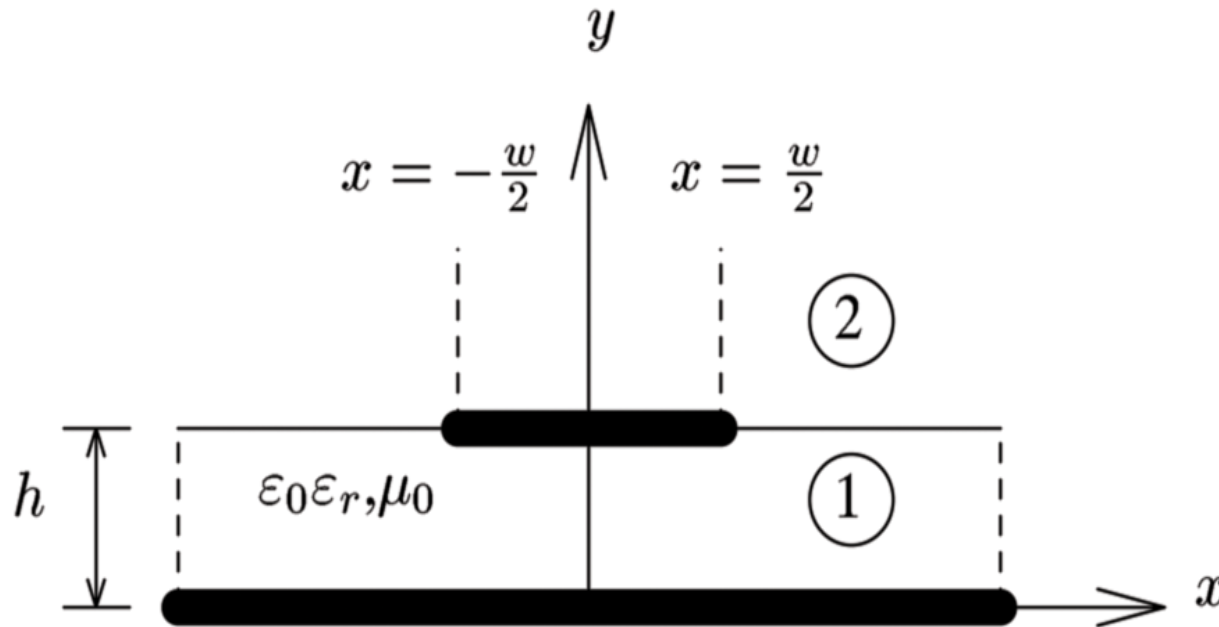


# Το παράδειγμα της μικροταινίας



$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

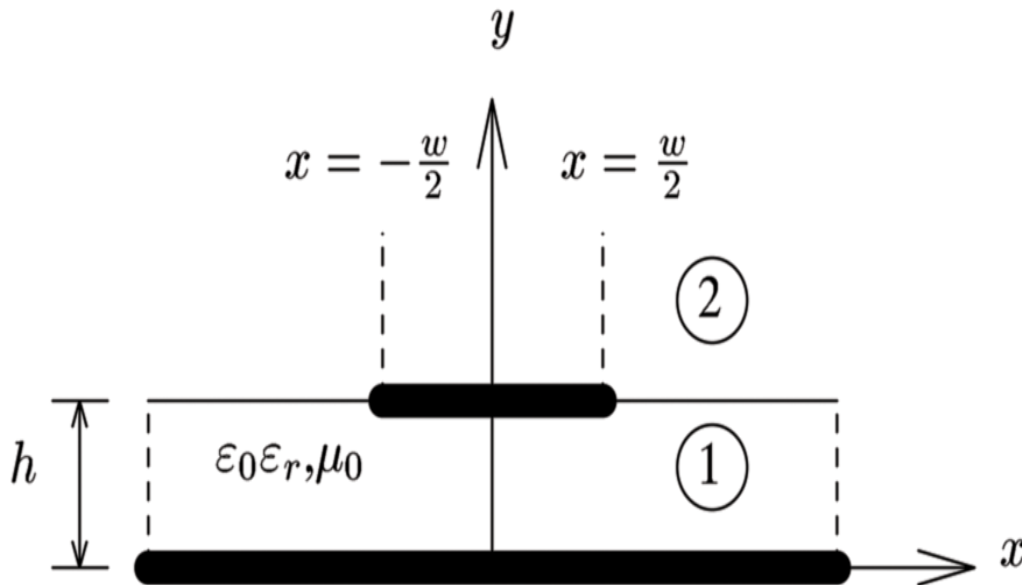
- Επίλυση του προβλήματος της ταινιογραμμής

