάρτητα από τη φυσική τοποθεσία των αρχείων αυτών, μέσω της χρήσης ενός εξυπηρετητή αρχείων (File Server).

7.4.2 Αξιόπιστη Μεταφορά Μηνυμάτων

Φαινομενικά, οι αξιόπιστες αρχιτεκτονικές μεταφοράς μηνυμάτων, όπως η MQSeries της IBM και η MSMQ της Microsoft, μοιάζουν πολύ με τις υποδομές για τοποθέτηση μηνυμάτων σε ουρές, που περιγράφηκαν νωρίτερα. Πέρα, όμως, από αυτή την επιφανειακή ομοιότητα, οι αρχιτεκτονικές αυτές διαφέρουν πάρα πολύ στην υλοποίηση.

Προκειμένου να επιτευχθεί η αξιόπιστη μεταφορά ασύγχρονων μηνυμάτων, χρησιμοποιείται ένα μοντέλο αποθήκευσης και προώθησης (store and forward), στο οποίο το μήνυμα, το οποίο πρόκειται να σταλεί από μια διεργασία, διαβιβάζεται σύγχρονα σε ένα επίπεδο μεσισμικού, το οποίο αποθηκεύει το μήνυμα και κάθε πληροφορία διεύθυνσης, την οποία αυτό περιέχει σε ένα επίμονο μηχανισμό αποθήκευσης, πριν ο έλεγχος να επιστραφεί στην αποστέλλουσα διεργασία. Εφόσον το μήνυμα έχει αποθηκευτεί με τον τρόπο αυτό, το μεσισμικό μπορεί να χρησιμοποιήσει μια πληθώρα μεθόδων,

προκειμένου να προσπαθήσει να μεταφέρει το μήνυμα στον αποδέκτη του, ενώ ο αποστολέας του μηνύματος συνεχίζει την εργασία του.

Η αξιοπιστία της αρχιτεκτονικής πηγάζει από την ιδέα ότι, ο τρέχων κάτοχος του μηνύματος δεν καταστρέφει το επίμονο αντίγραφο του μηνύματος, έως ότου λάβει επιβεβαίωση από τον επακόλουθο αποδέκτη ότι, το μήνυμα έχει αποθηκευτεί από αυτόν με επιτυχία.

Επειδή κάθε ζεύξη της επικοινωνίας αποθηκεύει το μήνυμα, μέχρι να γνωρίζει ότι έχει προωθηθεί με επιτυχία, ο αποστολέας του μηνύματος μπορεί να προχωρήσει τις εργασίες του, αφού διαβεβαιωθεί ότι, το μήνυμα θα φτάσει στον προορισμό του. Εξαιτίας της ασύγχρονης φύσης της αρχιτεκτονικής αυτής, ο αποστολέας πρέπει να ζητήσει επιβεβαίωση λήψης του μηνύματος (η επιβεβαίωση πρέπει να είναι μια καθορισμένη ενέργεια, ύστερα από τη λήψη του συγκεκριμένου μηνύματος), αν χρειάζεται να γνωρίζει τότε το έφτασε το μήνυμα ή άλλες λεπτομέρειες του χειρισμού του.

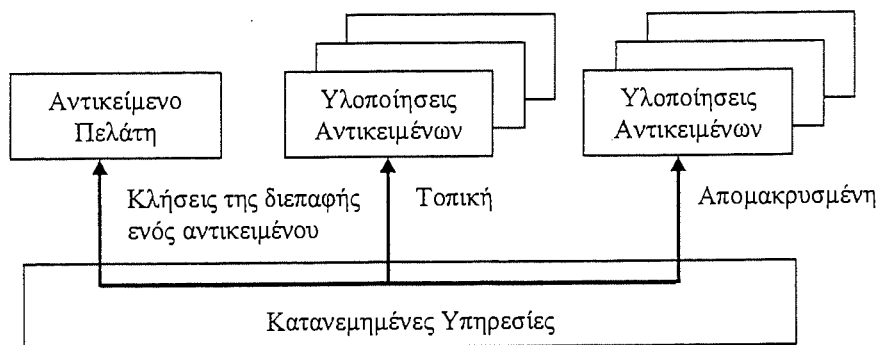
7.5 Κατανεμημένα Αντικείμενα - Distributed Objects

Οι αρχιτεκτονικές κατανεμημένων αντικειμένων χρησιμοποιούν ως βάση την ιδέα του μεσισμικού και ενθυλακώνουν δεδομένα μέσα στις λειτουργικές διεπαφές των αντικειμένων. Όπως στις καλά σχεδιασμένες procedural APIs, οι λεπτομέρειες της υλοποίησης αποκρύπτονται από τους χρήστες των αντικειμένων. Σε αντίθεση, βέβαια με τις παραδοσιακές APIs, οι αρχιτεκτονικές αντικειμένων περιορίζουν την πρόσβαση στην κλήση ορισμένων μεθόδων που ορίζονται για το αντικείμενο. Επιπρόσθετα, οι μέθοδοι καλούνται για τα αντικείμενα έμμεσα, μέσα από αναφορές σε αυτά, εξαλείφοντας έτσι την ανάγκη για δημιουργία τοπικών στιγμιotypών των αντικειμένων (βλέπε Σχήμα 7.3).

Αυτή η σχεδόν πλήρης απόκρυψη της υλοποίησης επιτρέπει στις αρχιτεκτονικές των κατανεμημένων αντικειμένων να υποστηρίζουν διαφάνεια ως προς την τοποθεσία, πλατφόρμα και γλώσσα προγραμματισμού. Μια τέτοια διαφάνεια, βέβαια, έχει και το κόστος της, το οποίο έχει ωθήσει τους σχεδιαστές μερικών αρχιτεκτονικών κατανεμημένων αντικειμένων να αποφύγουν, σε κάποιο βαθμό, την ουδετερότητα, με αντάλλαγμα τη βελτίωση της απόδοσης, την εφαρμοσιμότητα σε συγκεκριμένες εργασίες και/ή την ευκολία στη χρήση.

7.5.1 Java RMI - Απομακρυσμένη Κλήση Μεθόδων

Η γλώσσα προγραμματισμού Java, αν και σχετικά καινούργια στην βιομηχανία των υπολογιστών, έχει κερδίσει μια σημαντική αποδοχή λόγω της υποστήριξης που παρέχει σε ετερογενείς αρχιτεκτονικές, στην ασφάλεια και στον αντικειμενοστραφή σχεδιασμό. Η Java σχεδιάστηκε από την αρχή ως ένα πλήρες περιβάλλον εκτέλεσης υπολογισμών, παρά σαν μία ακόμα γλώσσα προγραμματισμού και, επομένως, μπορεί και προσφέρει μια σύμφωνη και ταυτόχρονα αυθαίρετη διεπαφή, ανεξάρτητα από την πλατφόρμα εγκατάστασής της.



Σχήμα 7.3: Αρχιτεκτονική καταναμημένων αντικειμένων.

Η ανεξαρτησία από την πλατφόρμα επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης της εικονικής μηχανής Java (Java virtual machine), η οποία εξομοιώνει από μόνη της μία πλατφόρμα. Η JVM είναι διαθέσιμη για κάθε συνδυασμό υλικού – λειτουργικού συστήματος, πάνω στο οποίο ένα πρόγραμμα σε Java εκτελείται. Λόγω του γεγονότος ότι, όλα τα προγράμματα σε Java εμφανίζονται, στο επίπεδο της εφαρμογής, να εκτελούνται στην ίδια πλατφόρμα, η επικοινωνία μεταξύ τους είναι αρκετά πιο εύκολη.

Η τεχνολογία Java RMI [2] παρέχει μια αρχιτεκτονική που επιτρέπει τη δημιουργία καταναμημένων εφαρμογών, που στηρίζονται στην επικοινωνία μεταξύ Java αντικειμένων. Το πλεονέκτημα της χρήσης Java RMI, κατά τη σχεδίαση ενός καταναμημένου συστήματος αποκλειστικά βασισμένου σε Java, είναι το ότι, η εκμετάλλευση του μοντέλου αντικειμένων της Java μπορεί να επιτευχθεί οποτεδήποτε είναι δυνατόν.

7.5.2 Η Τεχνολογία DCOM

Το πρωτόκολλο καταναμημένων αντικειμένων DCOM [3] της Microsoft, που αποτελεί επέκταση της αρχιτεκτονικής διασύνδεσης COM, επιτρέπει την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε αντικείμενα, που δρουν σε διαφορετικούς υπολογιστές σε ένα δίκτυο. Το COM ξεκίνησε ως ένας τρόπος, που θα επέτρεπε σε προγράμματα-πελάτες να συνδέονται σε υλοποιήσεις αντικειμένων δυναμικά: π.χ κατά την εκτέλεσή τους, ενσωματώνοντάς τα σε ένα μοναδικό χώρο διευθύνσεων. Οι υλοποιήσεις αυτές είναι πακεταρισμένες στις λεγόμενες βιβλιοθήκες DLLs. Η αρχιτεκτονική COM είναι, ουσιαστικά, ένα σχήμα ολοκλήρωσης, υιοθετώντας τη δομή των εικονικών πινάκων από συναρτήσεις της γλώσσας C++ για δυαδική συμβατότητα (binary compatibility). Αυτοί οι ιδεατοί πίνακες από συναρτήσεις, γνωστοί και ως vtables, αποτελούνται από έναν πίνακα στον οποίο περιέχονται οι διευθύνσεις των συναρτήσεων (μέσω της γλώσσας C). Οι ισοδύναμες COM διεπαφές παρουσιάζονται στους πελάτες ως

δείκτες σε vtables, αποκρύπτοντας, έτσι, τις λεπτομέρειες της υλοποίησης. Η προσέγγιση αυτή έχει ως αποτέλεσμα τα δυαδικά COM να μπορούν να αντικατασταθούν ανεξάρτητα, με την προϋπόθεση ότι υλοποιούν τις ίδιες διεπαφές με τους προκατόχους τους.

7.5.3 Η Αρχιτεκτονική CORBA

Ένας από τους πιο σημαντικούς στόχους της κατανεμημένης αντικειμενοστραφούς επεξεργασίας είναι ο συνδυασμός των τεχνολογιών αντικειμένων και των κατανεμημένων συστημάτων και η ολοκλήρωσή τους σε μία αρχιτεκτονική, με έμφαση στη διαλειτουργικότητα, όχι μόνο μεταξύ των ήδη υπάρχουσών υπολογιστικών πλατφορμών, αλλά και αυτών που πρόκειται να αναπτυχθούν στο μέλλον.

Στα πλαίσια αυτά, ο OMG (Object Management Group) δημιούργησε την αρχιτεκτονική OMA (Object Management Architecture) [4], [5], η οποία θέτει πρότυπα για τον ορισμό, τον τρόπο δημιουργίας και τους μηχανισμούς επικοινωνίας μεταξύ των αντικειμένων, στα πλαίσια ενός ανομοιογενούς κατανεμημένου περιβάλλοντος. Τα βασικά μοντέλα, που καθορίζονται στην αρχιτεκτονική αυτή είναι το Μοντέλο Αντικειμένου (Object Model), το οποίο καθορίζει την περιγραφή ενός αντικειμένου και το Μοντέλο Αναφοράς (Reference Model), το οποίο καθορίζει τις πιθανές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των αντικειμένων. Σύμφωνα με το Μοντέλο Αντικειμένου, το αντικείμενο είναι μια οντότητα, η οποία χαρακτηρίζεται από κάποια συγκεκριμένη ταυτότητα και παρέχει υπηρεσίες σε εξωτερικές προς αυτή οντότητες (αντικείμενα). Κάθε αντικείμενο παρέχει τις υπηρεσίες του μέσα από διεπαφές. Οι διεπαφές μεταξύ των αντικειμένων ορίζονται μέσω της γλώσσας καθορισμού διεπαφών (Interface Definition Language-IDL) του OMG, η οποία είναι σχεδιασμένη με προσανατολισμό την ανεξαρτησία από την πλατφόρμα και τη γλώσσα προγραμματισμού. Όλες οι διεπαφές των αντικειμένων, καθώς και οι τύποι των δεδομένων, που χρησιμοποιούνται σε αυτές τις διεπαφές, καθορίζονται μέσα από την IDL. Αυτός ο κοινός τρόπος καθορισμού των διεπαφών επιτρέπει στις εφαρμογές να αλληλεπιδρούν με αντικείμενα, χωρίς να γνωρίζουν τις λεπτομέρειες της υλοποίησης των αντικειμένων αυτών.

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά και, ίσως, ο κορμός της αρχιτεκτονικής OMA είναι το αντικείμενο του μεσάζοντα αίτησης αντικειμένων (Object Request Broker-ORB). Μέσα από το αντικείμενο αυτό, παρέχονται υπηρεσίες διαφάνειας της τοποθεσίας των αντικειμένων, ενεργοποίησης αντικειμένων-εξυπηρετητών, καθώς και επικοινωνίας μεταξύ των αντικειμένων, αναλαμβάνοντας με διαφανή τρόπο τη διαχείριση των δεδομένων και τη μετατροπή της μορφής των κλήσεων μεταξύ των αντικειμένων. Η προδιαγραφή CORBA (Common Object Request Broker Architecture) είναι μια αρχιτεκτονική, η οποία υποστηρίζει την ανάπτυξη κατανεμημένων εφαρμογών, καθορίζει ακριβώς το σύνολο των διεπαφών και των υπηρεσιών τις οποίες πρέπει να υλοποιεί το αντικείμενο ORB προκειμένου να είναι συμβατό με τις προδιαγραφές του OMG και, επιπρόσθετα, παρέχει το απαραίτητο λογισμικό για την ανάπτυξη εφαρμογών σε κατανεμημένα περιβάλλοντα.

Σύμφωνα με την προδιαγραφή CORBA, το αντικείμενο ORB διαχειρίζεται πλήρως την επικοινωνία μεταξύ των κατανεμημένων αντικειμένων. Κατά συνέπεια, από την πλευρά του πελάτη, ένα αντικείμενο είναι τελείως αδιαφανές, με την έννοια ότι, η υλοποίησή του και η θέση του είναι άγνωστες στην εφαρμογή που το χρησιμοποιεί. Γενικά, ένας πελάτης γνωρίζει μόνον το πώς θα βρῖσκει ή θα δημιουργεί τα αντικείμενα, που χρειάζεται, μέσα από διεπαφές σε γνωστά αντικείμενα, όπως μηχανισμούς αναζήτησης και εργοστάσια αντικειμένων (factories). Είναι πιθανόν, ο πελάτης να μη γνωρίζει πού ή πώς τα αντικείμενα αυτά έχουν υλοποιηθεί, αλλά είναι ικανός να τα εντοπίσει, γνωρίζοντας το όνομά τους, μέσα από την υπηρεσία ονομάτων της CORBA (CORBA Naming Service) [5].

Στην περίπτωση των αντικειμένων CORBA, ο πελάτης γνωρίζει μόνον τη δημόσια διεπαφή του αντικειμένου και, κατά συνέπεια, μπορεί να έχει πρόσβαση στη λειτουργικότητα του αντικειμένου μέσα από αυτή. Το πρότυπο CORBA παρέχει, επίσης, κάποιες δυνατότητες για προσδιορισμό της διεπαφής του αντικειμένου κατά το χρόνο εκτέλεσης και για την κλήση μέσα από το Interface Repository (IR) της Dynamic Invocation Interface (DII) του αντικειμένου.

7.5.4 Η Τεχνολογία Κινητού Κώδικα

Οι τεχνολογίες, αρχιτεκτονικές και μεθοδολογίες, που προαναφέρθηκαν, παρουσιάζουν μια σειρά από περιορισμούς και μειονεκτήματα, όταν εφαρμοστούν για κατανεμημένη επεξεργασία σε μεγάλη κλίμακα (π.χ. Internet). Συγκεκριμένα, υστερούν στην παροχή κατάλληλου βαθμού προσαρμοστικότητας, κλιμάκωσης και διαμορφωσιμότητας. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού, η έρευνα κατευθύνεται σε διάφορες καινοτόμες προσεγγίσεις. Η πιο πολλά υποσχόμενη και ενδιαφέρουσα από αυτές βασίζεται στη δυνατότητα της μετακίνησης κώδικα σε ένα δίκτυο υπολογιστών. Στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζονται λεπτομερέστερα οι βασικές αρχές αυτής της τεχνολογίας.

7.6 Σύγκριση των Τεχνολογιών

Πολλές από τις έννοιες, που παρουσιάστηκαν παραπάνω, εφαρμόζονται σε ένα πλήθος κατανεμημένων αρχιτεκτονικών και πολλές αρχιτεκτονικές αναπτύσσονται η μια με βάση την άλλη.

Για μερικές τεχνολογίες, παρότι παλιές, ακόμα και σήμερα υφίστανται πολύ σημαντικοί λόγοι για να συνεχίσουν να χρησιμοποιούνται. Βεβαίως, κανείς διαχειριστής συστημάτων UNIX ή mainframe δεν θα ήταν πρόθυμος να εγκαταλείψει τις βασισμένες σε κείμενο διεπαφές, για την απομακρυσμένη διαχείριση μέσω σύνδεσης dial-up. Παρόμοια, η υλοποίηση τηλεπικοινωνιών για μεταφορά μεγάλου όγκου πληροφορίας (high volume) ή μεταφορά πληροφορίας με χαμηλή επιβάρυνση (low overhead) επιτυγχάνεται συχνά, χρησιμοποιώντας διεπαφές χαμηλού επιπέδου για τα λειτουργικά συστήματα και τα δίκτυα.

Παρόλα αυτά, όπου η ευκολία και το κόστος υλοποίησης είναι οι σημαντικότεροι παράγοντες, οι τυποποιημένες αρχιτεκτονικές αποτελούν μια πολύ καλή επιλογή. Στην περίπτωση αυτή, οι αρχιτεκτονικές μπορούν να διαχωριστούν σε ασύγχρονες και σύγχρονες, ενώ αυτές μπορούν περαιτέρω να διαχωριστούν σε προσανατολισμένες στις διαδικασίες και σε αντικειμενοστραφείς μεθόδους.

Για την περίπτωση ασύγχρονης επικοινωνίας, οι βασισμένες σε μηνύματα αρχιτεκτονικές είναι, συνήθως, οι πιο κατάλληλες. Στις περιπτώσεις που, απαιτείται επιβεβαίωση της παράδοσης του μηνύματος, αξιόπιστο μεσισμικό, που εκτελεί λειτουργίες αποθήκευσης και προώθησης, δίνει συνήθως τη λύση. Σε άλλες περιπτώσεις, η επιπρόσθετη επιβάρυνση, λόγω της αξιόπιστης παράδοσης μηνυμάτων, ίσως να μην είναι απαραίτητη, ειδικά όταν η γενική αξιοπιστία των υπαρχουσών υπολογιστικών πλατφορμών λαμβάνεται υπόψη.

Στην περίπτωση που, χρησιμοποιείται προγραμματισμός προσανατολισμένος σε διαδικασίες, μια γενικά καλή επιλογή είναι η χρήση DCE RPC. Αυτή η δοκιμασμένη και ευρέως διαδεδομένη υποδομή προσφέρει μια διεπαφή γραμμένη σε C, η οποία μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί από C και C++ εφαρμογές. Για συστήματα γραμμένα σε άλλες γλώσσες, όπου η υποστήριξη για DCE RPC είναι ανεπαρκής, η σύγχρονη αποστολή μηνυμάτων μπορεί να είναι η κατάλληλη λύση.

Τέλος, αναφέρεται το θέμα της κατανομής, προσανατολισμένης στα αντικείμενα. Από τις τρεις υποδομές, που προαναφέρθηκαν, το πρότυπο CORBA παρέχει τη μεγαλύτερη ευελιξία, μέσω της ανεξαρτησίας του από τη γλώσσα προγραμματισμού και την υπολογιστική πλατφόρμα. Υπάρχει, όμως, κάποιο κόστος, το οποίο σχετίζεται με αυτήν την ανεξαρτησία, τόσο όσον αφορά στην ανάπτυξη, όσο και στην επιβάρυνση σε χρόνο εκτέλεσης. Αυτό το κόστος μπορεί να μειωθεί με κατάλληλους συγκερασμούς κατά τη διάρκεια της σχεδίασης. Βέβαια, μια λιγότερο ευέλικτη εναλλακτική λύση μπορεί να αποδειχθεί ασύμφορη, αν δεν υποστηρίζει δυνατότητες μελλοντικών απαιτήσεων.

Ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες, που ισχυροποιούν τις λύσεις COM/DCOM της Microsoft, είναι η ήδη εγκατεστημένη υποδομή (κάθε υπολογιστής, που χρησιμοποιεί Windows υποστηρίζει σε κάποιο επίπεδο COM). Οι περισσότερες 32-bit εκδόσεις Windows υποστηρίζουν DCOM, επίσης, παραθέτοντας ένα ισχυρό επιχειρήμα για τη χρήση του αποκλειστικά σε περιβάλλοντα Windows. Σχεδόν όλα τα εργαλεία ανάπτυξης εφαρμογών σε Windows παρέχουν σχετικά εύχρηστους ενθυλακωτές (wrappers), επιτρέποντας την ολοκλήρωση στοιχείων του COM στις εφαρμογές.

Ο λόγος της χρήσης Java RMI είναι η ευχρηστία της. Επειδή υποστηρίζει αντικείμενα Java, ταιριάζει απόλυτα στο μοντέλο της Java, με ελάχιστο αντίκτυπο στους πόρους ανάπτυξης της εφαρμογής. Παρόλα αυτά, αφού η υποστήριξη για CORBA έχει δομηθεί στο περιβάλλον της Java, το RMI δεν έχει το πλεονέκτημα της ήδη εγκατεστημένης υποδομής. Στην περίπτωση, όμως, κατανεμημένων συστημάτων καθαρά βασισμένων σε Java, η ευκολία της χρήσης RMI είναι χαρακτηριστική.

Υποστηρικτές κάθε μιας από αυτές τις αρχιτεκτονικές μπορούν να βρεθούν εύκολα. Ο αριθμός τους είναι πολύ μεγάλος και είναι αδύνατο να υποστηριχθεί ότι, κάποια από αυτές είναι η κατάλληλη για όλα τα κατανεμημένα συστήματα. Πρέπει, επίσης, να σημειωθεί ότι, παρότι πολλές από τις πιο διαδεδομένες υλοποιήσεις αυτών των αρχιτεκτονικών εξετάστηκαν στα πλαίσια του κεφαλαίου αυτού, υπάρχει ακόμα ένας μεγάλος αριθμός αρχιτεκτονικών, που δεν εξετάστηκαν. Μια αναλυτική σύγκριση των προτύπων CORBA και DCOM μπορεί να βρεθεί στην [6]. Συγκρίσεις και τεκμηρίωση όλων των αρχιτεκτονικών, που αναφέρθηκαν, μπορούν να βρεθούν επίσης και σε πολλές διευθύνσεις του World Wide Web.

Η κατανεμημένη επεξεργασία καθίσταται όλο και πιο διαδεδομένη στις μέρες μας. Με τη βοήθεια των αρχιτεκτονικών, που περιγράφηκαν, καθώς και πολλών άλλων, είμαστε σε θέση να επιλύσουμε ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων, τα οποία δεν θα μπορούσαμε καν να σκεφτούμε, πριν από μερικά χρόνια. Πριν από τη χρήση οποιασδήποτε αρχιτεκτονικής για την ανάπτυξη κατανεμημένων εφαρμογών, πρέπει να εξετάζονται προσεκτικά οι παρούσες και μελλοντικές απαιτήσεις, όπως επίσης και οι δυνατότητές της.

Βιβλιογραφία

- [1]. R. Salz, "DCE 1.2 Contents Overview", Open Group RFC 63.3, The Open Group, October 1996.
- [2]. "Java Remote Method Invocation", Sun Microsystems, Inc, December 1997
- [3]. N. Brown, C. Kindel, "Distributed Component Object Model Protocol", Microsoft Corporation, January 1998.
- [4]. "The Common Object Request Broker: Architecture and Specification, Version 2.1", Object Management Group, et al, August 1997.
- [5]. "CORBA services: Common Object Services Specification", Object Management Group, et al, July 1997.
- [6]. O. Tallman, J. Kain, "COM versus CORBA: A Decision Framework", *Quoin Inc.*, January 1998.

Κεφάλαιο 8

Η Τεχνολογία των Κινητών Πρακτόρων

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 7, μια πολλά υποσχόμενη τεχνολογία κατανεμημένης επεξεργασίας είναι η Τεχνολογία των Κινητών Πρακτόρων, η οποία εξετάζεται ξεχωριστά στο παρόν κεφάλαιο.

Ο όρος «πράκτορας λογισμικού» [1] έχει υιοθετηθεί σήμερα, ως ο πλέον γενικευμένος όρος, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποδηλώσει την έννοια μιας αυτόνομης οντότητας λογισμικού, η οποία αυτοματοποιεί ορισμένες από τις δραστηριότητες, που ένας ανθρώπινος χρήστης ή μία οποιαδήποτε άλλη διεργασία λογισμικού μπορεί να έχει μεταβιβάσει σε αυτήν. Με άλλα λόγια, είναι μία ενθυλακωμένη οντότητα λογισμικού με τη δική της πληροφορία κατάστασης (state), τη δική της συμπεριφορά και το δικό της νήμα ελέγχου. Επιπρόσθετα, έχει την ικανότητα να αλληλεπιδρά με άλλες οντότητες, είτε αυτές είναι άνθρωποι, είτε άλλοι πράκτορες, είτε κληροδοτημένα συστήματα (legacy systems).

8.1 Ιστορική Αναδρομή

Εξετάζοντας την εξέλιξη της συγκεκριμένης τεχνολογίας την τελευταία δεκαετία, φαίνεται ότι, αυτή ξεκίνησε στις αρχές της δεκαετίας, με την ταυτόχρονη εμφάνιση διαφορετικών εννοιών πρακτόρων και τεχνολογιών, οι οποίες σήμερα είναι δυνατόν να διακριθούν σε Ευφυείς και Κινητούς Πράκτορες [2], [3]. Το ενδιαφέρον στους Ευφυείς Πράκτορες συνέπεσε χρονικά με την αυξημένη έμφαση, που δίδονταν στα συστήματα πολλαπλών πρακτόρων (Multi Agent Systems – MAS) και στους πράκτορες διεπαφής (Interface Agents – IA) στις αρχές της δεκαετίας του 1990. Εξελίξεις στην επιστημονική κοινότητα

της κατανεμημένης τεχνητής νοημοσύνης (Distributed Artificial Intelligence – DIA) [4] είχαν οδηγήσει στα δύο αυτά γεγονότα. Η βασική ιδέα, πίσω από τα συστήματα πολλαπλών πρακτόρων, είναι ότι, πολύπλοκες δραστηριότητες μπορούν να παρασταθούν, σαν το αποτέλεσμα αλληλεπιδράσεων ανάμεσα σε απλούστερες συνιστώσες λογισμικού, που αναφέρονταν ως «πράκτορες». Ένα σύστημα πολλαπλών πρακτόρων μπορεί, επομένως, να ιδωθεί σαν μία χαλαρή κοινότητα πρακτόρων, που αλληλεπιδρούν με έναν συντονισμένο (δηλαδή συνεπή ως προς τη συμπεριφορά) τρόπο, προκειμένου να δώσουν λύση σε ένα πρόβλημα. Γίνεται φανερό ότι, από την αρχή, η επικοινωνία μεταξύ πρακτόρων και τα μοντέλα συνεργασίας μεταξύ τους αντιπροσώπευαν ένα πολύ σημαντικό ζήτημα για τον τύπο αυτόν των πρακτόρων.

Παρόλα αυτά, την πιο σημαντική ώθηση, στο να έρθουν οι τεχνολογίες πρακτόρων στο προσκήνιο, την έδωσε η εμφάνιση της έννοιας των κινητών πρακτόρων. Ένα από τα πρώτα προϊόντα (και, μάλιστα, ένα από το οποίο έχει προέλθει μεγάλο μέρος της υπάρχουσας ορολογίας) ήταν το TeleScript, που αναπτύχθηκε από την General Magic το 1994 [5]. Την περίοδο εκείνη, υψηλού επιπέδου διερμηνευόμενες γλώσσες (scripting languages), όπως η Tool Command Language (TCL) και η προκύψασα από αυτήν, SafeTcl [6], αποτελούσαν το επίκεντρο της ερευνητικής προσοχής στον χώρο, αφού επέτρεπαν τη γρήγορη πρωτοτυποποίηση (prototyping) και παραγωγή μεταφίσιμου κώδικα. Η επινόηση των έξυπνων μηνυμάτων [7], που συνίστατο στην ενθυλάκωση σεναρίων (scripts) SafeTcl μέσα σε ηλεκτρονικά μηνύματα [8], επέτρεψε τη δημιουργία νέων εφαρμογών ηλεκτρονικού ταχυδρομείου. Η ιδέα των εν κινήσει υπολογισμών (mobile computing) απέκτησε καινούργια διάσταση, κυρίως μέσω της διατύπωσης των βασικών αρχιτεκτονικών και τεχνολογικών αρχών, που αποτελούν το υπόβαθρο της Τεχνολογίας Κινητών Πρακτόρων (Mobile Agent Technology – MAT) [9]. Επιπρόσθετα, ο χώρος των τηλεπικοινωνιών είχε από την αρχή θεωρηθεί σαν μία από τις βασικές περιοχές εφαρμογής των κινητών πρακτόρων [10]. Τέλος, εκείνη περίπου την εποχή, η γλώσσα προγραμματισμού Java βγήκε από τα εργαστήρια της Sun και άρχισε να γνωρίζει ευρύτατη αποδοχή στη διεθνή προγραμματιστική κοινότητα. Σήμερα, η Java αποτελεί τη γλώσσα, στην οποία η συντριπτική πλειοψηφία των συστημάτων κινητών πρακτόρων είναι υλοποιημένη.

Επιστρέφοντας στην εμφάνιση της TeleScript, σημειώνουμε ότι, αυτή είχε παρουσιαστεί ως η «δικτυακή Postscript γλώσσα⁷». Στην πραγματικότητα, ήταν κάτι παραπάνω από γλώσσα, καθώς ενσωμάτωνε ένα πλήρες Περιβάλλον Εκτέλεσης Κινητών Πρακτόρων (Mobile Agent Execution Environment – AEE). Το περιβάλλον εκείνο είχε σχεδιασθεί με τρόπο που, να επιτρέπει την υλοποίηση μεθόδων Απομακρυσμένου Προγραμματισμού (Remote Programming), ένα παράδειγμα το οποίο είχε προταθεί ως εναλλακτικό αυτού των

⁷ Η σύνδεση φαίνεται, αν αναλογισθεί κανείς ότι, η γλώσσα PostScript είναι στην πραγματικότητα μία πιο στοιχειώδης μορφή τεχνολογίας, που επιτρέπει την αποστολή και εκτέλεση προγραμμάτων σε απομακρυσμένους υπολογιστές. Η PostScript χρησιμοποιείται για την αποστολή εξειδικευμένων προγραμμάτων εκτύπωσης σε εξειδικευμένους επεξεργαστές, που είναι εμπεδωμένοι (embedded) σε κάποιον εκτυπωτή.

Απομακρυσμένων Κλήσεων Διαδικασιών (Remote Procedure Call – RPC). Η βασική ιδέα, πίσω από την γλώσσα Telescript, ήταν η αποστολή ενός μικρού κομματιού κώδικα, για να εκτελεστεί εκεί όπου βρίσκονταν μεγάλες ποσότητες δεδομένων και όχι η αντίστροφη διαδικασία (η αποστολή, δηλαδή, ή το διάβασμα πάνω από το δίκτυο απομακρυσμένων και μεγάλων σε όγκο δεδομένων). Η ιδέα ήταν πρωτοποριακή για την εποχή της, καθώς οι αντίστοιχες τεχνολογίες (Safe-Tcl και Java) χρησιμοποιούνταν για την ασύγχρονη και απομακρυσμένη εκτέλεση προγραμμάτων, μέσα σε μηνύματα ηλεκτρονικού ταχυδρομείου ή ιστοσελίδες. Αντίθετα, η Telescript χρησιμοποιούσε τη μεταφορά (metaphor) μιας ηλεκτρονικής αγοράς (electronic marketplace), στην οποία διάφοροι πράκτορες θα εκτελούσαν με τρόπο ασύγχρονο και αυτόνομα τις δραστηριότητες, που τους ανέθεταν οι χρήστες τους. Οι πράκτορες μπορούσαν να επικοινωνήσουν με το χρήστη ή με άλλους πράκτορες και, προκειμένου να φέρουν εις πέρας τις εργασίες που είχαν αναλάβει, μπορούσαν να μεταναστεύουν σε απομακρυσμένους κόμβους. Σαν αποτέλεσμα, κατά τη διάρκεια της εκτέλεσής του, ένας κινητός πράκτορας, μπορούσε να μετακινηθεί από κόμβο σε κόμβο, με σκοπό προοδευτικά να ολοκληρώσει την εργασία του. Οι πράκτορες, έτσι, είχαν τη δυνατότητα να αναστείλουν την εκτέλεσή τους και να μεταφέρουν εαυτούς (κώδικα, δεδομένα και κατάσταση εκτέλεσης⁸) σε κάποιον απομακρυσμένο κόμβο, από όπου θα συνέχιζαν την εκτέλεσή τους, από το σημείο που αυτή είχε διακοπεί.

Η σημερινή κατάσταση είναι μια αρκετά μεγάλης αναπτυξιακής προσπάθειας και ερευνητικού ενθουσιασμού στην ευρύτερη περιοχή της τεχνολογίας κινητών πρακτόρων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη Java, η οποία παρέχει εγγενώς πολύ σημαντικές δυνατότητες για κινητικότητα κώδικα, εξαιτίας της πρότυπης διαδικασίας σειριοποίησης αντικειμένων (object serialization specification) που εφαρμόζει και της υποστήριξής της, για το δυναμικό φόρτωμα κώδικα, κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ενός προγράμματος.

8.2 Ευφυείς Πράκτορες

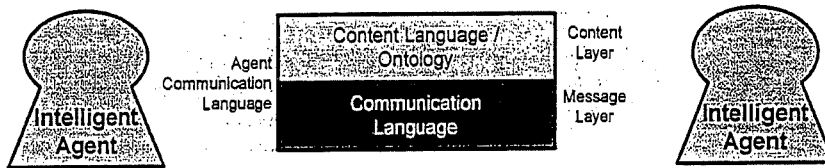
Η σημαντικότερη, πιθανώς, ιδιότητα, που ξεχωρίζει αυτό το είδος των πρακτόρων από άλλες κατηγορίες υπολογιστικών διεργασιών, είναι η δυνατότητά τους να συνεργάζονται με κάποιον τρόπο με άλλους πράκτορες, είτε προκειμένου να προχωρήσουν στην εκτέλεση της δραστηριότητας, που τους έχει ανατεθεί, είτε προκειμένου να βοηθήσουν (με συνεργατικό – collaborative – τρόπο) κάποιους άλλους πράκτορες να κάνουν το αντίστοιχο. Για το λόγο αυτό, πολλές φορές αποκαλούνται και «Ευφυείς Συνεργατικοί Πράκτορες». Οι ικανότητες, που διαθέτει η κατηγορία αυτή των πρακτόρων, έχουν περιγραφεί με μεγάλη ενάργεια από τον Woolridge [4] και μπορούν να ταξινομηθούν στη

⁸ Η κατάσταση εκτέλεσης τεχνικά αναφέρεται στη στοίβα κλήσεων (call stack), η οποία δείχνει το ακριβές σημείο μέσα στον κώδικα μηχανής, όπου η εκτέλεση σταμάτησε, καθώς και τα συμφραζόμενα (ορίσματα και τοπικές μεταβλητές) των μεθόδων, που εκκρεμούσαν εκείνη τη στιγμή.

ικανότητα κοινωνικής συμπεριφοράς (social ability), αυτονομίας (autonomy), αναδραστικότητας (reactivity) και προσαρμοστικότητας (adaptability).

Ο λόγος, για τον οποίον οι πράκτορες επικοινωνούν μεταξύ τους, είναι να μπορούν να δουλεύουν πιο ευέλικτα. Με σκοπό τον μεταξύ τους συντονισμό, οι πράκτορες χρειάζεται να αλληλεπιδρούν και να ανταλλάσσουν πληροφορία και, ενδεχομένως, να διαπραγματεύονται. Το όχημα, βάσει του οποίου εκτελούνται τέτοιες ενέργειες, είναι η Γλώσσα Επικοινωνίας Πρακτόρων (Agent Communication Language - ACL). Η ACL είναι μία υψηλού επιπέδου διερμηνευόμενη γλώσσα προγραμματισμού με αυστηρό συντακτικό, σημασιολογία και περιεχόμενο. Παρόλα αυτά, πρέπει να τονιστεί ότι, στην επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων, η ACL είναι μόνο μία από τις τρεις συνιστώσες που εμπλέκονται. Οι άλλες δύο είναι η Γλώσσα Περιεχομένου (Content Language) και η Οντολογία (Ontology).

Αυτή η τριαδική προσέγγιση είναι πολύ συνήθης σε συστήματα ευφυών πρακτόρων και απεικονίζεται στο Σχήμα 8.1



Σχήμα 8.1: Ευφυείς πράκτορες.

Η πλέον σημαντική διάλεκτος της ACL, η οποία και αντιπροσώπευε το de facto πρότυπο στο χώρο, προτού γίνει διαθέσιμη η FIPA ACL, ήταν η Γλώσσα Ερωτήσεων και Χειρισμού Γνώσης (Knowledge Query and Manipulation Language - KQML). Η KQML [11] ορίζει, ουσιαστικά, ένα πλαίσιο για την ανταλλαγή γνώσης. Η έμφαση στην KQML δινόταν σε ένα εκτεταμένο σύνολο από εκτελεστέα ή τύπους μηνυμάτων, τα οποία ορίζουν το επιτρεπτό σύνολο λειτουργιών, που οι πράκτορες μπορούν να εκτελέσουν, ο ένας πάνω στην αποθήκη γνώσης του άλλου. Το περιεχόμενο των μηνυμάτων, αυτό καθ' εαυτό, δεν καλυπτόταν, παρόλα αυτά, από κάποιο πρότυπο. Προς πλήρωση του κενού αυτού, χρησιμοποιούταν η Μορφοποίηση Ανταλλαγής Γνώσης (Knowledge Interchange Format - KIF). Το KIF ήταν μία τυπική γλώσσα, στηριγμένη στον κατηγορηματικό λογισμό πρώτης τάξης (first order predicative calculus) και χρησιμοποιήθηκε για την ανταλλαγή της γνώσης ανάμεσα σε διεσπαρμένα προγράμματα υπολογιστών. Η KQML και η KIF αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια του έργου της Defense Advanced Research Project Agency (DARPA), «Προσπάθεια Ανταλλαγής Γνώσης» (“Knowledge Sharing Effort”) [12]. Παρά την σχετικά μεγάλη ηλικία τους, τόσο η KIF όσο και η KQML αντιπροσωπεύουν και σήμερα την αιχμή της τεχνολογίας στο χώρο της επικοινωνίας μεταξύ αυτόνομων οντοτήτων.

8.3 Κινητοί Πράκτορες

Οι κινητοί πράκτορες ή, όπως είναι επίσης γνωστοί, οι μεταφέρσιμοι πράκτορες (transportable agents) ή περιοδεύοντες πράκτορες (itinerant agents) βασίζονται στη χρήση τεχνολογιών κινητού κώδικα (mobile code). Ο κινητός κώδικας εμπλουτίζει το κλασικό παράδειγμα του πελάτη/εξυπηρετητή, με το να πραγματοποιεί αλλαγές, είτε αναλόγως με τη θέση των δεδομένων που χρησιμοποιεί ο κώδικας, είτε προκειμένου να τοποθετηθεί ο κώδικας σε μία ευνοϊκότερη θέση, πλησιέστερη στους υπολογιστικούς πόρους, που υποστηρίζουν την εκτέλεσή του.

Τα κυριότερα παραδείγματα για κινητούς υπολογισμούς έχουν εντοπισθεί από τον Fugetta [13]. Αυτά είναι: Απομακρυσμένη Εκτίμηση (Remote Evaluation), Κώδικας κατ' Απαίτηση (Code On Demand – CoD) και Κινητοί Πράκτορες (Mobile Agents – MA). Τα παραδείγματα αυτά διαφέρουν ως προς το πώς ο επεξεργαστής, οι πόροι και ο κώδικας κατανέμονται ανάμεσα στις συνιστώσες ενός κατανεμημένου συστήματος.

Στο παράδειγμα της απομακρυσμένης εκτίμησης [14], μία συνιστώσα Α στέλνει οδηγίες, που προδιαγράφουν, πώς πρέπει να εκτελεστεί μία υπηρεσία σε μία συνιστώσα Β. Οι οδηγίες αυτές μπορούν, για παράδειγμα, να εκφραστούν με τη μορφή κώδικα Java. Η συνιστώσα Β, στη συνέχεια, εκτελεί τις οδηγίες. Τα Servlets της Java είναι ένα παράδειγμα απομακρυσμένης εκτίμησης. Άλλο ένα παράδειγμα αποτελεί το πρότυπο MHEG.

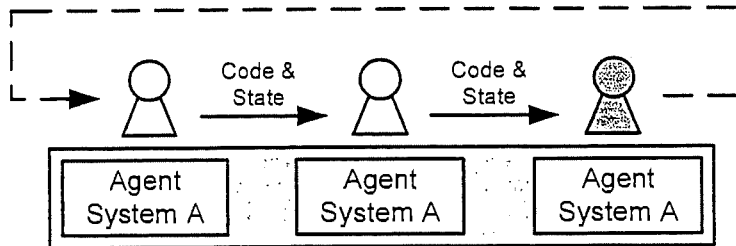
Στον Κώδικα κατ' Απαίτηση, οι ίδιες αλληλεπιδράσεις λαμβάνουν χώρα, όπως και στην περίπτωση της απομακρυσμένης εκτίμησης. Η διαφορά είναι ότι, η συνιστώσα Α έχει όλους τους πόρους στην περιοχή της, αλλά στερείται της γνώσης του πώς να προσπελάσει και να επεξεργαστεί αυτούς τους πόρους. Λαμβάνει τις πληροφορίες αυτές από τη συνιστώσα Β. Από τη στιγμή που, η πληροφορία αυτή συγκεντρωθεί, μπορεί να ξεκινήσει η εκτέλεση. Τα Java Applets ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία.

Το παράδειγμα των κινητών πρακτόρων, τέλος, είναι μία επέκταση του παραδείγματος της απομακρυσμένης εκτίμησης [5], [15]. Ενώ στην τελευταία η έμφαση είναι στη μεταφορά του κώδικα, στους κινητούς πράκτορες το ζητούμενο είναι η μεταφορά μίας ολόκληρης υπολογιστικής μονάδας μαζί με τον κώδικα, την πληροφορία κατάστασης που έχει και τα δεδομένα που χρειάζεται, προκειμένου να ολοκληρώσει τις δραστηριότητες, που της έχουν ανατεθεί.

Με άλλα λόγια, σύμφωνα με το παράδειγμα των κινητών πρακτόρων, η συνιστώσα Α έχει τον κώδικα και τον επεξεργαστή, αλλά στερείται τους πόρους (δεδομένα), που απαιτούνται για τον υπολογισμό. Επομένως, ο υπολογισμός εκτελείται στη συνιστώσα λογισμικού Β, η οποία έχει και αυτή επεξεργαστή, έχει τους απαραίτητους πόρους και, μέσω κινητών πρακτόρων, λαμβάνει και τον κώδικα. Με όρους υπηρεσιών, ένας πελάτης μπορεί να έχει τον κώδικα που απαιτείται, προκειμένου να παρασχεθεί μία υπηρεσία, αλλά δεν μπορεί να προσπελάσει τα δεδομένα, που απαιτεί η υπηρεσία κατά την εκτέλεση της, ενδεχομένως επειδή αυτά βρίσκονται σε βάσεις δεδομένων στην πλευρά του εξυπηρετητή. Επομένως, ο κώδικας μεταναστεύει (migrates) στον εξυπηρετητή

και εκτελείται κοντά στα δεδομένα, που απαιτεί να προσπελάσει. Χρησιμοποιείται ο όρος «μετανάστευση», αντί αυτού της «μεταφοράς», προκειμένου να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι, ένας πράκτορας παίρνει μαζί του και την πληροφορία κατάστασης που έχει και ό,τι τοπικά δεδομένα είχε αρχικοποιήσει. Η ικανότητά του να συνεχίζει την εκτέλεσή του ομαλά και χωρίς προβλήματα, όταν θα φτάσει στον προορισμό του, έγκειται ακριβώς στο ότι, μεταφέρθηκαν μαζί με τον κώδικα και δεδομένα, που συγκροτούν τη λεγόμενη στοίβα εκτέλεσης ενός προγράμματος (stack), η οποία διαφυλάσσει την πληροφορία κατάστασης (τιμές τοπικών μεταβλητών, ορίσματα και τιμές τοπικών μεταβλητών ρουτινών, που έχουν κληθεί στο ίδιο νήμα εκτέλεσης και δεν έχουν ακόμα τερματίσει κ.ο.κ.).

Ένας κινητός πράκτορας, επομένως, δεν είναι περιορισμένος στο σύστημα, στο οποίο ξεκίνησε την εκτέλεσή του. Αντίθετα, έχει τη μοναδική ικανότητα να μεταναστεύει από το ένα σύστημα στο άλλο, οποτεδήποτε κατά τη διάρκεια της εκτέλεσής του κρίνει ότι, αυτό είναι θεμιτό. Αυτό απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα 8.2.



Σχήμα 8.2: Κινητοί πράκτορες.

Η ικανότητα μετανάστευσης επιτρέπει σε έναν Κινητό Πράκτορα να μετακινηθεί σε ένα σύστημα προορισμού, που να περιέχει ένα αντικείμενο, με το οποίο ο πράκτορας επιθυμεί να αλληλεπιδράσει. Επιπρόσθετα, ο πράκτορας μπορεί να χρησιμοποιήσει τις υπηρεσίες, που του παρέχει το σύστημα προορισμού. Όταν ένας πράκτορας ταξιδεύει, η πληροφορία κατάστασης και τα δεδομένα του ταξιδεύουν μαζί του. Η πληροφορία κατάστασης, πέρα από τη στοίβα που αναφέρθηκε προηγουμένως περιλαμβάνει και τις τιμές των πεδίων του πράκτορα, που καθορίζουν, τι θα πρέπει να γίνει, όταν η εκτέλεση επανεκκινήσει στο σύστημα προορισμού. Τέτοια πεδία μπορούν να είναι ειδικά για κάθε υπηρεσία, που υλοποιεί ένας πράκτορας, ή μπορεί να αφορούν τις ιδιότητες του πράκτορα αυτές καθ' εαυτές, ανεξαρτήτως υπηρεσίας (π.χ. ο χρόνος που απομένει στον πράκτορα για να ζήσει – time to live).

Το παράδειγμα των κινητών πρακτόρων είναι σημαντικό για δικτυο-κεντρικά συστήματα, γιατί αντιπροσωπεύει μία εναλλακτική πρόταση ή, τουλάχιστον, μία συμπληρωματική δυνατότητα στην επίλυση των προβλημάτων, που παραδοσιακά ταλανίζουν τις αρχιτεκτονικές πελάτη/εξυπηρετητή [16]. Τέτοιες λύσεις μπορούν να συνεισφέρουν σε μία μείωση του συνολικού κόστους της

επικοινωνίας στο δίκτυο. Για παράδειγμα, ο κινητός κώδικας έχει την ικανότητα να εμπλακεί στενά με έναν εξυπηρετητή (αντί από απόσταση), προκειμένου να προσπελάσει απομακρυσμένες βάσεις δεδομένων. Η εγγύτητα με τον εξυπηρετητή εγγυάται υψηλό διαθέσιμο εύρος ζώνης. Αναφορικά με τους κινητούς πράκτορες, αναφέρονται συνήθως τα παρακάτω πλεονεκτήματα:

- **Ασύγχρονη και αυτόνομη εκτέλεση διεργασιών.** Μετά από την είσοδο ενός πράκτορα σε ένα καταναμημένο υπολογιστικό σύστημα, ο χρήστης μπορεί να εκτελέσει άλλες δραστηριότητες, χωρίς να απαιτείται να αλληλεπιδρά με τον πράκτορα αυτό.
- **Μείωση της δικτυακής κυκλοφορίας και της απαιτούμενης υπολογιστικής ισχύος στη μεριά του πελάτη.** Καθώς ανταλλαγές δεδομένων πολύ μεγάλου όγκου γίνονται, πλέον, τοπικά, από τους κόμβους που περιέχουν αυτήν την πληροφορία, οι υπολογιστές στη μεριά του εξυπηρετητή μπορούν να επικεντρωθούν στην εκτέλεση σχετικά απλών λειτουργιών. Αυτό το γεγονός επιτρέπει την υλοποίηση «λεπτών πελατών» (“thin clients”).
- **Αυξημένη ευρωστία.** Η μείωση της εξάρτησης μιας καταναμημένης εφαρμογής από τη διαθεσιμότητα του δικτύου είναι ευπρόσδεκτη και λύνει ένα από τα βασικά προβλήματα, που αντιμετωπίζουν οι αρχιτεκτονικές πελάτη/εξυπηρετητή. Στα συστήματα κινητών πρακτόρων επέρχεται αυτή η μείωση της εξάρτησης, καθώς, από τη στιγμή που ο κώδικας του πελάτη βρίσκεται στον ίδιο κόμβο με αυτόν του εξυπηρετητή, η επικοινωνία είναι τοπική.
- **Αυτοματοποίηση της επεξεργασίας καταναμημένων υπολογισμών.** Οι πράκτορες έχουν ενσωματωμένα δρομολόγια, τα οποία καθορίζουν, τι είδους δραστηριότητες πρέπει να εκτελέσουν και σε ποιούς κόμβους, με αποτέλεσμα να μην απαιτείται συνεχής αλληλεπίδραση με το χρήστη.
- **Αποκεντρωμένη και κατά τόπους επεξεργασία (έλεγχος και διαχείριση).** Η κλωνοποίηση των πρακτόρων επιτρέπει την (αυτοματοποιημένη) κατανομή των υπολογιστικών συνιστωσών προγραμμάτων, που ήταν προηγουμένως συγκεντρωτικά.
- **Ευελιξία.** Η κατ’ απαίτηση διανομή λογισμικού ή παροχή υπηρεσιών γίνεται εφικτή, καθώς κινητοί πράκτορες μπορούν να «κατεβούν» στιγμιαία σε οποιοδήποτε κόμβο πελάτη ή εξυπηρετητή.

Για μια λεπτιμερή συζήτηση των πλεονεκτημάτων αυτών, παραπέμπουμε στις [17] και [9].

8.4 Η Πλατφόρμα Grasshopper

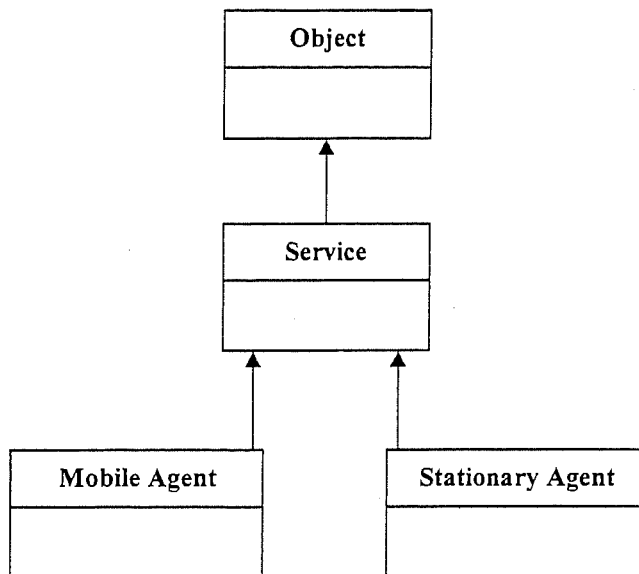
8.4.1 Γενικές Έννοιες

Μία από τις δημοφιλέστερες πλατφόρμες ανάπτυξης και υλοποίησης κινητών πρακτόρων είναι το Grasshopper [18]. Η υλοποίηση, τόσο της πλατφόρμας, αλλά και των κινητών πρακτόρων, γίνεται σε γλώσσα Java, γεγονός που σημαίνει ότι, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε οποιαδήποτε πλατφόρμα, που υποστηρίζει την ιδεατή μηχανή της Java. Η πλατφόρμα Grasshopper βασίζεται στις εξής έννοιες:

- **Περιοχή (Region):** Διευκολύνει τη διαχείριση των πρακτορείων (agencies), τοποθεσιών (places) και πρακτόρων. Μία περιοχή περιέχει μία μόνον περιοχή καταχώρησης (region registry) και πολλά πρακτορεία, που εξυπηρετούν έναν κοινό σκοπό. Τα πρακτορεία και τοποθεσίες, όπως και οι πράκτορες που φιλοξενούν, σχετίζονται αυτόματα με μία περιοχή.
- **Περιοχή Καταχώρησης (Region Registry):** Παρέχει τη βάση δεδομένων με πληροφορία σχετική για τα πρακτορεία, τοποθεσίες και τους πράκτορες μιας περιοχής. Η περιοχή καταχώρησης αποθηκεύει την τρέχουσα τοποθεσία όλων των καταχωρημένων αντικειμένων μιας περιοχής, λειτουργώντας ως υπηρεσία καταλόγου, που παρέχει επίσης λειτουργίες παρουσίασης της πληροφορίας και κριτήρια αναζήτησης. Κάθε περιοχή καταχώρησης εκτελείται στη δική της εικονική μηχανή της Java.
- **Πρακτορείο (agency):** Παρέχει το περιβάλλον εκτέλεσης των κινητών πρακτόρων. Κάθε πρακτορείο (agency) εκτελείται σε ξεχωριστή εικονική μηχανή της Java και αποτελείται από μία ή περισσότερες τοποθεσίες. Το πρακτορείο παρέχει τις βασικές λειτουργίες, όπως διαχείριση του κύκλου ζωής του πράκτορα, μεταφορά, επικοινωνία και ασφάλεια. Κάθε πρακτορείο έχει την ικανότητα να αλληλεπιδρά με άλλα πρακτορεία κατά τη διάρκεια μιας απομακρυσμένης επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων ή κατά τη διάρκεια μιας μετανάστευσης.
- **Τοποθεσία (Place):** Επιτρέπει την οργάνωση των πρακτόρων, που παρέχουν ίδιες υπηρεσίες. Οι τοποθεσίες ανήκουν στα πρακτορεία, όπου η εξ ορισμού τοποθεσία είναι το "InformationDesk". Κάθε τοποθεσία μπορεί να συσχετιστεί με μια πολιτική ασφάλειας (security policy), για τη διευκόλυνση της διαχείρισης της ασφάλειας.
- **Πράκτορας:** Οντότητα λογισμικού, που έχει τη δυνατότητα να δρα αυτόνομα, αποτελούμενη από μία ή περισσότερες Java κλάσεις. Υπάρχουν δύο είδη πρακτόρων: οι κινητοί (mobile) και οι στατικοί (stationary). Οι κινητοί πράκτορες μπορούν και μεταναστεύουν αυτόνομα σε διαφορετικές τοποθεσίες. Οι σταθεροί πράκτορες δεν μπορούν να μεταναστεύσουν αυτόνομα. Συχνά παραμένουν στο πρακτορείο, στο οποίο δημιουργήθηκαν, παρέχοντας υπηρεσίες σε άλλους πρακτόρες ή σε άλλες οντότητες.