$$L = \frac{1}{c^2 C_0}$$

$$v = c \sqrt{\frac{C_0}{C}}$$

$$Z_0 = \frac{1}{c \sqrt{C_0 C}}$$

# Η κατάστρωση μιας εξίσωσης για τη μικροταινία (1)



- Εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

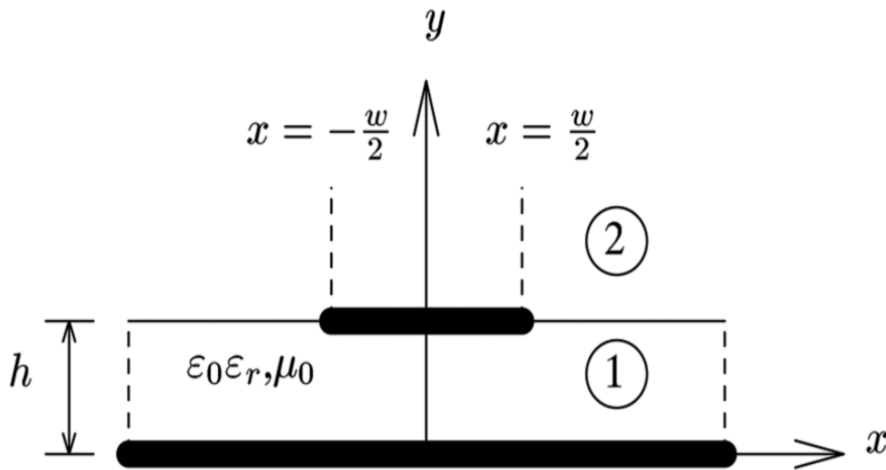
- Οριακές Συνθήκες:

$$u = u_0 \quad \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = 0$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k_x, y) e^{jk_x x} dk_x = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} U(k_x, y) \cos(k_x x) dk_x$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - k_x^2 U = 0 \rightarrow U(k_x, y) = A \cosh(k_x y) + B \sinh(k_x y)$$

# Η κατάστροψη μιας εξίσωσης για τη μικροταινία (2)



- Οριακές Συνθήκες:

$$u_1(x, h) = u_2(x, h)$$

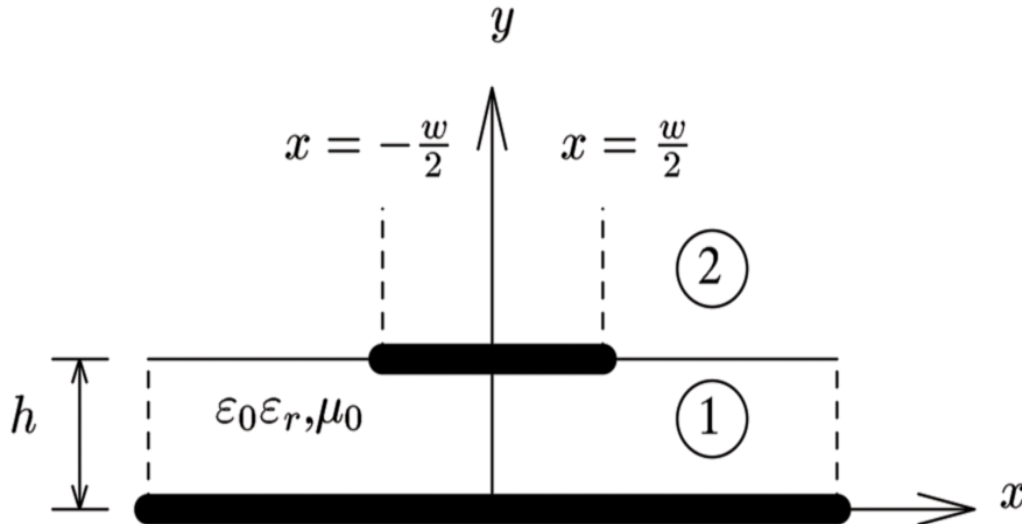
$$-\varepsilon_0 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=h} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=h} = \sigma(x)$$

*Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου*

Περιοχή 1:  $u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} B(k_x) \sinh(k_x y) \cos(k_x x) dk_x$

Περιοχή 2:  $u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} C(k_x) e^{-k_x y} \cos(k_x x) dk_x$

# Η κατάστροψη μιας εξίσωσης για τη μικροταινία <sup>(3)</sup>



**Χωρητικότητα**

$$C = 2 \int_0^{w/2} \sigma(x) dx$$

$$\int_0^{w/2} G(x, x') \sigma(x') dx' = 1 \quad , \quad 0 < x < w/2$$

με: 
$$G(x, x') = \frac{2}{\pi \epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(k_x x) \cos(k_x x')}{k_x (\epsilon_r \coth(k_x h) + 1)} dk_x$$

# Επίλυση της εξίσωσης της μικροταινίας

$$\int_0^{w/2} G(x, x') \sigma(x') dx' = 1 \quad , \quad 0 < x < w/2$$

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(x) \quad , \quad f_i(x) = e^{L_i x}$$

$$\sum_{j=1}^N S_{ij} a_j = R_i \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

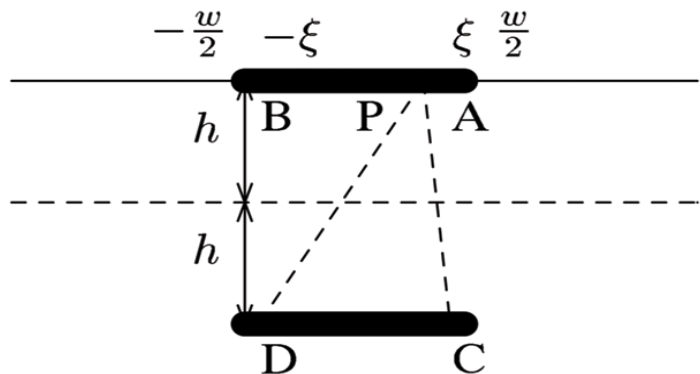
$$\mu\epsilon : S_{ij} = \int_0^{w/2} \int_0^{w/2} f_i(x) G(x, x') f_j(x') dx' dx \quad , \quad R_i = \int_0^{w/2} f_i(x) dx$$

$$C = 2 \int_0^{w/2} \sigma(x) dx = 2 \int_0^{w/2} \sum_{i=1}^N a_i f_i(x) dx = 2 \sum_{i=1}^N a_i \int_0^{w/2} f_i(x) dx = 2 \sum_{i=1}^N a_i R_i$$

# Μια εναλλακτική προσέγγιση στο πρόβλημα της μικροταινίας

• Αρχή ελαχίστης δυναμικής ενέργειας:

$$W = \frac{1}{2} \iiint u(P) q(P) d\Omega_P \rightarrow W = \frac{1}{2} \iint u(P) \sigma(P) dS_P$$



$$PA = |x - \xi| \quad PC = \sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}$$

$$PB = |x + \xi| \quad PD = \sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}$$

$$u(x) = - \int_0^{w/2} \frac{\sigma(\xi)}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|x - \xi|}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}} \frac{|x + \xi|}{\sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}} d\xi$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{w/2} \int_0^{w/2} \ln \left( \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (2h)^2}}{|x - \xi|} \cdot \frac{\sqrt{(x + \xi)^2 + (2h)^2}}{|x + \xi|} \right) \sigma(\xi) \sigma(\xi') d\xi' d\xi$$