8.4.2 Η Δομή ενός Κινητού Πράκτορα

Όπως κάθε κλάση της Java, η βάση της ιεραρχίας των κλάσεων των πρακτόρων είναι η κλάση "Object". Ο σχεδιασμός του Grasshopper κληρονομεί την κλάση αυτή, δημιουργώντας μια νέα κλάση με το όνομα "Service", η οποία είναι κλάση-γονέας (parent class) των κινητών και στατικών πρακτόρων. Ένα διάγραμμα της ιεραρχίας των κλάσεων φαίνεται στο Σχήμα 8.3. Η κλάση "Service" παρέχει τη βασική λειτουργικότητα των πρακτόρων, καθώς και μηχανισμούς επικοινωνίας τους με το πρακτορείο. Μερικές μέθοδοι της κλάσης "Service" μπορούν να τροποποιηθούν στις κλάσεις, οι οποίες την κληρονομούν (override), ενώ άλλες όχι. Για παράδειγμα, η μέθοδος "getName", η οποία επιστρέφει το όνομα του πράκτορα, μπορεί να τροποποιηθεί, ενώ η μέθοδος "getHome", η οποία επιστρέφει την τοποθεσία, στην οποία δημιουργήθηκε ο πράκτορας, δεν μπορεί να τροποποιηθεί.



Σχήμα 8.3: Ιεραρχία των Κλάσεων.

Η κλάση "StationaryAgent" επεκτείνει την κλάση "Service", παρέχοντας μεθόδους για στατικούς πράκτορες, ενώ η κλάση "MobileAgent" επεκτείνει την κλάση "Service", για να παρέχει μεθόδους σε κινητούς πράκτορες. Μια πολύ σημαντική μέθοδος που, τόσο η κλάση "StationaryAgent", όσο και η κλάση "MobileAgent" παρέχουν, είναι η μέθοδος "live", η οποία θα πρέπει να επαναπροσδιοριστεί (override), ώστε να καθοριστεί η συμπεριφορά του πράκτορα, κατά τη διάρκεια του κύκλου ζωής του (agent's cycle of lifetime).

8.4.3 ΟΚύκλος Ζωής ενός Πράκτορα

Κάθε κινητός πράκτορας μπορεί και δρα αυτόνομα, να μεταναστεύει σε κάποια συγκεκριμένη τοποθεσία και να εκτελεί μια εργασία, εκ μέρους ενός χρήστη ή ενός οργανισμού. Ο κύκλος ζωής ενός κινητού πράκτορα αποτελείται από τα ακόλουθα στάδια:

Δημιουργία. Ένας πράκτορας μπορεί να δημιουργηθεί από το διαχειριστή ενός πρακτορείου, από άλλο πράκτορα, ή από μια εξωτερική εφαρμογή.

Αρχικοποίηση. Οι παράμετροι ενός πράκτορα αρχικοποιούνται προτού ξεκινήσει η εκτέλεσή του.

Κατάσταση. Υπάρχουν τρεις κύριες καταστάσεις, στις οποίες μπορεί να περιέλθει ένας κινητός πράκτορας. Αυτές είναι η ενεργός κατάσταση, η κατάσταση αναβολής και η ανενεργός κατάσταση.

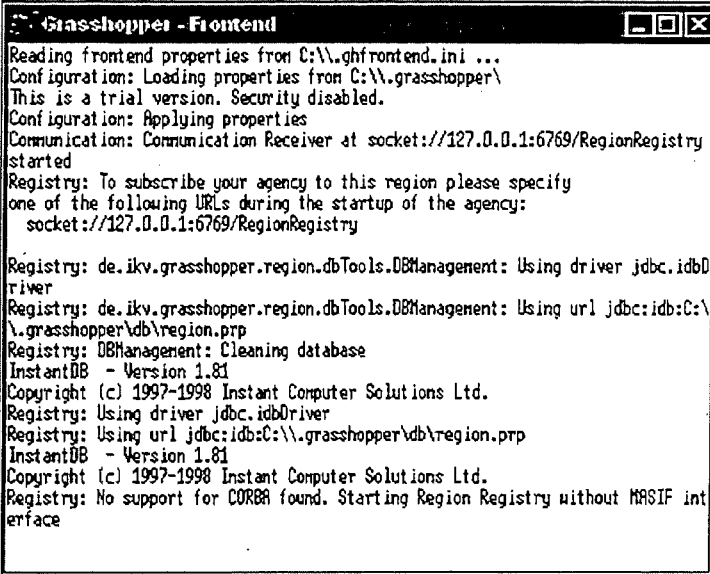
Μετανάστευση. Η μετανάστευση ενός πράκτορα μπορεί να επιτευχθεί από τον ίδιο τον πράκτορα, από άλλους τοπικούς πράκτορες, από απομακρυσμένους πράκτορες, από ένα πρακτορείο (agency), από εφαρμογές ή από το χρήστη.

Εκτέλεση. Εκτελείται η μέθοδος "live" του πράκτορα, στην οποία ορίζονται ιδιότητες κατάστασης (state) για τον έλεγχο της συμπεριφοράς του, καθώς αυτός εκτελείται σε διαφορετικά πρακτορεία. Μια διαφορετική προσέγγιση, που μπορεί να ακολουθήσει ένας προγραμματιστής, είναι να καθορίσει την εκτέλεση μιας μεθόδου, αμέσως μετά τη μετανάστευση του πράκτορα, ορίζοντάς την ως παράμετρο στη μέθοδο "move".

Τερματισμός. Ένας πράκτορας μπορεί να διαγράψει τον εαυτό του, καλώντας τη μέθοδο "remove".

8.4.4 Η Πλατφόρμα

Η αλληλεπίδραση του χρήστη με την πλατφόρμα Grasshopper γίνεται, είτε μέσω της γραμμής εντολών (Textual User Interface), είτε μέσω της γραφικού περιβάλλοντος επικοινωνίας (Graphical User Interface). Το τελευταίο είναι απλό και φιλικό προς το χρήστη. Στην κύρια οθόνη, τρία κύρια κουμπιά επιτρέπουν στο χρήστη να δημιουργήσει περιοχές και πρακτορεία και να διαμορφώσει τις παραμέτρους του συστήματος. Μόλις δημιουργηθεί μια περιοχή, οι πληροφορίες της κονσόλας έχουν τη μορφή της ακόλουθης εικόνας του Σχήματος 8.4.



```

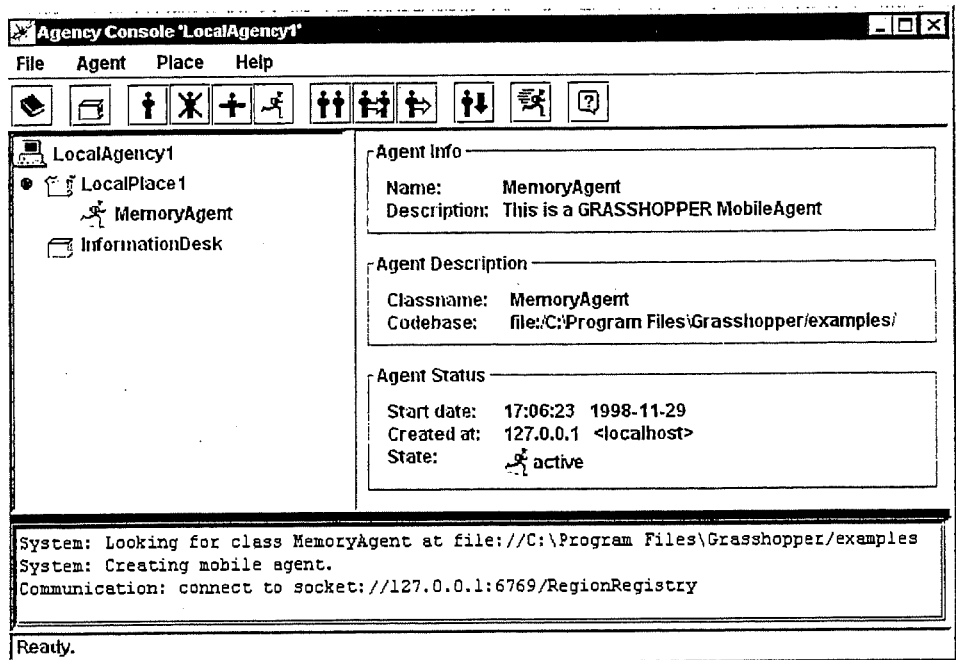
Grasshopper - Frontend
Reading frontend properties from C:\ghfrontend.ini ...
Configuration: Loading properties from C:\gh\grasshopper\
This is a trial version. Security disabled.
Configuration: Applying properties
Communication: Communication Receiver at socket://127.0.0.1:6769/RegionRegistry
started
Registry: To subscribe your agency to this region please specify
one of the following URLs during the startup of the agency:
socket://127.0.0.1:6769/RegionRegistry

Registry: de.ikv.grasshopper.region.dbTools.DBManagement: Using driver jdbc:idsD
river
Registry: de.ikv.grasshopper.region.dbTools.DBManagement: Using url jdbc:ids:C:\
gh\grasshopper\db\region.prp
Registry: DBManagement: Cleaning database
InstantDB - Version 1.81
Copyright (c) 1997-1998 Instant Computer Solutions Ltd.
Registry: Using driver jdbc:idsDriver
Registry: Using url jdbc:ids:C:\gh\grasshopper\db\region.prp
InstantDB - Version 1.81
Copyright (c) 1997-1998 Instant Computer Solutions Ltd.
Registry: No support for CORBA found. Starting Region Registry without MASIF int
erface

```

Σχήμα 8.4: Περιοχή στην πλατφόρμα Grasshopper.

Η πιο σημαντική πληροφορία, που γνωρίζει ο χρήστης από την κονσόλα, είναι η δικτυακή θέση της περιοχής καταχώρησης. Στην περίπτωση της παραπάνω εικόνας, η θέση που εμφανίζεται είναι: `socket://127.0.0.1:6769/RegionRegistry`, ακολουθώντας τη μορφή `<protocol>://<host>:<port>/RegionRegistry`. Για τη δημιουργία ενός πρακτορείου, ο χρήστης θα πρέπει να ορίσει το όνομα του πρακτορείου και τη θέση της περιοχής καταχώρησης, όπως προαναφέρθηκε. Ένα πρακτορείο με όνομα "LocalAgency1", μέσα στην οποία εκτελείται ένας πράκτορας με όνομα "MemoryAgent", φαίνεται στο Σχήμα 8.5.



Σχήμα 8.5: Η κονσόλα ενός πρακτορείου.

8.4.5 Επικοινωνία

Στο περιβάλλον του Grasshopper, οι πράκτορες είναι δυνατόν να κάνουν χρήση διαφόρων επικοινωνιακών πρωτοκόλλων, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1. Για να επιτευχθεί η μετανάστευση ενός πράκτορα σε μια δικτυακή τοποθεσία, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα URL (Uniform Resource Location). Το URL αυτό έχει τη μορφή: <protocol>://<host>:<port>/<agency>/<place>.

Όνομα	Ακρόνυμο
Plain socket	Socket
Java RMI	Rmi
CORBA IIOP	Iiop
Plain socket with SSL	Socketssl
Java RMI with SSL	Rmissl
MAFIIOP	Mafiiop

Πίνακας 8.1: Τα επικοινωνιακά πρωτόκολλα του Grasshopper.

Οι ακόλουθοι μηχανισμοί προσφέρονται από την υπηρεσία επικοινωνίας του Grasshopper:

Σύγχρονη επικοινωνία: Ο πελάτης, που καλεί μια μέθοδο του εξυπηρετητή, αναστέλλει την εκτέλεσή του, μέχρι να ολοκληρωθεί η εκτέλεση της μεθόδου.

Ασύγχρονη επικοινωνία: Ο πελάτης, που καλεί μια μέθοδο του εξυπηρετητή, δεν είναι ανάγκη να περιμένει την ολοκλήρωση της εκτέλεσης της μεθόδου και μπορεί να συνεχίσει την εκτέλεση της εργασίας του.

Στατική: Στην στατική επικοινωνία, ο πελάτης έχει πρόσβαση σε μια πληρεξούσιο κλάση (proxy class) του εξυπηρετητή και, μέσω αυτής, καλεί μια μεθόδό του. Η πληρεξούσιος κλάση περιέχει όλες τις μεθόδους του εξυπηρετητή, οι οποίες μπορούν να είναι προσβάσιμες, μέσω της υπηρεσίας επικοινωνίας.

Δυναμική επικοινωνία: Εκτός από τη στατική επικοινωνία, το Grasshopper υποστηρίζει τη λεγόμενη δυναμική επικοινωνία, κατά την οποία οι πελάτες έχουν τη δυνατότητα να καλέσουν μια μέθοδο του εξυπηρετητή, χωρίς να χρησιμοποιήσουν πληρεξούσιο κλάση του. Κατά τη διαδικασία της δυναμικής επικοινωνίας, ο πελάτης αρκεί να γνωρίζει μόνον το όνομα και τις παραμέτρους του εξυπηρετητή και να την καλέσει ως μια γενικευμένη μέθοδο (generic method), χρησιμοποιώντας μια γενικευμένη πληρεξούσιο κλάση (generic proxy)

Βιβλιογραφία

- [1]. J. M. Bradshaw, Software Agents, MIT Press, ISBN 0-262-52234-9, 1997

- [2]. C. Guilfoyle and E. Warner, "Intelligent Agents: the New Revolution in Software", Technical Report, OVUM Limited, 1994
- [3]. "Intelligent Agents", Communications of the ACM, 37, 7, July 1994.
- [4]. M. Wooldridge and N. R. Jennings, "Intelligent Agents: Theory and Practice", The Knowledge Engineering Review, 10, 2, 115-152, 1995.
- [5]. J. E. White, "Telescript Technology: The Foundation for the Electronic Marketplace", General Magic White Paper, 1994
- [6]. N. S. Borenstein, "EMail with a Mind of its own: The Safe-Tcl Language for Enabled Mail", ULPAA, Barcelona, (1994)
- [7]. A. Reinhardt, "The Network with Smarts", BYTE Magazine, 51-64, October 1994.
- [8]. N. S. Borenstein, "Computational Mail as Network Infrastructure for Computer-Supported Cooperative Work", CSCW'92 Proceedings, Toronto, 1992.
- [9]. D. Chess, C. G. Harrison and A. Kershenbaum, "Mobile agents: Are they a good idea?", LNCS 1419, G. Vigna (Eds.), Mobile Agents and Security, 25-47, Springer Verlag, 1998.
- [10]. T. Magedanz, (Ed.), Special Issue on Mobile Agents in Intelligent Networks and Mobile Communication Systems, Computer Networks Journal, ELSEVIER Publisher, Netherlands, 31, 10, July 1999.
- [11]. T. Finin et. al, "KQML as an Agent Communication Language", 3rd International Conference on Information and Knowledge Management (CIKM/94), ACM Press, 1994.
- [12]. M. Ginsberg, "Knowledge Interchange Format: the kif of death", AI Magazine, 5, 63, 1991.
- [13]. A. Fuggetta, G.P. Picco and G. Vigna, "Understanding Code Mobility", IEEE transactions on Software Engineering, 24, 5, 342-362, May 1998.
- [14]. J.W. Stamos and D.K. Grifford, "Implementing Remote Evaluation", IEEE Transactions on Software, 1990.

- [15]. J.E. White, "Mobile Agents", J.M. Bradshaw (Editor) Software Agents, MIT Press, ISBN 0-262-52234-9, Chapter 20, 437-472, 1997.
- [16]. D. Chess et al, "Itinerant Agents for Mobile Computing", IEEE Personal Communications Magazine, 2, 5, 34-59, 1995.
- [17]. C.G. Harrison et. al, "Mobile Agents: Are they a good Idea", IBM Research Report, RC 19887, 1995.
- [18]. Grasshopper IKV++ GmbH, Grasshopper Home page: <http://www.grasshopper.de> .

Κεφάλαιο 9

Οπτικοποίηση

9.1 Η Οπτικοποίηση στη Σύγχρονη Επιστήμη: Σημασία και Αναγκαιότητα

Είναι γεγονός πως, η παρατήρηση του γραφήματος μιας συνάρτησης μπορεί να μας αποκαλύψει πτυχές της, που δεν θα μπορούσαμε εύκολα να διακρίνουμε με επισκόπηση του μαθηματικού της τύπου. Αν, μάλιστα, αντί για κάποιο τύπο, έχουμε να κάνουμε με ένα μεγάλο σύνολο αριθμητικών τιμών (όπως συμβαίνει στην περίπτωση αποτελεσμάτων υπολογιστικών τεχνικών), τότε η χρήση γραφημάτων καθίσταται, όχι απλά πλεονεκτική, αλλά αναγκαία.

Με τον όρο γράφημα (graph), αναφερόμαστε σε μια οπτική σύνθεση, δημιουργημένη με τη χρήση γραφικών (σημείων, γραμμών κτλ.) και γεωμετρίας (σχετικών θέσεων και προσανατολισμών). Το επιτυχημένο πάντρεμα στοιχείων από τις περιοχές των γραφικών και της γεωμετρίας μας έχει δώσει εργαλεία, τα οποία μπορούν να αποδώσουν αποτελεσματικά τα σύνθετα φαινόμενα, που μελετά η σύγχρονη επιστήμη. Για την ενιαία αναφορά στα εργαλεία αυτά και τους τρόπους χρήσης τους, έχει υιοθετηθεί από την παγκόσμια επιστημονική κοινότητα ο όρος Οπτικοποίηση (Visualization).

Η ευρεία χρήση του όρου αυτού ξεκίνησε το 1987, με την έκδοση της αναφοράς Visualization in Scientific Computing του Εθνικού Ιδρύματος Επιστήμης (National Science Foundation) των Ηνωμένων Πολιτειών. Ο ακριβής ορισμός του δεν είναι κάτι εύκολο. Μπορούμε, όμως, να πούμε πως, πρόκειται για μια μορφή επικοινωνίας γνώσης, που είναι βασισμένη στη δύναμη της εικόνας και εφαρμόζεται σε όλα τα επιστημονικά και τεχνολογικά πεδία. Αποτελεί ένα αναντικατάστατο εργαλείο κατανόησης, ανακάλυψης, ερμηνείας και διδασκαλίας, σε σημείο που, πλέον, δεν αντιμετωπίζεται σαν ένα

Όσον αφορά στην οπτικοποίηση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, υπάρχει πληθώρα ετοιμών βοηθητικών συναρτήσεων, που στοχεύουν στη σαφή απεικόνιση διανυσματικών συναρτήσεων σε δύο ή τρεις διαστάσεις. Μια μικρή γεύση μας δίνει το Σχήμα 9.3, ενώ στις νεότερες εκδόσεις του πακέτου αυτού περιέχεται ένα μεγάλο πλήθος συναρτήσεων βιβλιοθήκης για την απλούστερη οπτικοποίηση πεδιακών μεγεθών σε τρεις διαστάσεις, καθώς και τρόπους εμφάνισης της απόκλισης και της στροφής διανυσματικών συναρτήσεων. Φυσικά, όπως άλλωστε για τα περισσότερα σύγχρονα αντίστοιχα πακέτα, διατίθεται μετατροπέας σε αρχεία VRML. Αντίστοιχες δυνατότητες έχει το γνωστό λογισμικό Mathematica και άλλες λιγότερο διαδεδομένες εφαρμογές.

9.4 Εισαγωγή στη Γλώσσα Προγραμματισμού Εικονικής Πραγματικότητας VRML

9.4.1 Τι Είναι η VRML

Το ακρωνύμιο VRML προκύπτει από τα αρχικά των λέξεων Virtual Reality Modelling Language, που σημαίνουν Γλώσσα Μοντελοποίησης Εικονικής Πραγματικότητας. Ο πληρέστερος ίσως ορισμός της είναι αυτός του Web3D (πρώην VRML) Consortium, σύμφωνα με τον οποίο, η VRML είναι ένα ανοικτό πρότυπο για τρισδιάστατους κοινούς διαδραστικούς κόσμους πολυμέσων στο διαδίκτυο. Στον τίτλο αυτής της παραγράφου (9.4) χαρακτηρίζουμε την VRML σαν γλώσσα προγραμματισμού. Πρέπει, όμως, να ξεκαθαρίσουμε πως, δεν πρόκειται για γλώσσα προγραμματισμού γενικής χρήσης, όπως η C++, ούτε για γλώσσα σεναρίων, όπως η JavaScript, ούτε καν για γλώσσα δήλωσης ιστοσελίδων, όπως είναι η HTML. Την VRML θα μπορούσαμε να την ορίσουμε σαν μια γλώσσα, που περιγράφει τη γεωμετρία και τη συμπεριφορά τρισδιάστατων σκηνών, οι οποίες στην ορολογία της VRML καλούνται κόσμοι (worlds).

9.4.2 Ιστορική Αναδρομή

Ο πρόδρομος της VRML υπήρξε το Labyrinth, μια πρωτότυπη τρισδιάστατη εφαρμογή διαπροσωπίας (3D interface) για το διαδίκτυο, η οποία προτάθηκε από τους Marc Pesce και Tony Parisi σε μια εργασία τους, που παρουσίασαν στο Πρώτο Διεθνές Συνέδριο για τον Παγκόσμιο Ιστό (World Wide Web), το Μάιο του 1994 στη Γενεύη.

Την επόμενη, κιόλας, χρονιά εμφανίστηκε η πρώτη έκδοση της VRML. Η VRML 1.0, όπως ονομάστηκε, υπήρξε το αποτέλεσμα των συντονισμένων προσπαθειών της κοινότητας των ειδικών στα γραφικά υπολογιστών, να επεκτείνουν την κειμενοκεντρική μορφή του διαδικτύου, συμπεριλαμβάνοντας τρισδιάστατα, αμφίδρομα μοντέλα. Το βασικό κίνητρο των πρωτοπόρων της VRML ήταν το όραμα της εργασίας και επικοινωνίας μέσα από κοινούς τρισδιάστατους εικονικούς χώρους.

διαφόρων τμημάτων ενός συστήματος, την επενέργεια ενός ή περισσοτέρων σωμάτων στη δομή και την εξέλιξη κάποιου κύματος και την εξάρτηση της προκύπτουσας ακτινοβολίας από τις επιμέρους πηγές της. Φυσικά μεγέθη με μεγάλη σημασία στην οπτικοποίηση είναι τα επιφανειακά ρεύματα (surface currents) και τα κοντινά πεδία (near fields). Καθένα από τα μεγέθη αυτά μας παρέχει και μια διαφορετική άποψη των ηλεκτροδυναμικών φαινομένων, με αποτέλεσμα η συνδυασμένη χρήση τους να μας εξασφαλίζει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα.

Η μεγάλη σημασία των ρευμάτων (ή των ισοδύναμων εφαπτομενικών ηλεκτρικών ή μαγνητικών πεδίων) έγκειται στο γεγονός πως, συνιστούν τις θεμελιώδεις πηγές παραγωγής των μορφών ακτινοβολίας των μακρινών πεδίων (far field radiation patterns). Πολλές φορές (όπως στη μέθοδο των ροπών), αποτελούν τους αγνώστους, που αναζητά η υπολογιστική μέθοδος. Ακόμα, όμως και, αν δεν συμβαίνει αυτό, είναι απλή υπόθεση ο υπολογισμός τους από τις αριθμητικές λύσεις. Το σημείο, στο οποίο υστερεί η απεικόνιση χωρικών ρευματικών κατανομών, είναι η απόδοση του συνδυαστικού χαρακτήρα της ακτινοβολίας των επιμέρους ρευματικών στοιχείων. Και εδώ είναι που μπορεί να βοηθήσει η γνώση και η αναπαράσταση των κοντινών πεδίων. Και αυτό γιατί κατάλληλες εικόνες των κοντινών ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων είναι σε θέση να μας αποκαλύψουν, μεταξύ άλλων, τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διαφόρων δομών ενός συστήματος, τους τρόπους με τους οποίους τα επιφανειακά ρεύματα και φορτία αρχίζουν να διαμορφώνουν τις κατανομές των μακρινών πεδίων και τους μηχανισμούς σχηματισμού των διαφόρων ρυθμών των επιφανειακών ρευμάτων, όπως τα επιφανειακά και ακμικά οδεύοντα ρευματικά κύματα.

Όταν κάνουμε λόγο για οπτικοποίηση μιας φυσικής ποσότητας, δεν πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας μόνον κάποιες στατικές εικόνες της. Η οπτικοποίηση μπορεί (και μάλιστα μερικές φορές επιβάλλεται) να είναι δυναμική, δηλαδή να μεταβάλλεται μέσα στο χρόνο, παρουσιάζοντας με τον τρόπο αυτό και τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στο οποίο αναφέρεται. Όπως ήδη αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο 9.1, στις δυναμικές οπτικοποιήσεις κάνουμε, συχνά, χρήση ενός όρου, δανεισμένου από την τεχνολογία γραφικών, αυτού της Εμψύχωσης (Animation). Έτσι, κάνουμε λόγο, συχνά, για εμψυχωμένα ρεύματα και φορτία (animated currents and fields).

Δυναμικές οπτικοποιήσεις χρησιμοποιούμε, κατά κανόνα, για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων υπολογιστικών τεχνικών στο πεδίο του χρόνου (όπως η FDTD). Όμως, η τεχνική της δυναμικής οπτικοποίησης μπορεί να εφαρμοστεί και στα αποτελέσματα μεθόδων στο πεδίο της συχνότητας (frequency domain methods). Για να βρούμε τις χρονικές εξαρτήσεις αυτών των αποτελεσμάτων, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τους μιγαδικούς, στους οποίους είναι εκφρασμένα, με το φασιθέτη $e^{j\omega t}$ και να πάρουμε το πραγματικό μέρος του προκύπτοντος γινομένου. Έτσι, για παράδειγμα, για το ηλεκτρικό ρεύμα θα έχουμε

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega t) = \cos(\omega t) \operatorname{Re}(\mathbf{J}(\mathbf{r})) - \sin(\omega t) \operatorname{Im}(\mathbf{J}(\mathbf{r})) \quad (9.1)$$

Για τις εμψυχώσεις αρμονικά μεταβαλλόμενων (time harmonic) φαινομένων, η συνήθης πρακτική είναι να μεταβάλλουμε το γινόμενο συχνότητας-χρόνου ωt στο διάστημα $[0, 2\pi]$ με βήμα 15° και να χρησιμοποιούμε χρωματικές διαβαθμίσεις για να υποδηλώσουμε τα μέτρα των μεταβαλλόμενων μεγεθών και κατάλληλα προσανατολισμένα βέλη για να αποδώσουμε το διανυσματικό τους χαρακτήρα (διεύθυνση και φορά).

Μερικές φορές, κυρίως για λόγους σύγκρισης με πειραματικές μετρήσεις, επιθυμούμε να απεικονίσουμε τις RMS τιμές ορισμένων μεγεθών. Αν τα μεγέθη αυτά τα διαθέτουμε με τη μορφή χρονικών συναρτήσεων, τότε για να βρούμε τις RMS τιμές τους, αρκεί να υπολογίσουμε τους μέσους όρους τους στο διάστημα μιας περιόδου $\omega t = [0, 2\pi]$. Αν πρόκειται για μεγέθη εκφρασμένα στο πεδίο της συχνότητας θα πρέπει πρώτα να τα μεταφέρουμε στο πεδίο του χρόνου. Για το προηγούμενο παράδειγμα της ηλεκτρικής ρευματικής κατανομής, η RMS τιμή της θα δίνεται από την έκφραση

$$\mathbf{J}(\mathbf{r})_{RMS} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}^*(\mathbf{r})} \quad (9.2)$$

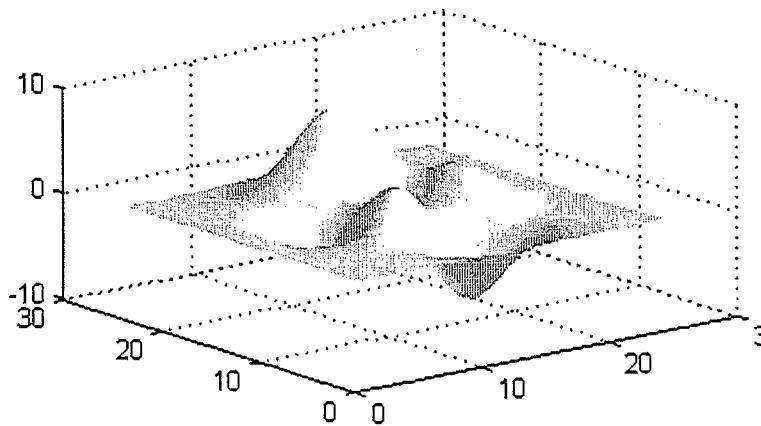
Για να εφαρμόσουμε τις τεχνικές της οπτικοποίησης στην προσομοίωση συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας, έχουμε, στην πράξη, δύο επιλογές. Τη χρήση έτοιμων πακέτων λογισμικού (όπως το PV-WAVE), ή τη δημιουργία από εμάς τους ίδιους κατάλληλων προγραμμάτων για το σκόπο αυτό. Είναι αλήθεια πως, τα έτοιμα πακέτα προσφέρουν μια πληθώρα δυνατοτήτων, χαρακτηρίζονται, όμως, από εξαιρετικά υψηλό κόστος και ιδιαίτερα απότομη καμπύλη εκμάθησης (steep learning curve). Η αναλυτική παρουσίασή τους ξεφεύγει από τα όρια αυτού του κεφαλαίου. Θα αναφέρουμε, μόνο, λίγα πράγματα για το ευρέως διαδεδομένο λογισμικό MATLAB στην επόμενη παράγραφο 9.3.

Στην περίπτωση που, στόχος μας είναι η ανάπτυξη μιας εφαρμογής οπτικοποίησης εξειδικευμένης στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του συστήματος, που θέλουμε να προσομοιώσουμε, πρέπει να αναπτύξουμε κατάλληλο για το σκοπό αυτό πηγαίο κώδικα. Επειδή η χρήση των συνηθισμένων γλωσσών προγραμματισμού θα καθιστούσε κάτι τέτοιο αρκετά επίπονο και χρονοβόρο, η πιο παραγωγική και αποτελεσματική επιλογή είναι ο προγραμματισμός σε μια ειδική γλώσσα γραφικών. Μια τέτοια γλώσσα είναι η VRML, που συνδυάζει, με μοναδικό τρόπο, την ευρεία διάδοση στην επιστημονική κοινότητα με την ευκολία στην εκμάθησή της. Τα βασικά χαρακτηριστικά της γλώσσας αυτής θα τα δώσουμε στην παράγραφο 9.4.

9.3 Οπτικοποίηση με το Πακέτο Λογισμικού MATLAB

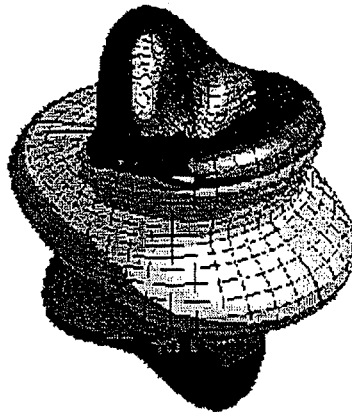
Φυσικά, κάθε λογισμικό διατηρεί τη δική του προσωπικότητα, όσον αναφορά τις μεθόδους οπτικοποίησης. Η ευρέως διαδεδομένη γλώσσα προγραμματισμού για επιστημονικές εφαρμογές MATLAB έχει μια εύχρηστη μηχανή απεικόνισης γραφημάτων σε δύο ή τρεις διαστάσεις, με πάρα πολλές βοηθητικές

συναρτήσεις, που μπορούν να αποδώσουν με σαφήνεια μεγέθη ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, διαγράμματα ακτινοβολίας κεραιών ή γραφήματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Η χρησιμότητα των οπτικοποιήσεων με MATLAB έγκειται και στο γεγονός ότι, συνήθως, η ανάλυση και επίλυση του προβλήματος, που μας απασχολεί, έχει πραγματοποιηθεί με το ίδιο λογισμικό.



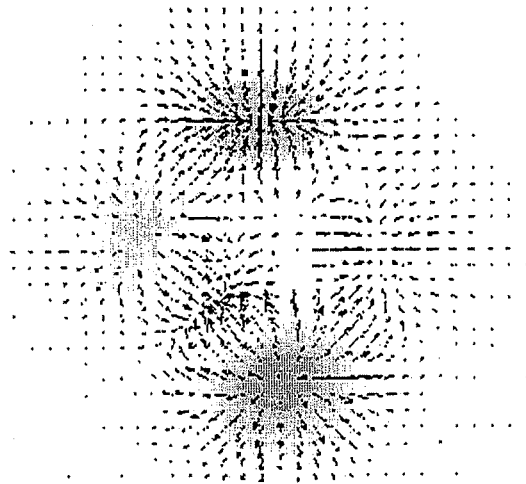
Σχήμα 9.1: Γράφημα συνάρτησης δύο μεταβλητών (MATLAB). (Πηγή: Matlab R12 demos / Graphics / 3D - Plots / surf)

Στο Σχήμα 9.1 φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, η οποία λήφθηκε με την εντολή `surf` και αποτυπώνεται σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η MATLAB, δίνει, επίσης στο χρήστη τη δυνατότητα να δημιουργήσει γραφήματα και σε άλλα συστήματα, όπως το πολικό και το σφαιρικό, ανάλογα με τις ανάγκες του. Δεν απουσιάζουν φυσικά και ειδικές συναρτήσεις γραμμικών μετασχηματισμών στροφής, μετακίνησης, κ.α.



Σχήμα 9.2: Σφαιρικές αρμονικές για μοντελοποίηση της ελεύθερης ταλάντωσης της Γης (MATLAB). (Πηγή: Matlab R12 demos / Gallery / Slosh)

Οι δυνατότητες αυτού του λογισμικού πακέτου για την οπτικοποίηση φυσικών προβλημάτων τριών διαστάσεων είναι πολύ μεγάλες. Στο Σχήμα 9.2 απεικονίζεται μια σφαιρική αρμονική, που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση των ελεύθερων ταλαντώσεων της Γης και η οποία έχει σχεδιαστεί πάνω στην επιφάνεια μίας σφαίρας.



Σχήμα 9.3: Απόκλιση της συνάρτησης του Σχήματος 9.1 (MATLAB). (Πηγή: MATLAB R12 demos / Gallery / Quiver)

Όσον αφορά στην οπτικοποίηση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, υπάρχει πληθώρα ετοιμών βοηθητικών συναρτήσεων, που στοχεύουν στη σαφή απεικόνιση διανυσματικών συναρτήσεων σε δύο ή τρεις διαστάσεις. Μια μικρή γεύση μας δίνει το Σχήμα 9.3, ενώ στις νεότερες εκδόσεις του πακέτου αυτού περιέχεται ένα μεγάλο πλήθος συναρτήσεων βιβλιοθήκης για την απλούστερη οπτικοποίηση πεδιακών μεγεθών σε τρεις διαστάσεις, καθώς και τρόπους εμφάνισης της απόκλισης και της στροφής διανυσματικών συναρτήσεων. Φυσικά, όπως άλλωστε για τα περισσότερα σύγχρονα αντίστοιχα πακέτα, διατίθεται μετατροπέας σε αρχεία VRML. Αντίστοιχες δυνατότητες έχει το γνωστό λογισμικό Mathematica και άλλες λιγότερο διαδεδομένες εφαρμογές.

9.4 Εισαγωγή στη Γλώσσα Προγραμματισμού Εικονικής Πραγματικότητας VRML

9.4.1 Τι Είναι η VRML

Το ακρωνύμιο VRML προκύπτει από τα αρχικά των λέξεων Virtual Reality Modelling Language, που σημαίνουν Γλώσσα Μοντελοποίησης Εικονικής Πραγματικότητας. Ο πληρέστερος ίσως ορισμός της είναι αυτός του Web3D (πρώην VRML) Consortium, σύμφωνα με τον οποίο, η VRML είναι ένα ανοικτό πρότυπο για τρισδιάστατους κοινούς διαδραστικούς κόσμους πολυμέσων στο διαδίκτυο. Στον τίτλο αυτής της παραγράφου (9.4) χαρακτηρίζουμε την VRML σαν γλώσσα προγραμματισμού. Πρέπει, όμως, να ξεκαθαρίσουμε πως, δεν πρόκειται για γλώσσα προγραμματισμού γενικής χρήσης, όπως η C++, ούτε για γλώσσα σεναρίων, όπως η JavaScript, ούτε καν για γλώσσα δήλωσης ιστοσελίδων, όπως είναι η HTML. Την VRML θα μπορούσαμε να την ορίσουμε σαν μια γλώσσα, που περιγράφει τη γεωμετρία και τη συμπεριφορά τρισδιάστατων σκηνών, οι οποίες στην ορολογία της VRML καλούνται κόσμοι (worlds).

9.4.2 Ιστορική Αναδρομή

Ο πρόδρομος της VRML υπήρξε το Labyrinth, μια πρωτότυπη τρισδιάστατη εφαρμογή διαπροσωπίας (3D interface) για το διαδίκτυο, η οποία προτάθηκε από τους Marc Pesce και Tony Parisi σε μια εργασία τους, που παρουσίασαν στο Πρώτο Διεθνές Συνέδριο για τον Παγκόσμιο Ιστό (World Wide Web), το Μάιο του 1994 στη Γενεύη.

Την επόμενη, κιόλας, χρονιά εμφανίστηκε η πρώτη έκδοση της VRML. Η VRML 1.0, όπως ονομάστηκε, υπήρξε το αποτέλεσμα των συντονισμένων προσπαθειών της κοινότητας των ειδικών στα γραφικά υπολογιστών, να επεκτείνουν την κειμενοκεντρική μορφή του διαδικτύου, συμπεριλαμβάνοντας τρισδιάστατα, αμφίδρομα μοντέλα. Το βασικό κίνητρο των πρωτοπόρων της VRML ήταν το όραμα της εργασίας και επικοινωνίας μέσα από κοινούς τρισδιάστατους εικονικούς χώρους.

Η VRML 1.0 ήταν μια πολύ απλοϊκή γλώσσα, χωρίς πολλές δυνατότητες, που ήρθε, όμως, να καλύψει ένα κενό. Η επέκτασή της ήταν ζήτημα χρόνου. Πράγματι, μόλις δύο χρόνια αργότερα, εμφανίστηκε η VRML 2.0, με σημαντικές αλλαγές στη δομή των αρχείων και πλήθος νέων χαρακτηριστικών, όπως η εμφύχωση (animation). Η VRML 2.0 υποβλήθηκε στο Διεθνή Οργανισμό Τυποποίησης (ISO) και τη Διεθνή Επιτροπή Ηλεκτροτεχνίας (IEC) για έγκριση και αναγνώριση. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ήταν να ανακοινωθεί, το Δεκέμβριο του 1997, το διεθνές πρότυπο (ISO/IEC-14772-1:1997), που αφορά τη γλώσσα VRML 97. Αξίζει να παρατηρήσουμε πως, ο ISO εντυπωσιάστηκε τόσο από το σχεδιασμό της VRML, που τη μελετά σαν μοντέλο για την ανάπτυξη μελλοντικών προτύπων. Η VRML 97 είναι πρακτικά πανομοιότυπη με τη VRML 2.0, με ελάχιστες διαφορές σε ασήμαντες λεπτομέρειες.

Ακόμα όμως και πριν την επίσημη προτυποποίησή της, η VRML είχε καθιερωθεί σαν το *de facto standard* για τη μεταφορά δεδομένων μεταξύ εφαρμογών CAD, animation και τρισδιάστατης μοντελοποίησης. Σχεδόν όλα τα πακέτα τέτοιου τύπου εφαρμογών παρέχουν, πλέον, έξοδο σε VRML, ή διαθέτουν κάποια ρουτίνα μετατροπής της δικής τους δομής αρχείων σε VRML. Ενδεικτικό της μεγάλης διάδοσης, που γνωρίζει η VRML, είναι η συμπερίληψη ή αναφορά της σε πολλά νέα εξελισσόμενα πρότυπα, όπως το επερχόμενο MPEG-4 και η Java3D.

Οι εφαρμογές της VRML καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα και συμπεριλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, την επιστημονική οπτικοποίηση (scientific visualization), τα αρχιτεκτονικά μοντέλα, τις προσομοιώσεις, την ηλεκτρονική χαρτογραφία, ακόμα και τη δημιουργία κινουμένων σχεδίων.

9.4.3 Τα Αρχεία της VRML

Είναι γεγονός πως, μερικοί επαγγελματίες του χώρου των τρισδιάστατων γραφικών αντιμετωπίζουν με έντονο σκεπτικισμό τη VRML, διατηρώντας επιφυλάξεις για την ποιότητα των απεικονίσεών της. Όμως, το μυστικό πίσω από την επιτυχία της VRML δεν βρίσκεται στην υψηλή οπτική αισθητική, αλλά στο γεγονός πως, ο καθένας, που διαθέτει ένα απλό πρόγραμμα διόρθωσης κειμένου (text editor) και ένα δωρεάν browser, είναι σε θέση να πειραματιστεί με τρισδιάστατους κόσμους και να διανείμει τα αποτελέσματά σε όλο τον κόσμο.

Οι εικονικοί κόσμοι (virtual worlds), που αποτελούν και το βασικό αντικείμενο της VRML, περιγράφονται με ένα ή περισσότερα VRML αρχεία κόσμων. Τα αρχεία αυτά διακρίνονται από την .wrl (συντομογραφία του world) επέκτασή τους. Η διανομή τους στο διαδίκτυο γίνεται με το MIME (Multipurpose Internet Mail Extension) τύπο "model/world". Ο παλαιότερος τύπος "x-world/x-vmrl" έχει, πλέον, σχεδόν εγκαταλειφθεί.

Κάθε αρχείο VRML είναι ένα απλό UTF-8 (υπερσύνολο του ASCII) αρχείο κειμένου. Μπορεί να το δημιουργήσει κανείς, είτε με εξειδικευμένες εφαρμογές (higher level VRML authoring tools), χωρίς να είναι απαραίτητη η γνώση της VRML, είτε με ένα απλό διορθωτή κειμένου (όπως ο Notepad ή ο WordPad των

Windows ή ο Programmer's File Editor). Καλό είναι να αποφεύγεται η χρήση πακέτων επεξεργασίας κειμένου (όπως το Word), γιατί ενδέχεται να εισάγουν ειδικούς χαρακτήρες, που ίσως δημιουργήσουν προβλήματα. Με όποιο τρόπο όμως και να το δημιουργήσουμε, η πρώτη γραμμή ενός αρχείου VRML πρέπει να είναι πάντα

```
#VRML V2.0 utf8
```

Η επικεφαλίδα αυτή δηλώνει ότι, το αρχείο, που την περιέχει, είναι VRML αρχείο, σύμφωνα με τις προδιαγραφές του ISO VRML standard και χρησιμοποιεί το διεθνές σύνολο χαρακτήρων UTF-8. Σε οποιαδήποτε άλλη γραμμή, εκτός από την επικεφαλίδα το σύμβολο # σηματοδοτεί την έναρξη σχολίων. Στο σημείο αυτό, πρέπει να κάνουμε μια ιδιαίτερα σημαντική επισήμανση. Η VRML κάνει διάκριση ανάμεσα στους κεφαλαίους και τους πεζούς χαρακτήρες, είναι δηλαδή case sensitive. Αν κάποιος δεν είναι προσεκτικός στο θέμα αυτό, μπορεί να οδηγηθεί σε σημαντικά λάθη.

Για τον εντοπισμό και τη διόρθωση των σφαλμάτων σε κώδικα VRML σημαντική βοήθεια μπορούν να προσφέρουν στον προγραμματιστή ειδικές εφαρμογές, που καλούνται VRML Ελεγκτές (VRML Validators). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν το Viper του NIST και τα Vorlon και Chissel της Tragezium. Τα προγράμματα αυτά μπορούν, επίσης, να λειτουργήσουν και σαν βελτιστοποιητές (optimizers), ενώ παρέχουν τη δυνατότητα συμπίεσης των VRML αρχείων, με τη χρήση της εφαρμογής gzip. Τα VRML αρχεία, που είναι συμπιεσμένα με την τεχνική αυτή, έχουν συνήθως επέκταση .wiz ή .wrl.gz. Επειδή τα αρχεία VRML καταλήγουν να είναι συνήθως μεγάλα σε μέγεθος, είναι εύκολο να αντιληφθούμε πως το θέμα της συμπίεσής τους είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Την αποσυμπίεση των αρχείων αυτών αναλαμβάνουν, συνήθως, να φέρουν εις πέρας τα προγράμματα απεικόνισης των κόσμων.

9.4.4 VRML Browsers

Για να επισκεφθούμε, ή να δούμε ένα VRML κόσμο, χρειαζόμαστε μια εφαρμογή, που καλείται VRML Browser. Η εφαρμογή αυτή διαβάζει τα αρχεία του κόσμου, που μας ενδιαφέρει, διερμηνεύει το συντακτικό του, δημιουργεί τους τρισδιάστατους εικονικούς χώρους που τον αποτελούν και τον σχεδιάζει. Υπάρχουν τριών ειδών browsers: οι αυτόνομες εφαρμογές, οι βοηθητικές και τα plugins.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν προγράμματα, που μπορούν να τρέξουν μόνα τους, χωρίς την ανάγκη κάποιου web browser. Τα προγράμματα αυτά χρειάζονται, συνήθως, μεταγλώττιση με κάποιο σύστημα ανάπτυξης, όπως τα Open Inventor, World View for Developers, Open Worlds και Jverge.

Αντίθετα, οι βοηθητικές εφαρμογές δεν απαιτούν μεταγλώττιση. Για να λειτουργήσουν, όμως, χρειάζονται την ύπαρξη ενός web browser, στον οποίο ο χρήστης πρέπει να τις ορίσει σαν βοηθητικές εφαρμογές (helper application), όπως κάνει για έναν PostScript ή Microsoft Word viewer. Με τον τρόπο αυτό,

κάθε φορά που στο web browser ενεργοποιείται μια σύνδεση με ένα VRML κόσμο, ο browser θα προκαλεί την εκκίνηση της βοηθητικής εφαρμογής. Αντίστροφα, η βοηθητική εφαρμογή θα καλεί τον web browser, αν σε αυτή δραστηριοποιηθεί μια σύνδεση με μια HTML σελίδα. Οι δύο πιο δημοφιλείς VRML βοηθητικές εφαρμογές είναι το Community Place της Sony και το VRWave.

Αναμφίβολα, όμως, ο πιο διαδεδομένος τρόπος απεικόνισης ενός VRML κόσμου είναι τα plugins. Όπως φανερώνει και το όνομα τους, πρόκειται για προσθήκες, που επεκτείνουν τις δυνατότητες των web browsers, καθιστώντας δυνατό το χειρισμό μέσα από αυτούς των VRML κόσμων. Τα περισσότερο δημοφιλή VRML plugins είναι το WorldView της Intervista, γνωστό επίσης και σαν Microsoft VRML, καθώς και το Cosmo Player της Cosmo Software.

Όλοι οι VRML browsers, εκτός από απλή απεικόνιση εικονικών κόσμων, μας παρέχουν και ένα περιβάλλον διαπροσωπείας, που μας επιτρέπει να κινηθούμε μέσα σε αυτούς, να αλληλεπιδράσουμε με το περιεχόμενό τους, να διεγείρουμε animations, ακόμα και να ακούσουμε τρισδιάστατο ήχο.

Για τη δημιουργία των γραφικών απεικονίσεων (σε πραγματικό χρόνο, μάλιστα), οι browsers χρησιμοποιούν συστήματα τρισδιάστατων γραφικών, όπως η OpenGL της Silicon Graphics, ή το Direct3D της Microsoft. Τα συστήματα αυτά, με τη σειρά τους, αξιοποιούν το υλισμικό επιτάχυνσης τρισδιάστατων γραφικών, που, ενδεχομένως, να είναι εγκατεστημένο στον υπολογιστή, που τρέχει ο browser.

9.4.5 Η Δομή των VRML Κόσμων

Η VRML είναι μια γλώσσα περιγραφής σκηνών (scene description language). Τα δεδομένα των σκηνών τα χειρίζεται οργανωμένα σε ιεραρχικές δενδρικές δομές, που καλούμε Γράφους Σκηνών (Scene Graphs). Τέτοιες δομές για το χειρισμό τρισδιάστατων πληροφοριών εισήγαγε πρώτη η Silicon Graphics, με το εξαιρετικά διαδεδομένο γραφικό της εργαλείο Open Inventor. Οι πρωτοποριακές ιδέες, που ενσωμάτωνε το Open Inventor, απετέλεσαν πηγή έμπνευσης για τους πρώτους σχεδιαστές της VRML. Μάλιστα, η πρώτη έκδοση του συντακτικού της VRML το 1995 ήταν, κατά το μεγαλύτερο τμήμα της, απλώς ένα υποσύνολο του τύπου αρχείων ".iv" του Open Inventor.

Μιλώντας μαθηματικά, με τη λέξη «γράφος» αναφερόμαστε ταυτόχρονα σε ένα σύνολο κορυφών (vertices) και σε ένα σύνολο ακμών (edges), που συνδέονται μεταξύ τους, μέσω της συνθήκης ότι, κάθε ακμή τερματίζει σε καθένα από τα δυο άκρα της σε μια κορυφή.

Στα πλαίσια της VRML, κορυφές των γράφων σκηνών αποτελούν οι λεγόμενοι κόμβοι της (VRML nodes). Αντίστοιχα, οι ακμές ενός γράφου σκηνών εκφράζουν τις σχέσεις μεταξύ των κόμβων. Ως επί το πλείστον, οι σχέσεις αυτές είναι σχέσεις γονικές, δηλαδή σχέσεις τέκνων (children) και γονέων (parents).

Ένας σχεδιαστής VRML κόσμων χτίζει τους γράφους σκηνών του, ορίζοντας τα σχήματα, τους φωτισμούς, τους ήχους του, σαν τέκνα-κόμβους (child nodes) και, στη συνέχεια, ομαδοποιώντας τους. Η ομαδοποίηση κόμβων στη VRML λαμβάνει χώρα, αναθέτοντας έναν κοινό κόμβο-γονέα (parent node) στα τέκνα-κόμβους, που θέλουμε να συνδέσουμε.

Η έννοια του γράφου σκηνών είναι θεμελιώδης στη VRML, χωρίς όμως να συνιστά αποκλειστικότητα της. Η αφαιρετική προσέγγιση, που προσφέρουν οι γράφοι σκηνών στη δημιουργία τρισδιάστατων γραφικών, έχει υιοθετηθεί από σχεδόν όλα τα προγραμματιστικά περιβάλλοντα γραφικών (HOOPS, Performer, RHIGS) και πολλοί είναι αυτοί, που προβλέπουν την κυριαρχία των γράφων σκηνών στο χώρο των γραφικών το νέο αιώνα.

Ο λόγος της επιτυχίας των γράφων είναι, τόσο η προγραμματιστική ευκολία σε συνδυασμό με τη μεγάλη εκφραστική δύναμη, που παρέχουν, μετατοπίζοντας την προσοχή του σχεδιαστή από τα πολύγωνα, στα αντικείμενα και στη διάταξή τους σε μια σκηνή, όσο και οι δυνατότητες, που προσφέρουν στην αντιμετώπιση του ολοένα και αυξανόμενου χάσματος μεταξύ καρτών γραφικών και επεξεργαστών.