# Μεταβολική κατάστροση

➤ Ελαχιστοποίηση ενέργειας (ακρότατο της  $W$ )

➤ Οριακές συνθήκες :  $u = u_0$  για  $-\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2}$  ,  $y = h$

$$F(\sigma) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{w/2} \int_0^{w/2} \ln \left( \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|} \right) \sigma(\xi) \sigma(\xi') d\xi' d\xi \\ - \int_0^{w/2} u_0 \sigma(\xi) d\xi$$

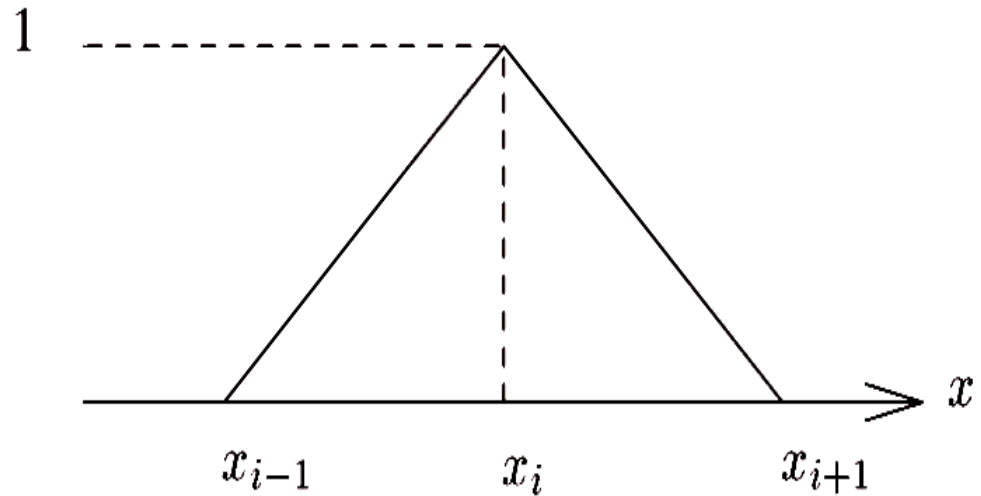
➤ Συνθήκη στασιμότητας :  $\delta F(\sigma) = 0$

➤ Ακρότατο :  $\delta^2 F(\sigma) > 0$

# Διακριτοποίηση με γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής <sup>(1)</sup>

$$\sigma(\xi) \cong \sum_{k=1}^M \sigma_k t_k(\xi)$$

$$t_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$F(\sigma) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sigma_k \sigma_j \int_0^{w/2} \int_0^{w/2} \ln \left( \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \cdot \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|} \right) t_j(\xi') t_k(\xi) d\xi d\xi$$

$$- \sum_{k=1}^M \sigma_k \int_0^{w/2} u_0 t_k(\xi) d\xi$$



# Διακριτοποίηση με γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής <sup>(2)</sup>

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} = 0, \quad k = 1, \dots, M \quad \longrightarrow \quad [S][\sigma] = [V]$$

με:

$$S_{jk} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{w/2} \int_0^{w/2} \ln \left( \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (2h)^2}}{|x-\xi|} \cdot \frac{\sqrt{(x+\xi)^2 + (2h)^2}}{|x+\xi|} \right) t_j(\xi') t_k(\xi) d\xi' d\xi$$

και:

$$V_k = \int_0^{w/2} u_0 t_k(\xi) d\xi$$

Αφού:

$$\sigma(\xi) \cong \sum_{k=1}^M \sigma_k t_k(\xi)$$

τελικά:

**Χωρητικότητα:**

$$C = 2 \int_0^{w/2} \sigma(x) dx$$