9.4.6 Οι Κόμβοι και τα Πεδία τους

Τα δομικά στοιχεία κάθε VRML κόσμου είναι οι κόμβοι του (nodes). Κάθε κόμβος δηλώνει και έναν τύπο αντικειμένου (π.χ. σχήμα) και όλοι μαζί οι κόμβοι ενός κόσμου συνιστούν το γράφο σκηνών του. Υπάρχουν συνολικά 54 διαφορετικοί τύποι κόμβων στη VRML, καθώς και η δυνατότητα ορισμού νέων.

Η δήλωση ενός κόμβου γίνεται, δίνοντας τον τύπο του (δηλαδή τη γενική του ονομασία), ακολουθούμενο από ένα ζευγάρι αγκυλών ({}), στο εσωτερικό των οποίων μπορούμε να έχουμε τα πεδία των κόμβων και τις τιμές τους.

Τα πεδία ενός κόμβου αναφέρονται στις ιδιότητες (π.χ. διαστάσεις, χρώμα) του αντικειμένου, που περιγράφει ο κόμβος. Ένα κομβικό πεδίο μπορεί να έχει περισσότερες από μια τιμές. Οι τιμές αυτές ανήκουν σε κάποιο από τους τύπους δεδομένων της VRML. Σε αυτούς περιλαμβάνονται οι ακέραιοι και οι κινητής υποδιαστολής αριθμοί, ο τύπος Boolean (λογικό αληθές ή ψευδές), τα αλφαριθμητικά (strings), τα χρώματα κόκκινο, πράσινο και μπλε (RED, GREEN, BLUE), καθώς και οι διδιάστατες και τρισδιάστατες συντεταγμένες. Τιμή του πεδίου ενός κόμβου μπορεί να αποτελεί και ένας άλλος κόμβος, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του κόμβου Group, που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Όλα τα κομβικά πεδία έχουν προκαθορισμένες (default) τιμές, τις οποίες χρησιμοποιεί αυτόματα ο κόμβος, σε περίπτωση που παραλείψουμε τα αντίστοιχα πεδία από τη δήλωσή του. Το χαρακτηριστικό αυτό διευκολύνει σημαντικά το γράψιμο VRML κώδικα και απλοποιεί σε μεγάλο βαθμό την ανάπτυξή του.

Οι κόμβοι της VRML και τα πεδία τους μπορούν να διαταχθούν σε μια ή περισσότερες γραμμές, με όποιο τρόπο επιθυμεί ο προγραμματιστής, στον οποίο παρέχεται έτσι απόλυτη ελευθερία στο θέμα αυτό. Τα κενά, οι στηλοθέτες (tabs),

οι επαναφορές (carrriage returns), ακόμα και τα κόμματα, αποτελούν όλα χαρακτηριστές λευκού κενού (white space) και αγνοούνται παντελώς. Όσο για τις αγκύλες, μπορούμε να τις εισάγουμε, με όποιο τρόπο επιθυμούμε.

Οι κόμβοι, ανάλογα με τη λειτουργία που επιτελούν και τα χαρακτηριστικά τους, διακρίνονται σε Γεωμετρικούς (Geometry Nodes), Ομαδοποιητές (Grouping), Δεσμεύσιμους (Bindable), Απογόνους (Children) και Ειδικούς (Special). Οι ονομασίες των παραπάνω κατηγοριών αναφέρονται στα κοινά γνωρίσματα των κόμβων, που ανήκουν σε αυτές. Έτσι, για παράδειγμα, οι Γεωμετρικοί κόμβοι, όπως οι Box, Cone, Cylinder, είναι αυτοί που μπορούν να περιέχονται μόνο μέσα στο πεδίο γεωμετρίας του κόμβου Σχήματος. Όμοια, οι Ομαδοποιητές, όπως είναι οι Group, LOD, Switch, είναι οι κόμβοι που περιλαμβάνουν σαν απογόνους τους, άλλους κόμβους με τη μορφή τιμών στο πεδίο τους Children. Ανάλογα ισχύουν και για τις υπόλοιπες κατηγορίες.

Ένας πολύ απλός κόμβος, που συνήθως περιλαμβάνεται σε όλους τους VRML κόσμους, είναι ο WorldInfo. Όπως φανερώνει και το όνομα του, ο κόμβος αυτός μας παρέχει, μέσω των πεδίων του, γενικές πληροφορίες για τον κόσμο, που τον περιέχει, όπως, για παράδειγμα, τον τίτλο αυτού του κόσμου. Ο τίτλος καθορίζεται από το πεδίο title του WorldInfo και εμφανίζεται στη μπάρα τίτλου του browser, όπως ακριβώς και με το περιεχόμενο της ετικέτας TITLE στην HTML. Ο WorldInfo περιέχει ακόμα και το πεδίο info με επιπρόσθετες πληροφορίες. Ένα παράδειγμα χρήσης του κόμβου αυτού δίνεται ευθύς αμέσως.

```
WorldInfo {
    Title "My First VRML World"
    info ["(c) Copyright 2000 Novice VRML Developer"]
}
```

Μπορούμε να έχουμε όσους κόμβους WorldInfo θέλουμε μέσα σε ένα VRML αρχείο, αλλά μόνον ο πρώτος θα εκτελεστεί. Η σειρά, με την οποία γράφουμε τα πεδία στο WorldInfo, αλλά και σε κάθε άλλο κόμβο, δεν έχει καμία απολύτως σημασία. Όποια και αν είναι η σειρά, το αποτέλεσμα είναι πάντα το ίδιο.

Αυτό, που παίζει μεγάλο ρόλο, είναι ο τρόπος, με τον οποίο γράφουμε τις ονομασίες των κόμβων και των πεδίων τους, αφού, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η VRML κάνει διάκριση ανάμεσα σε κεφαλαίους και πεζούς χαρακτήρες (είναι, δηλαδή, case sensitive). Συνεπώς, δεν επιτρέπεται να γράψουμε τον WorldInfo σαν WOLRDINFO ή worldinfo.

Οι κόμβοι έχουν, συνήθως, κεφαλαίους χαρακτήρες στην αρχή του ονόματός τους (π.χ. Shape, Appearance, Material), ενώ τα αρχικά γράμματα των πεδίων είναι, κατά κανόνα, πεζά (lower case) (π.χ. geometry, title, children). Στη VRML είναι αρκετά συνηθισμένο το φαινόμενο, η ίδια λέξη, ανάλογα με το πώς είναι γραμμένη (π.χ. Material ή material), να δηλώνει άλλοτε κόμβο και άλλοτε πεδίο

κόμβου. Το σημείο αυτό απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, γιατί αποτελεί συχνή πηγή σφαλμάτων.

Η VRML μας παρέχει τη δυνατότητα να καθορίσουμε μια δική μας ονομασία, για κάθε κόμβο του κόσμου μας. Αυτό επιτυγχάνεται, προσθέτοντας μπροστά από τη δήλωση του κόμβου την εντολή DEF και την ονομασία, που επιθυμούμε. Για να επαναχρησιμοποιήσουμε το συγκεκριμένο κόμβο (με όλους τους ορισμούς των πεδίων του) σε κάποιο άλλο σημείο του κόσμου μας, αρκεί να δώσουμε την εντολή USE, ακολουθούμενη από την ονομασία, που είχαμε επιλέξει.

9.4.7 Δημιουργία Απλών Σχημάτων

Για να συνθέσουμε ένα σχήμα στη VRML, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κόμβο Shape. Πρόκειται για έναν από τους ευρύτερα χρησιμοποιούμενους κόμβους. Μάλιστα είναι σχεδόν αδύνατο να φανταστούμε ένα μη τετριμμένο VRML κόσμο χωρίς αυτόν.

Ο Shape περιγράφει τα σχήματα, που συνιστούν έναν κόμβο, με τη βοήθεια των δυο πεδίων του, του geometry και του appearance. Όπως είναι εμφανές και από τα ονόματα των πεδίων αυτών, το πεδίο geometry μας δίνει τη γεωμετρία του περιγραφόμενου σχήματος, ενώ το πεδίο appearance ρυθμίζει θέματα της εμφάνισής του.

Ένας απλός και εύκολος τρόπος, να φτιάξει κάποιος ένα σχήμα, είναι να χρησιμοποιήσει σαν τιμή του πεδίου geometry έναν από τους γεωμετρικούς κόμβους Sphere, Cylinder, Cone και Box. Ο κόμβος Sphere κατασκευάζει μια σφαίρα και έχει ένα μόνο πεδίο, το radius, που καθορίζει την ακτίνα της σφαίρας αυτής. Αν θέλουμε έναν κύβο, πρέπει να καταφύγουμε στη χρήση του κόμβου Box. Και ο Box έχει ένα μόνο πεδίο, το size, αλλά το πεδίο αυτό προσδιορίζεται από τρεις τιμές, τις διαστάσεις του κύβου κατά τους τρεις άξονες συντεταγμένων x, y και z. Αν το size δεν καθοριστεί, τότε θα χρησιμοποιηθούν οι προκαθορισμένες τιμές του, που είναι δύο μέτρα σε κάθε κατεύθυνση. Ελάχιστα πιο σύνθετος είναι ο κόμβος Cylinder, που έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός κυλίνδρου. Χαρακτηρίζεται από έξι πεδία, τα radius, height, side, top και bottom, εκ των οποίων τα δυο πρώτα είναι πεδία με τιμές αριθμούς κινητής υποδιαστολής, ενώ τα υπόλοιπα παίρνουν τιμές Boolean. Τα radius και height καθορίζουν την ακτίνα και το ύψος, αντίστοιχα, του σχεδιαζόμενου κυλίνδρου. Οι προκαθορισμένες τιμές τους είναι ένα και δύο μέτρα, αντίστοιχα. Τα πεδία side, top και bottom, ανάλογα με τη Boolean τιμή που λαμβάνουν (TRUE ή FALSE), πληροφορούν τον browser, αν πρέπει ή όχι να σχεδιάσει την παράπλευρη επιφάνεια και τις πάνω και κάτω όψεις του κυλίνδρου. Οι προκαθορισμένες τιμές τους είναι όλες TRUE. Ο κόμβος Cone, τέλος, σχεδιάζει κώνους. Μοιάζει αρκετά με τον Cylinder καθώς έχει και αυτός πεδία height, side, bottom, με την ίδια ακριβώς σημασία, χρήση και προκαθορισμένες τιμές. Στην θέση, όμως, του πεδίου radius έχει το bottomRadius, που αναφέρεται στην ακτίνα της βάσης του. Η προκαθορισμένη τιμή της bottomRadius είναι 1. Όπως διαπιστώνουμε, απουσιάζει το πεδίο top, αφού οι κώνοι στερούνται οροφών.

9.4.8 Κείμενα στη VRML

Τα κείμενα στη VRML αντιμετωπίζονται σαν σχήματα. Για το λόγο αυτό, τα εισάγουμε, κάνοντας συνδυασμένη χρήση του κόμβου Shape με τον κόμβο Text, απόγονό του μέσω του geometry πεδίου του. Δηλαδή, για τη VRML, τα κείμενα είναι απλώς συλλογές σχημάτων και μπορούμε να ελέγξουμε την εμφάνιση και τη θέση τους σε έναν κόσμο, όπως κάνουμε και με τα υπόλοιπα σχήματα.

Ο κόμβος Text έχει τέσσερα πεδία. Το πρώτο καλείται string και μέσω αυτού καθορίζουμε τα αλφαριθμητικά ή τη λίστα των αλφαριθμητικών, που αποτελούν το κείμενο, που θέλουμε να εμφανίσουμε. Τα υπόλοιπα πεδία του Text ρυθμίζουν τον τρόπο εμφάνισης του κειμένου. Έτσι, το πεδίο maxExtent ελέγχει το μέγιστο εύρος (σε μέτρα), στο οποίο επιτρέπεται να εκταθεί το κείμενο, ενώ το πεδίο length μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε (και πάλι σε μέτρα) από ένα ξεχωριστό μήκος για καθένα από τα αλφαριθμητικά, που συνιστούν το κείμενό μας. Υπάρχει ένα ακόμα πεδίο, το fontStyle, που σαν τιμή παίρνει τον κόμβο FontStyle και μας παρέχει μεγάλες δυνατότητες ελέγχου του κειμένου μας. Ο κόμβος αυτός είναι αρκετά σύνθετος. Έχει δέκα πεδία. Αυτά είναι τα size, family, style, horizontal, leftToRight, topToBottom, language, justify και spacing. Το πεδίο size αναφέρεται στο ύψος κάθε γραμμής του κειμένου μας (σε μέτρα). Το πεδίο family ελέγχει τον τύπο της γραμματοσειράς και μπορεί να λάβει τρεις τιμές, τις "SERIF", "SANS" και "TYPEWRITER". Το πεδίο style καθορίζει την εμφάνιση του κειμένου και οι τιμές του μπορεί να είναι οι "PLAIN", "BOLD", "ITALIC" ή "BOLD ITALIC". Τα πεδία leftToRight και topToBottom είναι Boolean. Αν είναι TRUE, το κείμενό μας θα εμφανιστεί από δεξιά προς τα αριστερά και από πάνω προς τα κάτω. Πληροφορίες για τη γλώσσα, στην οποία είναι γραμμένο το κείμενο, μπορούμε να δώσουμε μέσω ενός κώδικα δυο χαρακτήρων σαν τιμή στο πεδίο language. Η πληροφορία αυτή για τη γλώσσα είναι δυνατόν να έχει επίδραση στην εμφάνιση των αλφαριθμητικών. Από τα πιο χρήσιμα πεδία του FontStyle είναι το justify, που ρυθμίζει τη στοίχιση του κειμένου και μπορεί να λάβει τις τιμές "BEGIN", "MIDDLE", ή "END". Τέλος, το πεδίο spacing διαμορφώνει την απόσταση μεταξύ των γραμμών του κειμένου. Αν λαμβάνει την τιμή 1, έχουμε τη συνηθισμένη απόσταση, ενώ αν η τιμή αυτή είναι 2, θα παρεμβάλλεται μια κενή γραμμή ανάμεσα σε δυο διαδοχικές γραμμές του κειμένου.

9.4.9 Προχωρημένες Τεχνικές Σύνθεσης Σχημάτων

Οι αρχετυπικοί κόμβοι Sphere, Box, Cylinder και Cone, αν και εξαιρετικά απλοί στην δομή τους, περιορίζουν σημαντικά τις μορφές των σχημάτων, που μπορούμε να συνθέσουμε με αυτούς. Επιπλέον, οι κόμβοι Sphere, Cylinder και Cone, αν και καταλαμβάνουν πολύ μικρό χώρο αρχείου κατά τον ορισμό ενός μοντέλου, στην πράξη η γραφική απόδοσή τους απαιτεί υψηλούς αριθμούς πολυγώνων. Για το λόγο αυτό, συνίσταται η αποφυγή της χρήσης τους σε μεγάλα μοντέλα. Στην παράγραφο αυτή, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε εναλλακτικούς γεωμετρικούς κόμβους, όπως οι IndexedFaceSet και ElevationGrid που, αν και πιο περίπλοκοι στον ορισμό τους, συνδυάζουν αρκετά επιτυχημένα ευελιξία και αποδοτικότητα.

Ο κόμβος `IndexedFaceSet` είναι ο πιο ισχυρός και δημοφιλής γεωμετρικός κόμβος. Χρησιμοποιώντας τον, μπορούμε να συνθέσουμε αυθαίρετα πολυγωνικά σχήματα, δίνοντας τις τρισδιάστατες συντεταγμένες των κορυφών τους. Ουσιαστικά, με τη βοήθειά του ορίζουμε μια συλλογή εδρών. Κάθε μία από τις έδρες αυτές μπορεί να έχει όσες κορυφές θέλουμε. Αν, όμως, οι κορυφές αυτές δεν ανήκουν όλες στο ίδιο επίπεδο, δημιουργούνται προβλήματα στο browser. Για το λόγο αυτό, είναι καλύτερο να χρησιμοποιούμε τον `IndexedFaceSet` με τρίγωνα που, έτσι κι αλλιώς οι κορυφές τους είναι πάντα ομοεπίπεδες. Εξάλλου, με τρίγωνα μπορούμε να συνθέσουμε σχεδόν οποιοδήποτε σχήμα επιθυμούμε.

Τα τρία βασικά πεδία του κόμβου `IndexedFaceSet` είναι τα `coord`, `coordIndex` και `solid`. Το πρώτο παίρνει σαν τιμή έναν κόμβο `Coordinate`. Ο κόμβος `Coordinate` διαθέτει, με τη σειρά του, ένα πεδίο `point`, το οποίο σαν τιμή δέχεται μια λίστα τρισδιάστατων συντεταγμένων. Οι συντεταγμένες αυτές αναφέρονται στις κορυφές των εδρών, που συνιστούν το περιγραφόμενο από τον `IndexedFaceSet` σχήμα. Από μόνες τους, όμως, αυτές οι συντεταγμένες δεν αρκούν. Απαιτείται και η πληροφορία της οργάνωσής τους σε έδρες (πολύγωνα). Την πληροφορία αυτή την παρέχουμε στον `IndexedFaceSet` μέσω των τιμών του δευτέρου του πεδίου `coordIndex`. Οι τιμές αυτές συνιστούν μια λίστα εδρών. Η συγκεκριμένη λίστα αποτελείται από τους δείκτες των κορυφών κάθε έδρας. Οι δείκτες αναφέρονται στις θέσεις, που έχουν στο πεδίο `point` οι τριάδες των συντεταγμένων των κορυφών. Ο αριθμός -1 σηματοδοτεί τα όρια ανάμεσα στους διαφορετικούς εδρών. Όπως βλέπουμε, οι τιμές των πεδίων `coord` και `coordIndex` σχετίζονται άμεσα μεταξύ τους. Η σειρά, με την οποία δίνουμε τους δείκτες των κορυφών μιας έδρας, σαν τιμές στο πεδίο `coordIndex`, έχει μεγάλη σημασία. Και αυτό γιατί, η φορά του κάθετου στην έδρα, που περιγράφουμε, μοναδιαίου διανύσματος καθορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού (*right hand rule*). Η κάθε έδρα έχει δύο όψεις. Τη λεγόμενη εξωτερική, που «βλέπει» προς τη θετική κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος και την εσωτερική, που «βλέπει» προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αν το Boolean πεδίο `solid` είναι αληθές (η προκαθορισμένη του τιμή), τότε ο browser σχεδιάζει μόνον τις εξωτερικές όψεις των εδρών του `IndexedFaceSet`. Στην αντίθετη περίπτωση, σχεδιάζει και τις εσωτερικές.

Μεγάλη ομοιότητα με τον `IndexedFaceSet` παρουσιάζει ο κόμβος `IndexedLineSet`. Έχει και αυτός τα πεδία `coord` και `coordIndex`, μόνον που αυτά περιέχουν και οργανώνουν τις συντεταγμένες σημείων, που ορίζουν γραμμές στον τρισδιάστατο χώρο. Η διάκριση ανάμεσα σε ομάδες δεικτών συντεταγμένων, που αναφέρονται σε διαφορετικές γραμμές, γίνεται και πάλι με τη βοήθεια του αρνητικού δείκτη -1, στο πεδίο `coordIndex`. Πεδίο `solid`, πλέον, δεν υφίσταται, καθώς οι σχεδιαζόμενες γραμμές υποτίθεται πως είναι απείρως λεπτές. Μάλιστα, ο θεατής του κόσμου μπορεί να περάσει ελεύθερα μέσα από αυτές, καθώς η VRML δεν τις ελέγχει για συγκρούσεις. Ο `IndexedLineSet` χρησιμοποιείται για τη σχεδίαση πολύ λεπτών γραμμικών μορφών, όπως οι συρματινοί σκελετοί αντικείμενων. Οι γραμμές, που περιγράφει, μπορούν να χρωματιστούν, αλλά είναι αδύνατο να ορίσουμε την ύφη τους. Η χρήση του κόμβου αυτού στη VRML δεν είναι, όπως μπορούμε να μαντέψουμε, ιδιαίτερα συχνή.

Ακόμα πιο σπάνια είναι η χρήση του κόμβου `PointSet`. Όπως φαίνεται και από το όνομά του, ο κόμβος αυτός σχεδιάζει ένα σύνολο (set) μεμονωμένων σημείων (points) στον τρισδιάστατο χώρο. Μπορούμε να τον θεωρήσουμε σαν μια εκφυλισμένη μορφή του `IndexedFaceSet` και `IndexedLineSet`. Έχει μόνον το πεδίο `coord` με τις συντεταγμένες των σημείων που περιγράφει. Το πεδίο `coordIndex` απουσιάζει (όπως και το συνθετικό `Indexed` από την ονομασία του), αφού δεν συντρέπει κανένας λόγος οργάνωσης των σχεδιαζόμενων σημείων. Το μέγεθος των σημείων, επί του παρόντος, καθορίζεται αποκλειστικά από το browser και δεν παρέχεται καμία δυνατότητα ελέγχου στο σημείο αυτό στο χρήστη. Όπως και οι γραμμές του `IndexedLineSet`, έτσι και τα σημεία του `PointSet` είναι απολύτως διαπερατά.

Αντίθετα από τα μεμονωμένα σημεία που δεν είναι και ιδιαίτερα χρήσιμα, πολλές φορές χρειαζόμαστε ένα (ή περισσότερα) επίπεδα (planes). Ένα τέτοιο επίπεδο θα μπορούσε, για παράδειγμα, να αποτελεί το έδαφος του κόσμου μας και, φυσικά, δεν είναι απαραίτητο να είναι πάντοτε απολύτως ισοϋψές. Ένας τρόπος, να δημιουργήσουμε ένα τέτοιο σχήμα, είναι με τη χρήση του κόμβου `IndexedFaceSet`. Η VRML, όμως, μας προσφέρει και μια εναλλακτική λύση, με τη μορφή του γεωμετρικού κόμβου `ElevationGrid`. Ο κόμβος αυτός είναι ειδικά φτιαγμένος για τη δημιουργία επιπέδων με μεταβλητές κατανομές ύψους. Το βασικό συντακτικό του είναι το ακόλουθο:

```
ElevationGrid{
    MFFloat height []
    SFBool solid TRUE
    SFInt32 xDimension 0
    SFFloat xSpacing 0.0
    SFInt32 zDimension 0
    SFInt32 zSpacing 0.0
}
```

Το πεδίο `height` παίρνει σαν τιμές σύνολα αριθμών κινητής υποδιαστολής, που αντιπροσωπεύουν ύψη (δηλαδή συντεταγμένες κατά μήκος του y άξονα). Τα ύψη αυτά αναφέρονται στα σημεία ενός πλέγματος στο xz επίπεδο. Τα χαρακτηριστικά του πλέγματος του `ElevationGrid` καθορίζονται μέσω των πεδίων του `xDimension`, `zDimension`, `xSpacing` και `zSpacing`. Πιο συγκεκριμένα, τα `xDimension` και `zDimension` ορίζουν τα πλήθη των σημείων κατά μήκος των x και z αξόνων, αντίστοιχα (τις γραμμές και τις στήλες του πλέγματος, με άλλα λόγια). Τα σημεία αυτά πρέπει να είναι διατεταγμένα ομοιόμορφα σε κάθε άξονα. Η απόσταση μεταξύ τους δίνεται μέσω του πεδίου `xSpacing`, για τον άξονα x και `zSpacing` για τον άξονα z . Η σειρά, με την οποία δίνουμε τα ύψη των σημείων στο πεδίο `height`, θεωρεί σαν πρώτο το μακρύτερο αριστερό και σαν τελευταίο το εγγύτερο δεξί σημείο, καθώς κοιτάμε τον κόσμο με τη φορά του $-z$ άξονα. Το Boolean πεδίο, αν είναι αληθές (που είναι και η προκαθορισμένη του

τιμή), δεν μας επιτρέπει να δούμε το σχήμα, που σχεδιάζει το ElevationGrid, κοιτώντας από κάτω. Αν θέλουμε να έχουμε αυτή τη δυνατότητα, πρέπει να θέσουμε το solid TRUE.

Ένας γεωμετρικός κόμβος αρκετά διαφορετικός από όλους τους υπόλοιπους της κατηγορίας του είναι, αναμφισβήτητα, ο Extrusion. Ο κόμβος αυτός δεν περιλαμβανόταν στην αρχική έκδοση της γλώσσας, τη VRML 1.0, αλλά αποτελεί προσθήκη της VRML 2.0. Η προσέγγιση, που ακολουθεί στη δημιουργία των σχημάτων του, είναι αρκετά ασυνήθιστη, αλλά με μεγάλες δυνατότητες. Ξεκινώντας από μια διδιάστατη τομή, την επεκτείνει στις τρεις διαστάσεις, προεκτείνοντάς την κατά μήκος μιας προκαθορισμένης διαδρομής, που καλείται ράχη (spine). Σε κάθε σημείο της διαδρομής, η αρχική τομή μπορεί να συρρικνωθεί ή να διασταλεί, ακόμα και να περιστραφεί. Όλες αυτές οι δυνατότητες υλοποιούνται, μέσω των πεδίων του Extrusion, που παραθέτουμε ευθύς αμέσως.

```
Extrusion{
    SFBool   beginCap   TRUE
    MFVec2f  crossSection []
    SFBool   endCap     TRUE
    MFVec2f  scale      1 1
    SFBool   solid      TRUE
    MFVec3f  spine      []
    MFRotation  orientation 0 0 1 0
}
```

Η διδιάστατη τομή περιγράφεται με τη βοήθεια του πεδίου crossSection το οποίο δέχεται σαν τιμή μια λίστα διδιάστατων σημείων. Τα σημεία στη λίστα αυτή πρέπει να δοθούν με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού (anticlockwise order). Επίσης, το αρχικό σημείο της λίστας πρέπει να το επαναλάβουμε στο τέλος της, αν θέλουμε η τομή μας να είναι κλειστή. Το μονοπάτι, πάνω στο οποίο επεκτείνουμε την παραπάνω τομή προσδιορίζεται μέσω του πεδίου spine. Η εκάστοτε τιμή του πεδίου αυτού έχει τη μορφή μιας λίστας τρισδιάστατων συντεταγμένων. Οι συντεταγμένες αυτές μας δίνουν τα σημεία που καθορίζουν τη ραχοκοκαλιά (spine) του σχήματος, που περιγράφει ο Extrusion. Με τη βοήθεια του πεδίου scale μπορούμε να καθορίσουμε για κάθε τέτοιο σημείο και από δύο συντελεστές κλίμακας, που ελέγχουν τη μεγέθυνση ή τη σμίκρυνση των διαστάσεων της τομής κατά μήκος των x και z αξόνων. Το πεδίο solid έχει την ίδια σημασία και χρήση, που είχε και στους κόμβους IndexedFaceSet και ElevationGrid. Τα παρεμφερούς σημασίας επίσης Boolean πεδία beginCap και endCap ρυθμίζουν την ύπαρξη (TRUE default) ή όχι κλειστών οριακών επιφανειών (καλυμμάτων) στα άκρα του προκύπτοντος από την εφαρμογή του Extrusion σχήματος.

Υπάρχει και το πεδίο *orientation*, που, όπως φανερώνει το όνομά του, ορίζει μέσω των τιμών του περιστροφές της τομής στα διάφορα σημεία της ράχης, παρέχοντάς μας, έτσι, μεγαλύτερο έλεγχο στη διαμόρφωση του τελικού σχήματος. Στην περίπτωση που η λίστα των περιστροφών έχει λιγότερα στοιχεία από τη λίστα των σημείων του *spline*, τότε στα υπεράριθμα σημεία θα ανατεθεί η τελευταία διαθέσιμη περιστροφή.

9.4.10 Έλεγχος της Εμφάνισης των Σχημάτων

Στις προηγούμενες τρεις παραγράφους, περιγράψαμε τους τρόπους δημιουργίας απλών και σύνθετων σχημάτων, με τη χρήση των κόμβων, που μπορούν να εμφανιστούν σαν τιμές του πεδίου *geometry* ενός κόμβου *Shape*. Τώρα, θα στρέψουμε την προσοχή μας στο πεδίο *appearance* του *Shape*. Μέσω του πεδίου αυτού, έχουμε τη δυνατότητα να διαμορφώσουμε, σε μεγάλο βαθμό, θεμελιώδη χαρακτηριστικά του σχήματος, στο οποίο αναφέρεται το *Shape*, όπως είναι το χρώμα, η υφή και η διαφάνεια.

Το πεδίο *appearance* δέχεται σαν τιμή έναν κόμβο *Appearance* (αξίζει να δοθεί μεγάλη προσοχή στον διαφορετικό τρόπο γραφής). Ο κόμβος αυτός, με τη σειρά του, έχει δυο πεδία, το *material* και το *texture*.

Εκτός από πεδίο *material*, στη VRML υπάρχει και ο κόμβος με το ίδιο όνομα και ελαφρά διαφορετική γραφή, *Material*. Ο κόμβος αυτός εμφανίζεται σαν τιμή στο ομώνυμο πεδίο και καθορίζει το χρώμα, την ανακλαστικότητα και τη διαφάνεια του γεωμετρικού σχήματος, με το οποίο σχετίζεται. Έχει έξι συνολικά πεδία, τα *diffuseColor*, *specularColor*, *emissiveColor*, *ambientIntensity*, *shininess* και *transparency*.

Από αυτά, τα τρία πρώτα λαμβάνουν τρία ορίσματα το καθένα (RGB τιμές). Τα ορίσματα αυτά καθορίζουν με τρόπο μοναδικό ένα χρώμα, ρυθμίζοντας την κόκκινη, πράσινη και μπλε συνιστώσα του. Οι τιμές των ορισμάτων αυτών μπορούν να κυμαίνονται μεταξύ του μηδενός και της μονάδας. Έτσι, για παράδειγμα, το κόκκινο ορίζεται σαν 1 0 0, το λευκό σαν 1 1 1, το γκρι 0.5 0.5 0.5 κ.ο.κ. Το πεδίο *diffuseColor* αναφέρεται στο κανονικό χρώμα του αντικειμένου, που προσδιορίζουμε. Το *specularColor* μας δίνει την απόχρωση των νησίδων λάμπης (*highlights*), στην περίπτωση που το αντικείμενο είναι γυαλιστερό. Τέλος το *emissiveColor* έχει να κάνει με το χρώμα του φωτός που, ενδεχομένως, εκπέμπει πρωτογενώς το εν λόγω αντικείμενο.

Τα υπόλοιπα τρία πεδία του κόμβου *Material*, δηλαδή τα *ambientIntensity*, *shininess* και *transparency*, χαρακτηρίζονται από ένα μόνο όρισμα με πεδίο τιμών το [0,1]. Το όρισμα αυτό, στην περίπτωση του *ambientIntensity*, μας πληροφορεί για το ποσοστό του περιβάλλοντος φωτισμού, που επανεκπέμπει (αυτή τη φορά δευτερογενώς) το προσδιοριζόμενο αντικείμενο. Αντίστοιχα, στα πεδία *shininess* και *transparency*, όπως υποδηλώνουν και οι ονομασίες τους, τα ορίσματά τους μας δίνουν την ανακλαστικότητα και τη διαφάνεια των αντικειμένων, που χαρακτηρίζουν.

Μια επιπρόσθετη δυνατότητα, που παρέχει η VRML, είναι η ανάθεση εικόνων με τη μορφή υφάνσεων (*textures*) πάνω στις επιφάνειες των

αντικειμένων των κόσμων της. Για να αξιοποιήσουμε την πολύ χρήσιμη αυτή δυνατότητα, πρέπει να συμπεριλάβουμε σαν τιμή στο πεδίο `texture` του κόμβου `Appearance`, κάποιον από τους κόμβους ύφανσης (`texture nodes`). Υπάρχουν τρεις τέτοιοι κόμβοι, ο `ImageTexture`, ο `MovieTexture` και ο `PixelTexture`.

Ο `ImageTexture` προβάλλει μια στατική εικόνα στην επιφάνεια ενός αντικειμένου. Η εικόνα, που θα προβληθεί, καθορίζεται μέσω της αλφαριθμητικής (`string`) τιμής του πεδίου `url` του κόμβου και μπορεί να είναι τύπου `JPEG` (`Joint Photographic Experts Group`) ή `PNG` (`Portable Network Graphics`). Έχουμε τη δυνατότητα, αν το επιθυμούμε, να καθορίσουμε περισσότερες από μια εικόνες, οπότε ο `browser` θα χρησιμοποιήσει την πρώτη από αυτές, που θα καταφέρει να εντοπίσει. Ο κόμβος `ImageTexture` έχει άλλα δυο πεδία, `Boolean` αυτή τη φορά, τα `repeats` και `repeat`. Τα πεδία αυτά ελέγχουν, αν η εικόνα, που προβάλλουμε σαν υφή, επαναλαμβάνεται ή όχι, στην οριζόντια (`S`) και στην κάθετη (`T`) διεύθυνση. Οι προκαθορισμένες τιμές των πεδίων αυτών είναι `TRUE`.

Ο `MovieTexture` μοιάζει με τον `ImageTexture`, με τη διαφορά ότι, αντί για στατική εικόνα, προβάλλει πάνω στην επιφάνεια ενός αντικειμένου, μια ταινία τύπου `MPEG-1`. Διαθέτει τα πεδία, που έχει και ο `ImageTexture`, αλλά και μερικά επιπρόσθετα, όπως τα `speed`, `loop`, `startTime` και `stopTime`. Από αυτά, το `speed` ρυθμίζει την ταχύτητα προβολής της ταινίας, το `loop` την επαναπροβολή ή όχι της ταινίας κάθε φορά που ολοκληρώνεται, ενώ τα `startTime` και `stopTime` περιέχουν τους χρόνους έναρξης και λήξης της προβολής της ταινίας σε δευτερόλεπτα, από την 1η Ιανουαρίου του 1970.

Αν θέλουμε να αποφύγουμε το κόστος της φόρτωσης ενός αρχείου εικόνας ή ταινίας, μπορούμε να συμπεριλάβουμε τις υφάνσεις απευθείας σε ένα `VRML` αρχείο, κάνοντας χρήση του κόμβου `PixelTexture`. Ο κόμβος αυτός, αντί για πεδίο `url`, έχει ένα πεδίο `image`. Τα ορίσματα του πεδίου αυτού μας πληροφορούν για το εύρος και το ύψος της εικόνας υφής, το πλήθος των συνιστωσών, που χαρακτηρίζουν το χρώμα και τη διαφάνεια καθενός στοιχείου της και, φυσικά, την πλήρη λίστα των συνιστωσών για όλα τα στοιχεία της (`pixels`), όπου η κάθε συνιστώσα δίνεται με τη μορφή ενός δεκαεξαδικού αριθμού.

9.4.11 Κόμβοι Ομαδοποίησης

Η ιεραρχική δόμηση ενός κόσμου, με τον τρόπο που προβλέπει ο γράφος σκηνών του, λαμβάνει χώρα στην πράξη με τη χρήση των κόμβων ομαδοποίησης (`grouping nodes`). Οι κόμβοι αυτοί επιτυγχάνουν την οργάνωση σε σύνολα των υπολοίπων κόμβων του κόσμου, περιλαμβάνοντάς τους σαν απογόνους, μέσω των διαφόρων πεδίων τους (κυρίως, βέβαια, του `children`).

Ο πιο απλός κόμβος ομαδοποίησης είναι ο `Group`. Έχει ένα μόνο πεδίο το `children`, το οποίο λαμβάνει σαν τιμές ένα σύνολο κόμβων, που θα αποτελέσουν τους απογόνους του `Group`. Ο κόμβος `Group`, όπως είναι προφανές, είναι από τους περισσότερο χρησιμοποιούμενους κόμβους στη `VRML`.

Ένας άλλος κόμβος ομαδοποίησης είναι ο `Inline`. Ο κόμβος αυτός επιτελεί στη VRML λειτουργία αντίστοιχη με αυτή της εντολής `include` στη C. Κάνοντας χρήση του `Inline`, μπορούμε να συμπεριλάβουμε στον κόσμο μας κόμβους, που οι ορισμοί τους περιέχονται σε ένα άλλο αρχείο, το όνομα του οποίου αποτελεί την τιμή του πεδίου `url` του `Inline`. Το εξωτερικό αυτό αρχείο θα πρέπει να αποτελεί έναν αυτοτελή VRML κόσμο, ικανό να απεικονιστεί μόνος του από ένα browser.

Εξαιρετικά χρήσιμος είναι και ο κόμβος `Anchor`. Ο `Anchor` ομαδοποιεί τους απογόνους του, όπως και ο `Group`, αλλά, επιπλέον, τους μετατρέπει και σε ένα είδος τρισδιάστατου κουμπιού. Έτσι, μόλις επιλεγεί με το ποντίκι κάποιο από τα αντικείμενα, που σχεδιάζουν τα τέκνα του `Anchor`, το αποτέλεσμα είναι ο browser να οδηγηθεί σε μια νέα σελίδα. Η σελίδα αυτή, που μπορεί να είναι μια HTML σελίδα, ή ένας άλλος VRML κόσμος, καθορίζεται μέσω του πεδίου `url` του `Anchor`.

Όπως βλέπουμε, ο `Anchor` αποτελεί το τρισδιάστατο ισοδύναμο της ετικέτας `<A>` της HTML (HyperText Markup Language). Εκτός από τα πεδία `children` και `url`, ο `Anchor` έχει και μερικά ακόμα πεδία. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τα `description` και `parameter`, που παρέχουν στο browser πληροφορίες για τη σελίδα, με την οποία θα συνδεθούμε, καθώς και τα `bboxCenter` και `bboxSize`, που ορίζουν έναν αόρατο κύβο, που περικλείει τους σχεδιαζόμενους κόμβους και αξιοποιείται στην επιτάχυνση των υπολογισμών επαφής ή όχι του κέρσρα με τα περικλειόμενα αντικείμενα.

9.4.12 Κόμβοι Μετασχηματισμών

Όλα τα σχήματα στη VRML δημιουργούνται εκ προοιμίου, με ένα ενσωματωμένο σύστημα συντεταγμένων. Στο σημείο αυτό αξίζει τον κόπο να κάνουμε μια μικρή παρένθεση και να αναφέρουμε ορισμένα στοιχεία για τους άξονες συντεταγμένων στη VRML. Με τον τρόπο αυτό, θα γίνουν πιο εύκολα κατανοητά τα όσα θα αναφέρουμε στη συνέχεια.

Καταρχήν, πρέπει να ξεκαθαρίσουμε πως, όλες οι αποστάσεις στη VRML μετρούνται σε μέτρα, ενώ όλες οι γωνίες της σε ακτίνια (radians). Τα συστήματα συντεταγμένων της γλώσσας είναι καρτεσιανά.

Ο άξονας x είναι οριζόντιος, ο y κατακόρυφος, ενώ ο άξονας z είναι κάθετος στην οθόνη και έχει φορά, που κατευθύνεται προς την πλευρά του θεατή. Η δυνατότητα επέμβασης και ελέγχου στο ενσωματωμένο σύστημα συντεταγμένων ενός σχήματος ή μιας ομάδας σχημάτων, μας προσφέρεται από τη VRML με τη μορφή του κόμβου (ομαδοποίησης) `Transform`.

Ο κόμβος αυτός μας επιτρέπει να τροποποιήσουμε το σύστημα συντεταγμένων των απογόνων κόμβων του, που περιέχονται στο πεδίο του `children`. Η τροποποίηση αυτή μπορεί να έχει τη μορφή μετατόπισης, περιστροφής, ή / και αλλαγής κλίμακας. Η μετατόπιση καθορίζεται με τη βοήθεια του πεδίου `translation`, το οποίο λαμβάνει τρεις τιμές, που αντιστοιχούν στις συνιστώσες της μετατόπισης κατά τους x , y , και z άξονες, αντίστοιχα. Το πεδίο, που αναφέρεται στην περιστροφή είναι το `rotation`. Οι τιμές του έχουν τη

μορφή τετράδων. Οι τρεις πρώτοι αριθμοί μιας τετράδας μας δίνουν τον άξονα, γύρω από τον οποίο λαμβάνει χώρα η περιστροφή, ενώ ο τελευταίος είναι η γωνία της περιστροφής εκφρασμένη σε ακτίνια.

Η αλλαγή κλίμακας περιγράφεται από το πεδίο scale. Το πεδίο αυτό χαρακτηρίζεται από τρία ορίσματα. Το κάθε όρισμα είναι και ένας συντελεστής, με τον οποίο θα πολλαπλασιαστούν όλες οι διαστάσεις των κόμβων απογόνων του Transform, σε μια από τις διευθύνσεις των αξόνων x , y και z . Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε πως η σειρά με την οποία εκτελούνται οι μετασχηματισμοί είναι η εξής: πρώτα η αλλαγή κλίμακας, στη συνέχεια η περιστροφή και, στο τέλος, η μετατόπιση.

Ένας ειδικός κόμβος ομαδοποίησης και μετασχηματισμού είναι Billboard. Ο μετασχηματισμός, που εφαρμόζει ο Billboard στους κόμβους, που εμφανίζονται σαν τιμές στο πεδίο του children, είναι η περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων τους, έτσι που ο τοπικός z άξονάς τους να κατευθύνεται πάντοτε προς την πλευρά του θεατή.

9.5 Εφαρμογές της VRML για την Οπτικοποίηση Αποτελεσμάτων Μοντελοποίησης Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας

Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα η παρουσίαση της εφαρμογής των εντολών, που περιγράφηκαν παραπάνω, σε εικονικούς κόσμους, που έχουν υλοποιηθεί, ιδίως για σκοπούς υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού. Υπάρχει ποικιλία στις εφαρμογές της VRML και αυτό είναι εμφανές στα ακόλουθα παραδείγματα.

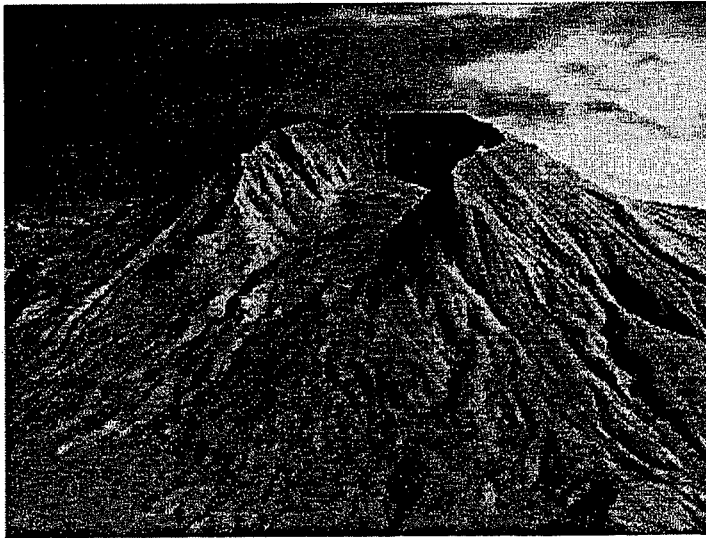
9.5.1 Ψηφιακά Μοντέλα Ανύψωσης (*Digital Elevation Models*)

Η δυνατότητα απεικόνισης διδιάστατων επιφανειών με μικροκυματικές διατάξεις είναι μια εφαρμογή των SAR (Synthetic Aperture Radar - Ραντάρ Συνθετικού Παραθύρου). Για την οπτικοποίηση της φωτιζόμενης επιφάνειας χρησιμοποιούνται σύνθετες τεχνικές ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Η εισαγωγή της τρίτης διάστασης στην εικόνα γίνεται με λήψη δύο διαφορετικών εικόνων και συνδυασμένη επεξεργασία, μια τεχνική που ονομάζεται ιντερφερομετρία (interferometry). Η τεχνική απαιτεί μεγάλη επεξεργαστική ισχύ και, στην πράξη, χρησιμοποιείται παραλληλισμός των διεργασιών. Η τελική έξοδος του συστήματος είναι μια τρισδιάστατη απεικόνιση του γήινου ανάγλυφου, που λέγεται DEM. Χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογών της τεχνικής αυτής φαίνονται στα σχήματα της παραγράφου αυτής, σε μορφή κόσμων της VRML, των οποίων τη δημιουργία αναλαμβάνουν αυτοματοποιημένες εντολές ειδικών λογισμικών.



Σχήμα 9.4: Απεικόνιση του ανάγλυφου ενός υψώματος στο βυθό του Ειρηνικού Ωκεανού. (Πηγή: 3DEM VRML Worlds {<http://www.visualizationsoftware.com/3dem/gallery.html>})

Στο Σχήμα 9.4 φαίνεται ένα τμήμα του βυθού του Ειρηνικού Ωκεανού, όπως λαμβάνεται με βαθυμετρία. Η επεξεργασία σήματος επιστροφής radar μέσω υπολογιστικών μεθόδων καθορίζει ένα πλέγμα σημείων, που συνθέτουν το ανάγλυφο. Στη συνέχεια, η εικόνα επικαλύπτεται από μια εικόνα υφής (texture) για την απόδοση των λεπτομερειών, χρησιμοποιώντας, έτσι, την αντίστοιχη δυνατότητα απόδοσης υφής στη VRML.

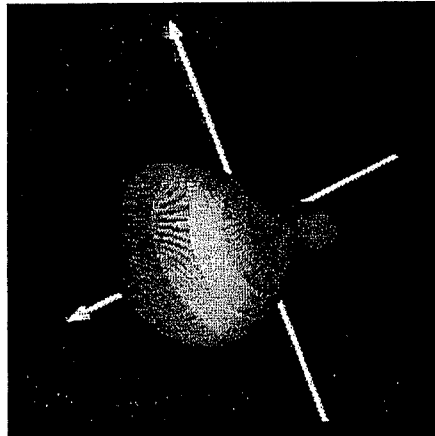


Σχήμα 9.5: Τμήμα της απεικόνισης του όρους Αγ. Ελένης. (Πηγή: 3DEM VRML Worlds {<http://www.visualizationsoftware.com/3dem/gallery.html>})

Στο Σχήμα 9.5 φαίνεται ένα αντίστοιχο DEM, χωρίς το αρχείο υψής. Είναι εμφανές το πλέγμα των σημείων, που βρέθηκαν με την επεξεργασία των σημάτων radar. Τον καθορισμό αυτών των σημείων τον αναλαμβάνουν, φυσικά, αυτοματοποιημένοι υπολογισμοί.

9.5.2 Διαγράμματα Ακτινοβολίας

Για την οπτικοποίηση των πεδιακών μεγεθών, η VRML εμφανίζει μεγάλες δυνατότητες. Ο κατάλληλος προγραμματισμός επιτυγχάνει πολύ καλές απεικονίσεις, όπως είναι αυτή του Σχήματος 9.6.



Σχήμα 9.6: Τρισδιάστατο διάγραμμα ακτινοβολίας σύμμορφης κυλινδρικής στοιχειοκεραίας. (Πηγή: Εργαστήριο Μικροκυμάτων και Οπτικών Ινών, Ε.Μ.Πολυτεχνείο)

Για την παραγωγή του Σχήματος 9.6 έγινε εφαρμογή μεθόδων υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού για την εύρεση της μορφής του διαγράμματος ακτινοβολίας μιας γραμμικής στοιχειοκεραίας και, παράλληλα, σχεδιάστηκε η οπτικοποίηση της λύσης στη VRML. Είναι προφανής ο βελτιωμένος τρόπος απεικόνισης, σε σχέση με τη γνωστή δισδιάστατη απεικόνιση στα κάθετα επίπεδα.

9.6 Τεχνικές Στερεοσκοπικής Οπτικοποίησης (Stereoscopic Visualization) για την Τρισδιάστατη Απεικόνιση Κατανομών του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

Οι τεχνικές στερεοσκοπικής οπτικοποίησης επιχειρούν να δώσουν στο θεατή την αίσθηση του βάθους μιας εικόνας με τρισδιάστατο περιεχόμενο, που σχεδιάζεται στην επίπεδη οθόνη ενός υπολογιστή. Οι τεχνικές αυτές είναι μείζονος σημασίας για την ορθή αντίληψη σύνθετων μορφών και δομών στο χώρο, όπως είναι οι κατανομές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Για να επιτύχουν το στόχο τους, οι εν λόγω τεχνικές τροφοδοτούν το κάθε μάτι του θεατή με μια ελαφρώς διαφορετική εικόνα, χρησιμοποιώντας συνήθως κατάλληλα για το σκοπό αυτό γυαλιά.

9.6.1 Εφαρμογή του Ανοικτού ΚυβερνοΟλογραφικού (CyberHolographic) Προτύπου για Στερεοσκοπική Οπτικοποίηση

Το Ανοικτό ΚυβερνοΟλογραφικό Πρότυπο (Open CyberHolographic Standard) είναι ένα σύνολο κανόνων στη χρήση χρωμάτων, που πρέπει να ακολουθεί όποιος επιθυμεί να αξιοποιήσει την Τρισδιάστατη Διαδικασία Χρωματικού

Βάθους (ChromaDepth) για την παραγωγή στερεοσκοπικών εικόνων, που καλούνται ΚυβερνοΟλογράμματα (CyberHolograms).

Μια κανονική εικόνα στην οθόνη ενός υπολογιστή ή πάνω σε ένα φύλλο χαρτιού είναι διδιάστατη. Αυτό σημαίνει πως, μπορούμε να αναφερθούμε σε οποιοδήποτε σημείο πάνω στην επιφάνειά της, με τη βοήθεια των x και y συντεταγμένων του. Μια τρισδιάστατη εικόνα έχει μια επιπλέον διάσταση, τη z . Αναφερόμενοι στην οθόνη του υπολογιστή, μπορούμε να πούμε πως, η τεταγμένη x μας δίνει την οριζόντια θέση ενός σημείου, η τεταγμένη y την κατακόρυφη, ενώ το ύψος z τη θέση του σημείου μέσα ή έξω από την οθόνη, δηλαδή την απόστασή του από τον παρατηρητή.

Η απόδοση αυτής της επιπλέον διάστασης σε μια εικόνα δεν είναι απλή υπόθεση. Συνήθως, απαιτούνται δύο εικόνες από ελαφρά διαφορετικές γωνίες, αλλά η χρήση δύο εικόνων έχει σαν αποτέλεσμα το διπλασιασμό του κόστους αποθήκευσης, αλλά και του υπολογιστικού χρόνου επεξεργασίας. Η Τρισδιάστατη Διαδικασία Χρωματικού Βάθους (ChromaDepth3D), με την οποία ασχολούμαστε σ' αυτή την παράγραφο, δεν στηρίζεται στη χρήση διπλών παραλλαγμένων εικόνων και, κατά συνέπεια, δεν υφίσταται τα μειονεκτήματα, που συνεπάγεται μια τέτοια διαδικασία.

Όπως φανερώνει και το όνομά της, η Τεχνολογία Χρωματικού Βάθους ακολουθεί μια αρκετά πιο αποδοτική προσέγγιση, χρησιμοποιώντας χρώμα για να μεταφέρει την πληροφορία της συντεταγμένης z . Την προσέγγιση αυτή μπορούμε να τη θεωρήσουμε, σαν μια μορφή κωδικοποίησης του βάθους με τη βοήθεια χρωμάτων. Στη συνέχεια, θα επιχειρήσουμε να δώσουμε κάποιες γενικές οδηγίες, που αφορούν τη σχεδίαση εικόνων με την τεχνική αυτή, εικόνων που αναδύουν μια έντονη στερεοσκοπική αίσθηση, όταν παρατηρούνται με τα ειδικά γυαλιά C3D και HoloPlay της εταιρείας Chromatek.

Η διαδικασία κωδικοποίησης της πληροφορίας του βάθους, μέσω της κατάλληλης χρήσης χρωμάτων, αναλύεται σε δύο στάδια. Το πρώτο στάδιο είναι επιλογή των χρωμάτων της εικόνας, σύμφωνα με το Ανοικτό ΚυβερνοΟλογραφικό Πρότυπο, ενώ το δεύτερο αναφέρεται στην παρουσίαση και την παρατήρηση της προκύπτουσας εικόνας με C3D ή HoloPlay γυαλιά.

Στη συνέχεια, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο πρώτο από τα παραπάνω στάδια, δηλαδή τον καθορισμό των χρωμάτων μιας εικόνας. Όπως θα δούμε, πρόκειται για μια σχετικά απλή διαδικασία, που η ενσωμάτωσή της στη φάση της δημιουργίας μιας εικόνας δεν είναι δύσκολη. Το πρώτο βήμα της διαδικασίας αυτής περιλαμβάνει την επιλογή μιας χρωματικής παλέτας. Υπάρχει πλήθος διαφορετικών χρωματικών παλετών για την παραγωγή των καλύτερων δυνατών ολογραφικών εφφέ με δεδομένο το χρώμα του φόντου. Από το πλήθος αυτό, ίσως η απλούστερη παλέττα με τα εντυπωσιακότερα αποτελέσματα είναι η RGB σε Μαύρο. Η ονομασία της συγκεκριμένης παλέτας προκύπτει από τα αρχικά των αγγλικών λέξεων Red, Green, Blue, δηλαδή Κόκκινο, Πράσινο, Μπλέ, που είναι και τα χρώματα, που χρησιμοποιεί η παλέττα αυτή πάνω σε ένα Μαύρο φόντο.

Στην Τρισδιάστατη Διαδικασία Χρωματικού Βάθους ChromaDepth 3D, είναι το χρώμα ενός στοιχείου της εικόνας, σε συνδυασμό με το χρωματισμό του

κοντινού περιβάλλοντός του, που καθορίζει το φαινομενικό του βάθος, όταν παρατηρούμε την εικόνα με τα γυαλιά της Chromatek. Επομένως, μια καλή στρατηγική είναι να διατηρούμε το χρώμα του υποβάθρου σταθερό γύρω από τα στοιχεία μιας εικόνας, έτσι που η z συνιστώσα τους να καθορίζεται μόνον από τα δικά τους χρώματα.

Η επιλογή του χρώματος του φόντου είναι ο σημαντικότερος παράγοντας στον καθορισμό των χρωμάτων, που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σε μια εικόνα για να πετύχουμε ΚυβερνοΟλογραφικά εφέ. Τα ευκολότερα και πιο συχνά χρησιμοποιούμενα χρώματα υποβάθρου είναι το μαύρο και το σκοτεινό μπλε. Η χρωματική παλέτα RGB είναι κατάλληλη και για τα δυο αυτά υποβάθρα. Αν αποφασίσουμε να χρησιμοποιήσουμε μπλε φόντο, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα πολύ καθαρό σκοτεινό μπλε. Η τρισδιάστατη ψευδαίσθηση δεν θα είναι η ίδια, αν χρησιμοποιήσουμε μπλε του ουρανού, μέσο μπλε, ή κάποιο άλλο ανοικτό μπλε.

Σε ένα μαύρο ή σκοτεινό μπλε φόντο, πρέπει να επιλέγουμε το κόκκινο χρώμα για τα αντικείμενα, που θέλουμε να δώσουμε την εντύπωση ότι βρίσκονται πιο κοντά στο θεατή, σκούρο μπλε για τα πιο μακρινά αντικείμενα και πράσινο για όσα απέχουν μια μέση απόσταση μεταξύ των δύο άκρων. Με τη χρήση των υπολοίπων χρωμάτων, μπορούμε να εντάξουμε αντικείμενα σε ενδιάμεσες των παραπάνω αναφερθέντων θέσεις, λαμβάνοντας υπόψη μας την τοποθέτηση του εκάστοτε χρώματος, που χρησιμοποιούμε στο ορατό φάσμα. Αυτό σημαίνει πως, μπορούμε να διατάξουμε τα στοιχεία μιας εικόνας από το υποβάθρο μέχρι το προσκήνιο της, αναθέτοντας τους διαδοχικά τα χρώματα σκούρο μπλε, κανονικό μπλε, πρασινογάλαζο, πράσινο, πρασινοκίτρινο, κίτρινο, πορτοκαλί και κόκκινο, καθώς πλησιάζουμε από το βάθος της εικόνας προς το θεατή.

Είναι προφανές ότι, ένας άπειρος αριθμός χρωμάτων είναι στη διάθεσή μας για τη διαμέριση του διαστήματος μεταξύ του μπλέ και του κόκκινου. Τις καμπυλωμένες επιφάνειες μπορούμε να τις αναπαραστήσουμε με μια ομαλή μετάβαση, από το ένα χρώμα στο αμέσως επόμενο του στο φάσμα. Δεν θα πρέπει να παραλείψουμε να ενσωματώσουμε και κάποιες μαύρες γραμμές και σχέδια πάνω στην επιφάνεια, για να διευκολύνουμε τον ορισμό του σχήματός της.

Ένα άλλο πολύ δημοφιλές χρωματικό μοντέλο, που είναι πολύ αποτελεσματικό πάνω σε ένα μαύρο φόντο, είναι το λεγόμενο Πατριωτικό (Patriot). Το ασυνήθιστο όνομά του οφείλεται στο γεγονός πως, τα βασικά του χρώματα είναι αυτά της αμερικανικής σημαίας, δηλαδή Κόκκινο-Λευκό-Μπλε.

Στην περίπτωση που επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σκοτεινό μπλε φόντο, είναι σημαντικό να ενσωματώσουμε κάποιου είδους μαύρο σχέδιο πάνω στο μπλε, έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η ένταξη του φόντου στο βάθος πεδίου. Χωρίς κάποια μαύρη μορφή, το μπλε φόντο φαίνεται σαν ένας απροσδιόριστος χώρος. Μοιάζει σαν να καταλαμβάνει μια ομιχλώδη περιοχή κάπου πίσω. Το μαύρο σχέδιο παρέχει ακμές, που ο εγκέφαλος αξιοποιεί, για να εντάξει τα επιμέρους τμήματα μιας σκηνής στον χώρο, ενισχύοντας, έτσι, την αίσθηση του φαινομενικού βάθους.

Μια εναλλακτική δυνατότητα επιλογής χρώματος για το υπόβαθρο είναι αυτή του Λευκού. Στην περίπτωση αυτή, η χρωματική παλέτα, που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την αναπαράσταση των αντικείμενων μιας εικόνας, είναι η συμπληρωματική εκείνης, που περιγράψαμε για χρήση με το μαύρο φόντο. Αυτό σημαίνει πως, για λευκό φόντο τα χρώματα-κλειδιά είναι τα Κυανό, Ματζέντα και Κίτρινο, για το λόγο αυτό και το συγκεκριμένο χρωματικό μοντέλο καλείται CMY (από τα αρχικά των αγγλικών λέξεων Cyan, Magenta, Yellow). Η συνάρτηση χρωματικής αντιστροφής σε πολλά προγράμματα γραφικής σχεδίασης μπορεί να μετατρέψει ένα κανονικό ΚυβερνοΟλόγραμμα μαύρου φόντου σε λευκού φόντου.

Πάντως, αν και, σύμφωνα με την ίδια την Chromatek, η χρήση του χρωματικού μοντέλου CMY σε Λευκό δίνει τρισδιάστατη ψευδαίσθηση, εξίσου έντονη με αυτήν του μοντέλου RGB σε Μαύρο, οι εικόνες που προκύπτουν, χρησιμοποιώντας το CMY ενδέχεται να μοιάζουν αφύσικες. Αντίθετα, χρωματική παλέτα RGB σε Μαύρο ακολουθεί το χρωματισμό της φύσης, αλλά και της παραδοσιακής καλλιτεχνικής σχεδίασης, γι' αυτό και τα αποτελέσματα, που παρέχει, είναι πιο ασφαλή. Φυσικά, τον τελευταίο λόγο, για κάποια συγκεκριμένη εικόνα, θα έχει πάντα ο δημιουργός της, που πρέπει να εξαντλήσει πειραματιζόμενος κάθε δυνατή επιλογή.

Βιβλιογραφία

- [1]. G. M. Nielson, "Visualization in Scientific Computing," IEEE Computer, vol. 22, no. 8, pp. 10-11, Aug. 1989.
- [2]. T. A. DeFanti, M. Brown and B. H. McCormick, "Visualization: Expanding Scientific and Engineering Research Opportunities," IEEE Computer, vol. 22, no. 8, pp. 12-21, Aug. 1989.
- [3]. L. J. Rosenblum, "Scientific Visualization at Research Laboratories," IEEE Computer, vol. 22, no. 8, pp. 68-101, Aug. 1989.
- [4]. A. E. Kaufman, "Visualization," IEEE Computer, vol. 27, no. 7, pp. 18-19, Jul. 1994.
- [5]. J. Schaeffer, "Electromagnetic Visualization: Understanding versus Solving at various levels," IEEE Potentials, vol. 19, no. 4, pp. 13-18, Oct./Nov. 2000.

Κεφάλαιο 10

Λογοκεντρικός Προγραμματισμός

10.1 Η Αναγκαιότητα του Λογοκεντρικού Προγραμματισμού

Οι σύγχρονοι κώδικες προσομοίωσης συστημάτων μετάδοσης πληροφορίας είναι, συνήθως, αρκετά περίπλοκοι και υπερβολικά μακροσκελείς και αποτελούν τους καρπούς προσπαθειών προγραμματιστικών ομάδων, τα μέλη των οποίων είναι δυνατό να συνεργάζονται ακόμα και από απόσταση. Είναι, επομένως, κάτι περισσότερο από προφανής η αναγκαιότητα επαρκούς τεκμηρίωσης, η οποία θα βοηθά τους προγραμματιστές στην ανάπτυξη, κατανόηση και συντήρηση μεγάλων τμημάτων κώδικα. Μια φορητή και αρκετά αποτελεσματική μεθοδολογία για την παραγωγή τεκμηρίωσης λογισμικού είναι η χρήση του μοντέλου του Λογοκεντρικού Προγραμματισμού (Literate Programming paradigm).

Πατέρας του Λογοκεντρικού Προγραμματισμού είναι ο D. E. Knuth, ο οποίος εισήγαγε την έννοια στα μέσα της δεκαετίας του 80, κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης της δεύτερης ανάπτυξης του TEX, στο Stanford [1]. Ο Λογοκεντρικός Προγραμματισμός αποτελεί ουσιαστικά μια τεχνική συγχώνευσης πηγαίου κώδικα και της τεκμηρίωσης που τον αφορά. Μέσω της ένωσης αυτής ο Λογοκεντρικός Προγραμματισμός επιτυγχάνει τη βελτίωση της αναγνωσιμότητας του πηγαίου κώδικα, αλλά και τον πλήρη συγχρονισμό με την τεκμηρίωσή του.

Η τεχνική του Λογοκεντρικού Προγραμματισμού αρχίζει να κερδίζει την αναγνώριση που της αξίζει ανάμεσα στους κύκλους των επαγγελματιών προγραμματιστών. Οι αρχές του είναι εξαιρετικά κατάλληλες για εφαρμογή κατά την ανάπτυξη ηλεκτρομαγνητικών προγραμμάτων.

10.2 Μια Σύντομη Γνωριμία με το FWEB

Ο Knuth, όχι μόνον πρότεινε το μοντέλο του Λογοκεντρικού Προγραμματισμού, αλλά προχώρησε και στην υλοποίησή του, με τη μορφή του WEB συστήματος δομημένης τεκμηρίωσης. Αυτό το αρχικό σύστημα ήταν κατάλληλο μόνο για τη γλώσσα Pascal, αλλά γρήγορα τροποποιήθηκε και προσαρμόστηκε και για άλλες προγραμματιστικές γλώσσες. Στην παράγραφο αυτή, θα αναφερθούμε σε μια από τις πλέον σύγχρονες και ανεπτυγμένες εκδοχές του WEB, που καλείται FWEB.

Δημιουργός του FWEB είναι ο John A. Krommes, από το Εργαστήριο Φυσικής Πλάσματος του Princeton. Αυτό το ευέλικτο σύστημα Λογοκεντρικού Προγραμματισμού αποτελεί τροποποίηση της έκδοσης 0.5 του CWEB του Silvio Levy και ενσωματώνει διάφορες ιδέες, που πηγάζουν από την έρευνα των Ramsey και Brigg (δημιουργών του Spider-WEB) γύρω από γλωσσικά ανεξάρτητους ιστούς (webs).

Το γράμμα “F” στην ονομασία του FWEB υποδηλώνει την προγραμματιστική γλώσσα και, όπως είναι αναμενόμενο, το σύστημα μπορεί να χειριστεί εξαιρετικά αποδοτικά κώδικες (τόσο F77, όσο και F90). Πάντως, αυτό που διαφοροποιεί το FWEB από τους ανταγωνιστές του είναι η ικανότητά του να χειρίζεται περισσότερες της μιας προγραμματιστικές γλώσσες, ακόμα και κατά τη διάρκεια μιας μόνον εκτέλεσής του. Εκτός από τη Fortran (που συνιστά την προεπιλεγμένη γλώσσα του FWEB), μπορεί, επίσης, να κατανοήσει τα συντακτικά των γλωσσών C, C++, Ratfor, και TEX. Έχει, επίσης, τη δυνατότητα να δουλέψει και ανεξαρτήτως γλώσσας, ώστε να χειριστεί οποιαδήποτε γλώσσα εμείς θέλουμε.

Τα λογοκεντρικά προγράμματα, που είναι γραμμένα σε FWEB, περιέχονται σε πηγαία αρχεία ιστού (web source files), που έχουν την ακολουθία χαρακτήρων .web σαν προέκτασή τους. Τα αρχεία αυτά συνιστούν τις εισόδους στους δύο επεξεργαστές του FWEB, FWEB και FWEB. Η προέλευση των ονομασιών αυτών έχει τη ρίζα της στους επεξεργαστές Tangle και Weave του αρχικού WEB του Knuth.

Αποστολή του FTANGLE αποτελεί η δημιουργία μεταγλωττίσιμοι πηγαίου κώδικα (.f, .c, ή .f90 αρχεία), ενώ το FWEAVE παράγει ένα TEX αρχείο, που περιέχει την τεκμηρίωση (documentation) του κώδικα αυτού. Το αρχείο ιστού (web file), που οι δύο αυτοί επεξεργαστές δέχονται σαν είσοδο, αποτελείται από κώδικα (πιθανώς σε περισσότερες από μια γλώσσες προγραμματισμού), εκτενή σχόλια σε αυτόν (σε LATEX) και FWEB εντολές. Οι εντολές αυτές οργανώνουν και διαχειρίζονται τον κώδικα και την τεκμηρίωσή του και παρέχουν εκτεταμένες δυνατότητες ελέγχου, τόσο του FTANGLE, όσο και του FWEAVE.

Η ύπαρξη μιας FWEB εντολής σηματοδοτείται από τον ενδείκτη (flag) “@”, που αποτελεί πάντα τον πρώτο χαρακτήρα του ονόματός της. Για παράδειγμα, το “@” ακολουθούμενο από το “n” ορίζει σαν γενική (global) γλώσσα τη Fortran. Η εντολή “@n9” κάνει το ίδιο για τη γλώσσα Fortran 90, ενώ υπάρχουν επίσης και οι δυνατότητες επιλογής των: “@c” για C, “@c++” για C++, “@r” για Ratfor,

“@r9” για Ratfor 90, “@x” για TEX και “@v” για κατάσταση λειτουργίας ανεξαρτήτως γλώσσας (language independent - verbatim mode).

Η δομή κάθε πηγαίου αρχείου FWEB είναι βασισμένη πάνω στις έννοιες των τμημάτων (sections) και των υπομονάδων (modules). Κάθε τμήμα αποτελεί και μια λογική υποδιαίρεση του σχολιασμένου κώδικα (για παράδειγμα μπορεί να είναι μια συνάρτηση ή ένα κομμάτι μιας συνάρτησης). Τα τμήματα (sections) διακρίνονται σε μείζονα (major) ή αλλιώς ονομαστικά (named) και σε ελάσσονα (minor) ή αλλιώς ανώνυμα (unnamed). Τα μείζονα τμήματα ξεκινούν με την εντολή “@*”. Ό,τι ακολουθεί μέχρι την πρώτη περίοδο συνιστά την ονομασία του τμήματος, η οποία εμπεριέχεται σε ένα αυτόματα δημιουργημένο πίνακα περιεχομένων, καθώς επίσης και στην κορυφή κάθε σελίδας που αποτελεί την έξοδο FWEAVE. Τα μείζονα τμήματα μπορούμε να τα οργανώσουμε ιεραρχικά. Με την εντολή “@*1” μπορούμε να ξεκινήσουμε ένα μείζον υποτμήμα (major subsection) ενός μείζονος τμήματος, ενώ ένα μείζον υπουποτμήμα (major subsubsection) αρχίζει πάντα με “@*2”. Ο τρόπος υποδηλώσεως της αρχής ενός ελάσσονος (ανώνυμου) τμήματος είναι η χρήση του κώδικα ελέγχου (control code) “@\”.

Κάθε τμήμα (μείζον ή έλασσον) αποτελείται από τρία μέρη, που είναι όλα τους προαιρετικά. Πρώτο είναι το TEX μέρος. Αυτό είναι το κομμάτι της τεκμηρίωσης του τμήματος, εκεί, δηλαδή, που ο προγραμματιστής θα τοποθετήσει σχόλια που αφορούν τα περιεχόμενα των κομματιών που ακολουθούν (και ιδιαιτέρως του τρίτου). Τα σχόλια αυτά μπορούν να έχουν τη μορφή απλού κειμένου ASCII, αλλά, όπως υποδηλώνει και το όνομα του κομματιού, συνήθη πρακτική αποτελεί η στοιχειοθεσία του σε TEX.

Μετά το TEX μέρος, ακολουθεί το κομμάτι των ορισμών (definitions part). Εδώ είναι, που ορίζουμε τις μακροεντολές (macros), που θα χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο και τελευταίο μέρος. Οι μακροεντολές αυτές είναι, ουσιαστικά, συντομογραφίες ομάδων εντολών του προγράμματος (code abbreviations) και, αν γίνει σωστή χρήση τους, είναι δυνατή η αύξηση της κατανοησιμότητας του κώδικα (code comprehensibility) σε μεγάλο βαθμό.

Το τρίτο και τελευταίο μέρος είναι το κομμάτι του κώδικα, και περιέχει τον πραγματικό κώδικα του τμήματος. Η έξοδος του FTANGLE για ένα συγκεκριμένο αρχείο ιστού συνίσταται, κατά το μεγαλύτερο μέρος της, από τα μέρη κώδικα των τμημάτων του αρχείου.

Τα μέρη αυτά μπορούμε να τα συνδυάσουμε σε μεγαλύτερα σύνολα, που τα καλούμε υπομονάδες (modules). Ο όρος αυτός στο περιβάλλον του FWEB έχει ένα εντελώς διαφορετικό νόημα από αυτό μιας υπομονάδος της Fortran 90 και θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί για να αποφύγουμε τη σύγχυση μεταξύ των δύο εννοιών (υπομονάδες FWEB και Fortran 90). Η υπομονάδα στο σύστημα FWEB είναι ένας συνδυασμός μερών κώδικα διαφορετικών (ίσως και μη συνεχόμενων) τμημάτων. Αυτός ο συνδυασμός είναι απλώς λογικής φύσεως για το FWEAVE, αλλά πραγματικός και απτός για το FTANGLE, η έξοδος του οποίου είναι οργανωμένη σε υπομονάδες.

Όπως ακριβώς και στα τμήματα, έτσι και στην περίπτωση των υπομονάδων υφίστανται δύο είδη τους: ονομαστικές και ανώνυμες. Υπάρχει ακριβώς μια ανώνυμη υπομονάδα (unnamed module), της οποίας η εισαγωγή γίνεται με τη χρήση της εντολής “@a”. Περαιτέρω εμφανίσεις του κώδικα ελέγχου “@a” απλώς προσαρτούν επιπλέον κώδικα στην αρχική ανώνυμη υπομονάδα. Η υπομονάδα αυτή αποτελεί τον πυρήνα, γύρω από τον οποίο οργανώνουμε τις υπόλοιπες υπομονάδες (τις ονομαστικές).

Κάθε φορά, που ορίζουμε μια ονομαστική υπομονάδα για πρώτη φορά, δίνουμε το όνομά της με τη μορφή ενός TEX αλφαριθμητικού, που περικλείεται μεταξύ των συμβόλων “@<” και “@>”. Μεταγενέστερες χρήσεις του ονόματος, οριοθετημένες από αυτούς τους χαρακτήρες ελέγχου, προσφύουν επιπρόσθετο κώδικα στην υπομονάδα. Για να αναφερθούμε σε μια ονομαστική υπομονάδα, αρκεί να δώσουμε το αλφαριθμητικό, που της έχει ανατεθεί, περικλειόμενο από “@<” και “@>” (χωρίς το σύμβολο της ισότητας αυτή τη φορά). Η αναφορά αυτή μπορεί να λάβει χώρα σε άλλες ονομαστικές υπομονάδες, ή ακόμα και στην ανώνυμη υπομονάδα, αλλά η αναδρομή (recursion) δεν είναι επιτρεπτή.

10.3 Απλό Παράδειγμα Λογοκεντρικού Κώδικα

Για να καταστήσουμε τη σύντομη αυτή παρουσίαση των χαρακτηριστικών του FWEB όσο το δυνατόν σαφέστερη, θα παραθέσουμε, στη συνέχεια, το προγαίο αρχείο ιστού ενός απλού προγράμματος, γραμμένου σε Fortran 90.

```
@z
Hello World program in Fortran 90
@x

@n9 [-n\&]
% Set FWEB language to Fortran 90,
%with free-form syntax
%and set the continuation character
%to be the ambersand.

\Title{Hello World}
% \Title is an FWEB TeX macro.
\author{Literate Programmer}
%\author is a LateX macro.

@* Hello world.
```

This code can be used to test the capability of a given human /software/hardware configuration to create literate Fortran 90 programs via the \FWEB\ system.

```
@m Greeting "Hello World!"

@a

program display_hello_world

    @<Print Greeting@>

end program display_hello_world

@*1 Issue the actual print statement.

@<Print Greeting@>=

    print *, Greeting

@* \INDEX.
```

Θα αναλύσουμε, ευθύς αμέσως, τη δομή και το περιεχόμενο του παραπάνω πηγαίου αρχείου.

Πρώτα απ' όλα, αν ένα αρχείο ιστού ξεκινά με την εντολή "@z" (όπως ακριβώς το HelloWorld.web), τότε οι επεξεργαστές του FWEB αγνοούν οτιδήποτε υπάρχει μέχρι και τη γραμμή, που ξεκινά στη στήλη 1 με "@x". Το χαρακτηριστικό αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να τοποθετήσουμε στην αρχή του πηγαίου αρχείου μας αόρατα στους επεξεργαστές του FWEB σχόλια για τον προγραμματιστή, την έκδοση του προγράμματος και άλλες παρόμοιες πληροφορίες. Στο υπόλοιπο αρχείο μας μπορούμε, επίσης, να ενσωματώσουμε σχόλια, μέσω της χρήσης του χαρακτήρα "%".

Υπάρχουν δύο μείζονα τμήματα και ένα ονομαστικό υποτίμημα σ' αυτό το αρχείο. Το πρώτο μείζον τμήμα το καλούμε Hello World. Αυτό το τμήμα

περιλαμβάνει ένα μέρος TEX με λίγες γραμμές σχολίων, ένα μέρος ορισμών με μια μακροεντολή και, φυσικά, ένα μέρος κώδικα. Το μέρος αυτό κώδικα συνιστά την ανώνυμη υπομονάδα του λογοκεντρικού προγράμματος. Στο εσωτερικό αυτής της υπομονάδας βρίσκεται η αναφορά στη μοναδική ονομαστική υπομονάδα του αρχείου, που την καλούμε "Print Greeting" και, που παραθέτουμε τον ορισμό της στο υποτήμα που ονομάζουμε "Issue the Actual Print Statement".

Στο κομμάτι ορισμών του τμήματος Hello World κάνουμε χρήση της εντολής "@m" για να ορίσουμε ως τη μακροεντολή Greeting την ακολουθία χαρακτήρων "Hello World!". Αυτό σημαίνει ότι, οπουδήποτε το FTANGLE συναντά τη λέξη Greeting σε ένα μέρος κώδικα, θα το αντικαθιστά με το αλφαριθμητικό "Hello World!".

Τελευταίο τμήμα του αρχείου ιστού HelloWorld είναι το Ευρετήριο (Index). Το ευρετήριο ενός λογοκεντρικού προγράμματος πάντοτε το ενεργοποιεί η εντολή "@* \INDEX.", που ξεκινά μια νέα σελίδα στοιχειοθετημένη σε δίστηλο στην υφασμένη (woven) έξοδο. Το FWEB παράγει και ταξινομεί αυτόματα το ευρετήριο και συμπεριλαμβάνει σ' αυτό παραπομπές, τόσο σε όλες τις μεταβλητές του προγράμματος, όσο και σε αντικείμενα, που επιλέγει ο ίδιος ο προγραμματιστής.

Για να δημιουργήσουμε μεταγλωττίσιμο πηγαίο κώδικα από ένα αρχείο ιστού, όπως το HelloWorld.web, πρέπει να το επεξεργαστούμε με το FTANGLE. Το αποτέλεσμα στην περίπτωση του HelloWorld.web είναι το ελεύθερης μορφής Fortran 90 πηγαίο αρχείο HelloWorld.f90, τα περιεχόμενα του οποίου είναι τα ακόλουθα:

```
! FTANGLE v1.61
!COMMAND LINE: "C:\TEXMF\MIKTEX\BIN\FTANGLE.EXE
!HelloWorld.web"
!RUN TIME: "Sunday, January 21, 2001 at 17:57."
!WEB FILE: "HelloWorld.web"
!CHANGE FILE: (none)
    !* 1: *
!line 24 "HelloWorld.web"
    program display_hello_world
!* 2: *
!line 34 "HelloWorld.web"
    print*, "Hello World!"
!* :2 *
!line 28 "HelloWorld.web"
```

```
end program display_hello_world
```

```
!* :1 *
```

Όπως μπορούμε να δούμε, η έξοδος του FTANGLE δεν είναι σχεδιασμένη για ανθρώπινη κατανόηση (για το σκοπό αυτό έχουμε το FWEAVE). Όμως, ένας συνήθης μεταγλωττιστής Fortran 90 είναι σε θέση να λειτουργήσει άψογα, με το αρχείο αυτό σαν είσοδο.

Οι πρώτες έξι γραμμές του HelloWorld.web είναι σχόλια, που το FTANGLE έχει εισαγάγει με σκοπό την παροχή πληροφοριών για την έκδοσή του, τη χρονική στιγμή εκτέλεσής του, το αρχείο ιστού το οποίο επεξεργάστηκε και άλλα παρόμοια στοιχεία. Μόλις το FTANGLE συναντήσει το πρώτο "@a", δίνει στην έξοδό του τον αριθμό της υπομονάδας σε μια γραμμή σχολίων (π.χ. !*1: *).

Η γραμμή, που ακολουθεί, είναι επίσης σχόλιο και δίνει τον αριθμό γραμμής εντολής, αλλά και την ονομασία του πηγαίου αρχείου ιστού (στο ανωτέρω παράδειγμα: !* 2: * !line 34 "HelloWorld.web"). Μετά το σχόλιο αυτό, το FTANGLE απλώς αντιγράφει τον κώδικα, όπως εμφανίζεται στο αρχείο ιστού, αντικαθιστώντας τις κλήσεις ονομαστικών υπομονάδων με τους ορισμούς τους. Πριν από κάθε αντικατάσταση, θα δώσει σαν έξοδο σε σχόλιο τον αριθμό γραμμής, με την οποία ξεκινά ο ορισμός της εκάστοτε υπομονάδας, στο πηγαίο αρχείο ιστού. Μόλις η αντικατάσταση ολοκληρωθεί, το FTANGLE εξάγει σε ένα ακόμα σχόλιο τον αριθμό της υπομονάδας τον ορισμό της οποίας εγκαταλείπει. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, μέχρι να αντιγραφεί όλος ο κώδικας και να αντικατασταθεί κάθε κλήση υπομονάδας από τον ορισμό της.

Οι προγραμματιστές δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να κάνουν επεμβάσεις στο αρχείο εξόδου του FTANGLE, γιατί οι μετατροπές τους αυτές θα χαθούν την επόμενη φορά που θα επεξεργαστούν με το FTANGLE το πηγαίο αρχείο ιστού, που χρησιμοποιούν. Όποιες αλλαγές επιθυμούν, πρέπει να τις κάνουν μέσω επεμβάσεων στο αντίστοιχο αρχείο ιστού. Μάλιστα, σε μια προσπάθεια να αποθαρρύνει τις τροποποιήσεις στα αρχεία εξόδου του, το FTANGLE επίτηδες αφαιρεί όλα τα περιττά κενά διαστήματα απ' αυτά.

Η εκτέλεση του FWEAVE με το πηγαίο αρχείο HelloWorld.web παράγει ένα LATEX αρχείο εισόδου, που το ονομάζει HelloWorld.tex. Με τη βοήθεια κατάλληλου LATEX λογισμικού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αρχείο αυτό για να παράγουμε .dvi, postscript, ή ακόμα και .pdf μορφές της υφασμένης εξόδου ενός λογοκεντρικού προγράμματος. Τα Σχήματα 10.1 έως 10.4 απεικονίζουν τις σελίδες της postscript μορφής.

Literate Fortran 90 Version of the Hello World Program	
Literate Programmer	
January 1, 1997	
Contents	
1	1
1 Hello world	1
1.1 Issue the actual print statement	1
2	2
INDEX	2

Σχήμα 10.1: Ο πίνακας περιεχομένων του προγράμματος Hello World.

```

§1-§1.1 [§1-§2] Hello World Issue the actual print statement 1

1 Hello world

This code can be used to test the capability of a given human/software/hardware configuration to create
Literate Fortran 90 programs via the FWEB system.
"HelloWorld.f90" ≡
@in Greeting "Hello World!"

program display_hello_world,
{Print Greeting 1.1}
end program display_hello_world.

1.1 Issue the actual print statement

{Print Greeting 1.1} ≡
print *, Greeting

This code is used in section 1.
    
```

Σχήμα 10.2: Ο κώδικας και τα συνοδευτικά σχόλια του προγράμματος Hello World.

```

2 INDEX                                Hello World  [2] [3]

2 INDEX

-- d --                                -- g --
display_hello_world: 1.                Greeting: 1.1.1.

```

Σχήμα 10.3: Το ευρετήριο (index) των μεταβλητών.

```

Hello World                            Names of the Modules  3

{Print Greeting 1.1} Used in section 1.

COMMAND LINE: "C:\TEXMF\MIKTEX\BIN\FWEAVE.EXE HelloWorld.web".
WEB FILE: "HelloWorld.web".
CHANGE FILE: (none).
GLOBAL LANGUAGE: FORTRAN-90.

```

Σχήμα 10.4: Ο κατάλογος των υπομονάδων (module) προγράμματος, καθώς και πληροφορίες για το σχετιζόμενο αρχείο ιστού.

Όπως είναι προφανές από τα Σχήματα 10.1 έως 10.4, η (κατάλληλα επεξεργασμένη για εκτύπωση) έξοδος του FWEAVE, αποτελείται από μια σελίδα τίτλου με αυτόματα δημιουργημένο πίνακα περιεχομένων, έναν κομψά τυπωμένο (pretty printed) κώδικα με σχολιασμό, ένα αυτόματα δημιουργημένο ευρετήριο (index) και έναν πίνακα των FWEB υπομονάδων.

Ο πίνακας περιεχομένων και το ευρετήριο καθιστούν απλή υπόθεση την πλοήγηση, ακόμα και σε ένα εξαιρετικά σύνθετο κώδικα και στην τεκμηρίωση, που τον συνοδεύει. Τα τμήματα τεκμηρίωσης είναι στοιχειοθετημένα σε LATEX, ένα χαρακτηριστικό που μας παρέχει μεγάλο έλεγχο πάνω στην εμφάνισή τους. Αλλά ακόμα και τα κομμάτια κώδικα είναι παρουσιασμένα με τάξη και κομψότητα. Το FWEAVE αυτόματα εισάγει στρατηγικά τοποθετημένα κενά και, επιπλέον, κάθετο άδειο χώρο, για να υπογραμμίσει τη θεμελιώδη δομή των αλγορίθμων, που υλοποιεί το λογοκεντρικό πρόγραμμα. Με σκοπό να καταστήσει τις δεσμευμένες λέξεις και τα ονόματα, που έχει δώσει ο προγραμματιστής σε μεταβλητές και συναρτήσεις ευδιάκριτα, το FWEAVE

στοιχειοθετεί τις πρώτες με έντονους χαρακτήρες (*boldface*), και τα δεύτερα με πλαγιαστούς χαρακτήρες (*italics*). Επιπλέον, αντικαθιστά όλους τους λογικούς (Boolean) και σχεσιακούς τελεστές με τα αντίστοιχα μαθηματικά τους σύμβολα. Έτσι, για παράδειγμα, οι τελεστές `.AND.` και `.OR.` αντικαθίστανται από τα σύμβολα \wedge και \vee αντίστοιχα, ενώ στη θέση των `.NE.` και `.GE.` θα βρούμε τα \neq και \geq , αντίστοιχα.

Όλα τα παραπάνω είναι γνωστά στους προγραμματιστικούς κύκλους με το όρο κομψή εκτύπωση (*pretty-printing*). Στόχο της κομψής εκτύπωσης αποτελεί η διαμόρφωση και ο τονισμός του πηγαίου κώδικα με αναγνώσιμο τρόπο. Στο σύστημα FWEB η ενεργοποίησή της είναι προκαθορισμένη επιλογή, για γλώσσες όπως οι Fortran και C. Πάντως, αν ο προγραμματιστής το επιθυμεί, είναι σε θέση να αναστείλει την κομψή εκτύπωση, είτε ενεργοποιώντας την `N` κατάσταση λειτουργίας (mode) με την εντολή `"@N"`, ή με τη χρήση της εικονικής γλώσσας `verbatim` (που επιλέγεται με `"@Lv"`).

Εκτός του πίνακα περιεχομένων και του ευρετηρίου, το FWEAVE (στην κατάσταση λειτουργίας κομψής εκτύπωσης) προσφέρει ένα ακόμα βοήθημα πλοήγησης κώδικα, με τη μορφή δεικτών διαναφοράς (*cross-reference subscripts*), που επισυνάπτει σε διάφορα είδη αναγνωριστών (*identifiers*), όπως τα ονόματα μεταβλητών. Στο τμήμα όπου λαμβάνει χώρα ο ορισμός μιας μεταβλητής, το όνομά της έχει μια έντονη τελεία (`*`) σαν δείκτη (όπως μπορεί να δει κάποιος στο όνομα `display_hello_world` του Σχήματος 10.2). Αν, μετά τον ορισμό, το σχετικό όνομα επανεμφανιστεί, θα έχει σαν δείκτη (υπογραμμισμένο) τον αριθμό του τμήματος, όπου έλαβε χώρα ο ορισμός.

Στον αρχειοκατάλογο (*directory*), όπου βρίσκεται το πηγαίο αρχείο ιστού, μπορούμε, επίσης, να διατηρούμε ένα προαιρετικό αρχείο τυπογραφικού ύφους (*style file*), που καλούμε `'fweb.sty'`. Μέσω της χρήσης αυτού του αρχείου, ο προγραμματιστής είναι σε θέση να προσαρμόσει στις απαιτήσεις του τη συμπεριφορά του FWEB. Η διανομή του FWEB συμπεριλαμβάνει ένα αρχείο δείγμα `'fweb.sty'`. Αποσχολιάζοντας (*uncommenting*) μερικές από τις γραμμές αυτού του αρχείου, είναι δυνατή η στοιχειοθέτηση της εξόδου του FWEAVE σε δύο στήλες και η εξοικονόμηση, με τον τρόπο αυτό, σημαντικού χώρου (ακόμα και 50% σε κάποιες περιπτώσεις).

Φυσικά, λόγω της αυξημένης πολυπλοκότητας του συστήματος FWEB, η εφαρμογή του δεν συνιστάται για μικρά προγράμματα, που προορίζονται για περιορισμένη χρήση. Αντιθέτως, ένας προγραμματιστής πρέπει να καταφεύγει στο λογοκεντρικό προγραμματισμό (μέσω του FWEB), μόνο για μεγάλους και σύνθετους κώδικες, που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν εκτενώς.

Ένα πιο εκτεταμένο παράδειγμα λογοκεντρικού κώδικα είναι αυτό, που παρουσιάζουμε στην επόμενη παράγραφο. Η παράγραφος αυτή περιέχει τον κώδικα μιας Fortran 90 υπομονάδας, που επεκτείνει τις δυνατότητες της γλώσσας, επιτρέποντας σ' ένα πρόγραμμα, που το χρησιμοποιεί, να χειρίζεται αριθμητικές πράξεις μεταξύ διανυσμάτων (*vectors*).

Για να ενσωματώσουμε τη λογοκεντρική έξοδο σε ένα LATEX έγγραφο, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το πακέτο `fwebinsert`, που αποτελεί τμήμα των

τελευταίων FWEB διανομών. Η χρήση του πακέτου αυτού είναι απαραίτητη, καθώς δεν αρκεί απλώς να κάνουμε `\input` την έξοδο του FWEB σε ένα LATEX αρχείο. Αυτό συμβαίνει γιατί, η έξοδος του FWEAVE είναι εκ προοιμίου σε κατάσταση αυτόνομης λειτουργίας (by default standalone mode) και επιχειρεί να εκτελέσει μια `\begin{document}` εντολή.

Αντίθετα, πρέπει να καταφύγουμε στη χρήση του πακέτου `fwebinsert` και της ειδικής εντολής εισόδου `\FWEBinput`, που δέχεται σαν όρισμα το όνομα του αρχείου, που συνιστά την έξοδο του FWEAVE (και όντως αυτό πράξαμε στον παρόν κεφαλαίο).

10.4 Υπομονάδα Αριθμητικής Διανυσμάτων

Αυτή η υπομονάδα, όταν χρησιμοποιείται από ένα πρόγραμμα, του δίνει τη δυνατότητα να χειρίζεται αριθμητικές πράξεις μεταξύ διανυσμάτων και μεταξύ διανυσμάτων και πραγματικών αριθμών. Ένας πολύ κομψός τρόπος για τη σχεδίαση και υλοποίηση μιας τέτοιας υπομονάδας είναι η υιοθέτηση των αντικειμενοστραφών χαρακτηριστικών της Fortran 90. Όπως συνέστησε και ο Carr στο άρθρο του με τίτλο "Using Fortran 90 and Object-Oriented Programming to Accelerate Code Development", (*IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 41, 6, December 1999, pp.85-90), χρησιμοποιούμε ένα αντικείμενο για να ενθυλακώσουμε, σε μια ενιαία οντότητα, το νέο τύπο δεδομένων, που μοντελοποιεί τα διανύσματα, μαζί με τις συναρτήσεις ποδρούν πάνω του. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά, ορίζουμε ένα νέο τύπο δεδομένων, που καλούμε `vec` και, στη συνέχεια, προδιαγράφουμε τις διαπροσωπείες (interfaces), διαμέσου των οποίων το αντικείμενο διάνυσμα αλληλεπιδρά με τον εξωτερικό κόσμο και, τελικά, παρέχουμε τις υπορουτίνες και τις συναρτήσεις, που υλοποιούν αυτές τις διαπροσωπείες.

"mvvec.f90" 10.4 ≡

```

module mvvec .
  implicit none
  { Vector Derived Type Definition 10.4.1 }
  { Interface Specification 10.4.2 }
  contains
  { Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 }
end module mvvec .

```

```
interface operator ( $\equiv$ )
  module procedure vec_equal
end interface

interface operator ( $\neq$ )
  module procedure vec_not_equal
end interface

interface abs
  module procedure abs_vec
end interface

interface operator (+)
  module procedure add_vec
end interface

interface operator (-)
  module procedure neg_vec, sub_vec
end interface

interface operator (*)
  module procedure real_times_vec
end interface

interface operator ( $\cdot \equiv \cdot \text{DOT} \cdot$ )
  module procedure vec_dot
end interface

interface operator ( $\times \equiv \cdot \text{EXT} \cdot$ )
  module procedure vec_ext
end interface
```

This code is used in section 10.4.

10.4.3 Υλοποίηση Υπορουτινών και Συναρτήσεων

10.4.3.1 Έλεγχος Ισότητας Δύο Διανυσμάτων

Αν και στη προγραμματιστική γλώσσα Ada, η δυνατότητα ελέγχου της ισότητας αντικειμένων είναι αυτόματα διαθέσιμη, χωρίς να είναι απαραίτητη η πρόνοια του προγραμματιστή, δυστυχώς κάτι τέτοιο δεν αληθεύει και στην περίπτωση της Fortran 90. Για να μετριάσουμε το πρόβλημα αυτό, υπερφορτώνουμε το σχεσιακό τελεστή ισότητας ($\cdot \text{eq} \cdot$ ή ==), συσχετίζοντας τον με τη συνάρτηση *vec_equal*, που ελέγχει, αν δύο διανύσματα είναι ίσα, συγκρίνοντας τις αντίστοιχες συνιστώσες τους.

{ Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 } ≡

```

function vec_equal_(p, q) result(equal)
  logical :: equal
  type (vec), intent (in) :: p, q
  equal = (p ⊗ x ≡ q ⊗ x) ∧ (p ⊗ y ≡ q ⊗ y) ∧ (p ⊗ z ≡ q ⊗ z)
end function vec_equal_

```

See also sections 10.4.3.2, 10.4.3.3, 10.4.3.4, 10.4.3.5, 10.4.3.6, 10.4.3.7, 10.4.3.8, and 10.4.3.9.

This code is used in section 10.4.

10.4.3.2 Έλεγχος Ανισότητας Μεταξύ Δύο Διανυσμάτων

Στην Ada, κάθε φορά που ο έλεγχος ισότητας είναι διαθέσιμος, το ίδιο συμβαίνει και με τον αντίστοιχο έλεγχο ανισότητας. Όμως στην Fortran 90, ο ορισμός ενός (νέου) νοήματος στον τελεστή == (ή το συνώνυμό του .eq.) δεν συνεπάγεται τίποτα απολύτως για τον τελεστή /= (ή το συνώνυμό του .ne.). Για το λόγο αυτό, υπερφορτώνουμε, επίσης, και το σχεσιακό τελεστή ανισότητας, συνδέοντας τον με τη συνάρτηση `vec_not_equal`. Η συνάρτηση αυτή προκύπτει από την `vec_equal`_{10.4.3.1}, με άρνηση.

{ Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 } +≡

```

function vec_not_equal_(p, q) result(not_equal)
  logical :: not_equal
  type (vec), intent (in) :: p, q
  not_equal = (p ⊗ x ≠ q ⊗ x) | (p ⊗ y ≠ q ⊗ y) | (p ⊗ z ≠ q ⊗ z)
end function vec_not_equal_

```

10.4.3.3 Πρόσθεση Δύο Διανυσμάτων

Η πράξη της πρόσθεσης ανάμεσα σε δύο διανύσματα λαμβάνει χώρα αθροίζοντας τις αντίστοιχες συνιστώσες τους. Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_x + q_x, p_y + q_y, p_z + q_z) \quad (10.2)$$

Η πράξη της πρόσθεσης είναι αντιμεταθετική.

10.4.1 Ορισμός Τύπου Δεδομένων

Ένα διάνυσμα μπορεί να οριστεί σαν ο συνδυασμός τριών πραγματικών αριθμών. Δηλαδή τα διανύσματα αποτελούν, κατά κάποιον τρόπο, μια γενίκευση των πραγματικών αριθμών στο \mathbb{R}^3 . Μπορούμε να γράψουμε

$$v = \hat{x}v_x + \hat{y}v_y + \hat{z}v_z \quad (10.28)$$

Για να είμαστε σε θέση να χειριστούμε διανυσματικές μεταβλητές σε ένα κώδικα Fortran, δημιουργούμε ένα νέο τύπο δεδομένων που καλείται *vec*. Αυτός ο νέος τύπος έχει τρεις συνιστώσες, που καλούμε *x*, *y* και *z*, αντίστοιχα. Κάθε συνιστώσα είναι και ένας πραγματικός αριθμός διπλής ακρίβειας (*double precision real number*). Για να αναφερθούμε σε μια συγκεκριμένη συνιστώσα μιας διανυσματικής μεταβλητής, πρέπει να δώσουμε το όνομα της μεταβλητής, ακολουθούμενο από το ποσοστιαίο (*%)* σύμβολο (επιλογέας συνιστώσας) και την ονομασία της συνιστώσας (π.χ. *v % x*).

{ Vector Derived Type Definition 10.4.1 } ≡

```
type vec
  double precision :: x, y, z
end type vec
```

This code is used in section 10.4.

10.4.2 Προδιαγραφή Διαπροσωπείας

Μπορούμε να ορίσουμε ένα μεγάλο αριθμό πράξεων στα διανύσματα. Κάποιες από αυτές, όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση, αποτελούν άμεσες γενικεύσεις των αντίστοιχων πράξεων στους πραγματικούς αριθμούς. Άλλες, όπως η απόλυτη τιμή, προκύπτουν από τις αντίστοιχες πράξεις στη μιγαδική άλγεβρα. Τέλος, υπάρχουν και εκείνες, όπως το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο, που, συνήθως, ορίζονται μόνο σε χώρους πολλαπλών διαστάσεων.

Σε μια προσπάθεια να καταστήσουμε τη χρήση των διανυσμάτων σε ένα Fortran 90 πρόγραμμα όσο πιο εύκολη γίνεται, θα αξιοποιήσουμε τις δυνατότητες υπερφόρτωσης (*overloading*) της γλώσσας. Αυτό σημαίνει ότι, θα επεκτείνουμε τις χρήσεις των εγγενών (*intrinsic*) τελεστών και συναρτήσεων, προσθέτοντάς τους νέα περιεχόμενα, έτσι ώστε να μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε και για το χειρισμό διανυσμάτων. Όπως είναι προφανές από τις ακόλουθες δηλώσεις διαπροσωπειών (*interface statements*), υπερφορτώνουμε τον τελεστή ανάθεσης (*=*), τους σχεσιακούς τελεστές της πρόσθεσης (*+*), της αφαίρεσης (*-*) και του πολλαπλασιασμού (***). Επίσης, υπερφορτώνουμε τον εγγενή τελεστή απόλυτου τιμής *abs*.

Τέλος, συνθέτουμε δύο νέους τελεστές, για τον υπολογισμό του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Σύμφωνα με το συντακτικό της

Fortran 90, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ειδικούς χαρακτήρες για το συμβολισμό εισαγόμενων από τον προγραμματιστή τελεστών (programmer defined operators). Για τον σκοπό αυτό, οφείλουμε να επιλέγουμε ακολουθίες, που συντίθενται από 1 έως 31 λατινικούς χαρακτήρες, τους οποίους πρέπει να περικλείσουμε μεταξύ δύο τελειών. Έτσι, συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο με `.dot.`, ενώ η `.ext.` ακολουθία υποδηλώνει το εξωτερικό διανυσματικό γινόμενο.

Το σύστημα λογοκεντρικού προγραμματισμού FWEB μας δίνει τη δυνατότητα να ελέγξουμε την εμφάνιση των τελεστών αυτών στα κείμενα τεκμηρίωσης του πηγαίου κώδικα, που τους χρησιμοποιεί (όπως το παρόν). Μπορούμε να μεταβάλλουμε τον τρόπο εμφάνισής τους, μέσω του κώδικα ελέγχου `@v`, στο τμήμα ορισμών του αντίστοιχου λογοκεντρικού αρχείου. Το συντακτικό αυτής της εντολής μπορούμε να το δούμε στις ακόλουθες, όπου ζητούμε από το FWAVE να απεικονίζει τους δύο νέους τελεστές `.dot.` και `.ext.` με τα LATEX σύμβολα και \times , αντίστοιχα.

```
"pvecfg1.f90" 04.2 ≡
  @v .DOT. " \cdot " .DOT.
  @v .EXT. " \times " .EXT.
```

```
{Interface Specification 04.2} ≡
```

{ Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 } +≡

```

function add_vec•(p, q) result(sumv)
  type (vec) :: sumv
  type (vec), intent (in) :: p, q

  sumv = vec(p % x + q % x, p % y + q % y, p % z + q % z)
end function add_vec•

```

10.4.3.4 Αφαίρεση Δύο Διανυσμάτων

Όπως και στην πρόσθεση, έτσι και η διανυσματική αφαίρεση λαμβάνει χώρα κατά συνιστώσες (componet-wise). Συνεπώς έχουμε

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} = (p_x - q_x, p_y - q_y, p_z - q_z) \quad (10.3)$$

{ Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 } +≡

```

function sub_vec•(p, q) result(diff)
  type (vec) :: diff
  type (vec), intent (in) :: p, q

  diff = vec(p % x - q % x, p % y - q % y, p % z - q % z)
end function sub_vec•

```

10.4.3.5 Αντίθετο Διάνυσμα

Αν εφαρμόσουμε τη *neg_vec* συνάρτηση σε ένα διάνυσμα, αλλάζουμε τα πρόσημα όλων των συνιστώσών του.

{ Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 } +≡

```

function neg_vec•(p) result(neg)
  type (vec) :: neg
  type (vec), intent (in) :: p

  neg = vec(-p % x, -p % y, -p % z)
end function neg_vec•

```

10.4.3.6 Πολλαπλασιασμός Πραγματικού με Διάνυσμα

Η πράξη αυτή έχει σαν αποτέλεσμα την ομοιόμορφη μετατροπή (scaling) κάθε συνιστώσας του διανύσματος

$$\alpha \mathbf{p} = (\alpha p_x, \alpha p_y, \alpha p_z) \quad (10.4)$$

{ Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 } +≡

```

function realTimesVec.(a, p) result(scal)
  type (vec) :: scal
  double precision, intent (in) :: a
  type (vec), intent (in) :: p

  scal = vec(a * (p % x), a * (p % y), a * (p % z))

end function realTimesVec.

```

10.4.3.7 Απόλυτη Τιμή Ενός Διανύσματος

Η απόλυτη τιμή ενός διανύσματος προκύπτει, επεκτείνοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο χώρο \mathbb{R}^3 :

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} \quad (10.5)$$

Για άλλη μια φορά υπερφορτώνουμε μια γενική εγγενή διαδικασία, τη συνάρτηση *abs*.

{ Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 } +≡

```

function absVec.(p) result(absv)
  double precision :: absv
  type (vec), intent (in) :: p

  absv = sqrt((p % x)2 + (p % y)2 + (p % z)2)

end function absVec.

```

10.4.3.8 Εσωτερικό Γινόμενο Δύο Διανυσμάτων

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ο πραγματικός αριθμός, που προκύπτει από την πρόσθεση των γινομένων των αντίστοιχων συνιστωσών τους.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z \quad (10.6)$$

{ Subroutine and Function Implementation 10.4.3.1 } +≡

```

function vecDot.(p, q) result(dot)
  double precision :: dot
  type (vec), intent (in) :: p, q

  dot = p % x * q % x + p % y * q % y + p % z * q % z

end function vecDot.

```


10.4.3.9 Εξωτερικό Γινόμενο Δύο Διανυσμάτων

Η πράξη αυτή δεν είναι αντιμεταθετική. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής της είναι ένα νέο διάνυσμα, που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \hat{x}(p_y q_z - q_y p_z) + \hat{y}(p_z q_x - q_z p_x) + \hat{z}(p_x q_y - q_x p_y) \quad (10.7)$$

{ Subroutine and Function Implementation (0.4.3.1) } ≡

```

function vec_ext*(p, q) result(ext)
  type (vec) :: ext
  type (vec), intent (in) :: p, q

  ext = vec(p ↦ y * q ↦ z - q ↦ y * p ↦ z, p ↦ z * q ↦ x - q ↦ z * p ↦ x,
           p ↦ x * q ↦ y - q ↦ x * p ↦ y)

end function vec_ext*

```

10.5 Πώς Μπορεί να Ξεκινήσει Κάποιος να Χρησιμοποιεί το FWEB

Το FWEB διανέμεται δωρεάν και η διανομή του αυτή λαμβάνει χώρα, σύμφωνα με τους όρους της Δημόσιας Γενικής Άδειας GNU. Αυτό σημαίνει πως, ο καθένας είναι ελεύθερος να το χρησιμοποιεί και να το επαναδιανέμει ελεύθερα. Η τελευταία του έκδοση είναι η 1.61. Όσοι θέλουν να το αποκτήσουν, μπορούν να κατεβάσουν από το διαδίκτυο το αρχείο 'fweb-1.61.tar.gz' από τη διεύθυνση `ftp.pppl.gov:/pub/fweb`. Ο νέος χρήστης θα πρέπει πρώτα να αποσυμπίσει το αρχείο αυτό και, στη συνέχεια, να μεταγλωττίσει τον πηγαίο κώδικα του στο υλισμικό του, ακολουθώντας τις λεπτομερείς οδηγίες του συμπεριλαμβανομένου στη διανομή εγχειριδίου χρήσης. Το FWEB έχει εγκατασταθεί με επιτυχία σε πολλά συστήματα και έτοιμα εκτελέσιμα για πλατφόρμες Win32 διατίθενται σε διάφορες ιστοσελίδες (όπως, για παράδειγμα, στο `http://www.literateprogramming.com`).

Αν και το FWEB αποτελεί σημαντικό βοήθημα κατά τη διαδικασία δημιουργίας νέων προγραμμάτων, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε και για να παράγουμε τις λογοκεντρικές εκδόσεις ήδη υπάρχοντος λογισμικού. Ο απλούστερος τρόπος (αν και όχι απαραίτητα ο καλύτερος), για να το κάνουμε αυτό, είναι συμπεριλαμβάνοντας όλες τις υπορουτίνες στην ανώνυμη υπομονάδα. Η διαδικασία είναι η ακόλουθη: Αρχικά ο προγραμματιστής πρέπει να αλλάξει την επέκταση του αρχείου του πηγαίου κώδικα σε .web και να προσθέσει μια γραμμή με την εντολή, που θέτει τη γλώσσα, π.χ. "@π9". Στη συνέχεια, πρέπει να τοποθετήσει μια εντολή "@a" πριν από κάθε προγραμματιστική μονάδα (π.χ. main program, subroutine, function). Πριν από κάθε εμφάνιση του "@a", ο προγραμματιστής πρέπει να εισάγει μια εντολή τμηματοποίησης ("@*" ή "@ "), ακολουθούμενη από τεκμηρίωση σε TEX για τον κώδικα, που ακολουθεί.

Μια προειδοποίηση: Τα σχόλια πρέπει να είναι γραμμένα σε έγκυρο κώδικα TEX. Τυχόν αδέσποτα ειδικά σύμβολα θα έχουν σαν αποτέλεσμα, το TEX να

προβεί σε εξειδικευμένες ενέργειες, που δεν είχαμε σχεδιάσει, με συνέπεια την εμφάνιση αδικαιολόγητων σφαλμάτων .

Βιβλιογραφία

- [1]. D. E. Knuth, "Literate Programming", *The Computer Journal*, vol. 27, no. 2, pp. 97-111, May 1984.
- [2]. M. Carr, "Using Fortran 90 and Object-Oriented Programming to Accelerate Code Development", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 41, pp. 85-90, Dec. 1999.

